

Дополнения к семинару 6

Элементы сферической геометрии

Упражнение 6.1. Опишите все тройки точек сферы, являющиеся вершинами некоторых сферических треугольников. Сколько различных сферических треугольников могут иметь одни и те же вершины?

Упражнение 6.2. Пусть W — эйлеров сферический треугольник. Тогда в треугольнике W

- (1) против равных сторон лежат равные углы;
- (2) против равных углов лежат равные стороны;
- (3) против большего угла лежит большая сторона;
- (4) против большей стороны лежит больший угол.

Для доказательства пункта (3) нам понадобится ряд вспомогательных результатов. Первые два из них разбираются достаточно просто, так что их проверку мы оставляем в качестве упражнения.

Следствие 6.40 из лекции можно усилить, практически не меняя его доказательства.

★ **Лемма 6.1.** Пусть A и B — точки, принадлежащие границе ∂W эйлерова многоугольника W и не лежащие на одном ребре этого многоугольника. Тогда малый сферический отрезок AB

- (1) лежит в W ,
- (2) пересекает ∂W в точности по точкам A и B ,
- (3) делит W на два эйлеровых многоугольника, пересекающихся по AB .

Отметим, что каждую сферическую прямую можно рассматривать как одновершинную ломаную, выбрав любую точку этой сферической прямой в качестве вершины. Таким образом, к сферическим прямым применима сферическая теорема Жордана (теорема 6.7 из лекции), что приводит к следующему результату (этот результат легко доказывается и без использования теоремы Жордана).

★ **Лемма 6.2.** Пусть $\ell \subset S^2$ — произвольная сферическая прямая, и $A, B \in S^2$ — точки, не лежащие на ℓ . Тогда

- (1) если A и B диаметрально противоположны, то A и B лежат в разных полусферах относительно ℓ , так что каждый сферический отрезок, соединяющий A и B , пересекает ℓ , и это пересечение состоит ровно из одной точки;
- (2) если A и B не являются диаметрально противоположными, то малый сферический отрезок AB пересекает ℓ , если и только если A и B лежат в разных полусферах относительно ℓ , причем если пересечение есть, то оно состоит ровно из одной точки;
- (3) если A и B не являются диаметрально противоположными, то большой сферический отрезок AB всегда пересекает ℓ , при этом,
 - (а) если A и B лежат в разных полусферах относительно ℓ , то пересечение состоит из одной точки;

(b) если A и B лежат в одной полусфере относительно ℓ , то пересечение состоит из двух точек.

★ **Лемма 6.3.** Пусть $W = ABC \subset S^2$ — эйлеров треугольник, и α — его угол при вершине A . Тогда для каждого $0 < \varphi < \alpha$ существует и единственная точка D , лежащая внутри стороны BC , такая, что углы при вершине A эйлеровых треугольников DAB и DAC равны соответственно φ и $\alpha - \varphi$.

Доказательство. Приведем слегка модифицированное, но эквивалентное определение угла сферического треугольника W при вершине A (мы заменим открытую окрестность на замкнутую невырожденную, т.е. замкнутую ненулевого радиуса). Рассмотрим проекцию ψ из центра сферы S^2 достаточно малой сферической замкнутой невырожденной окрестности B_A точки A на касательную плоскость $T_A S^2$. Тогда $S = \psi(B_A \cap W)$ — сектор круга $K = \psi(B_A)$. Величина этого сектора и есть величина α угла треугольника W при вершине A .

Обозначим через S_A граничную окружность круга B_A , и положим $B' = AB \cap S_A$, $C' = AC \cap S_A$, $B'' = \psi(B')$, $C'' = \psi(C')$. Рассмотрим радиус AD'' круга K , который делит сектор S на два сектора $B''AD''$ и $C''AD''$, причем величина первого из них равна φ , а оставшегося соответственно $\alpha - \varphi$. Пусть $D' = \psi^{-1}(D'')$, тогда $D' \in W$ и $[A, D'] = \psi(AD'')$, поэтому углы в треугольниках $B'AD'$ и $C'AD'$ при вершине A равны соответственно φ и $\alpha - \varphi$.

Пусть m обозначает прямую в $T_A S^2$, проходящую через $[A, D']$, а ℓ — сферическую прямую, проходящую через A и D' . Тогда $\psi(\ell \cap B_A) = m \cap K$. Точки B'' и D'' лежат в разных компонентах множества $K \setminus m$, поэтому, так как ψ — гомеоморфизм, точки B' и C' лежат в разных компонентах множества $B_A \setminus \ell$ и, значит, в разных полусферах относительно ℓ . По лемме 6.2, малые сферические отрезки AB и AC , пересекающие ℓ в точке A , не могут пересекать ℓ еще и в других точках, поэтому B и C также лежат в разных полусферах относительно ℓ . Но по той же лемме, малый сферический отрезок BC пересекает ℓ ровно в одной точке, которую мы и обозначим через D . Точка D лежит внутри стороны BC треугольника W , поэтому, в силу леммы 6.1, AD делит W на два эйлеровых треугольника с нужными углами при вершине A . Единственность точки D вытекает из единственности радиуса AD'' и единственности точки пересечения сферической прямой ℓ с BC . \square

Упражнение 6.3 (Мнемоническое правило Непера). Пусть W — сферический прямоугольный треугольник с катетами a и b , гипотенузой c и углами α и β , лежащими напротив катетов a и b соответственно. Положим $\bar{a} = \pi/2 - a$, $\bar{b} = \pi/2 - b$. Под *элементами* W будем понимать его углы α и β , а также его стороны, однако вместо катетов a и b будем рассматривать их “дополнения” \bar{a} и \bar{b} до $\pi/2$. Расположим вдоль окружности элементы W в том порядке, в котором они встречаются при обходе самого W , а именно, в порядке $\alpha, c, \beta, \bar{a}, \bar{b}$. Докажите, что

- (1) для трех несмежных элементов косинус элемента, расположенного отдельно от других двух, равен произведению их синусов;
- (2) для трех смежных элементов W косинус среднего элемента равен произведению котангенсов соседних.

Упражнение 6.4. Докажите, что плоский многоугольник выпуклый, если и только если все его углы не превосходят π .

Упражнение 6.5. Пусть W_1 и W_2 — плоские выпуклые многоугольники. Предположим, что

- (1) многоугольники W_1 и W_2 пересекаются по их общему ребру e ;
- (2) в каждой концевой точке ребра e суммарный угол этих многоугольников не превосходит π .

Тогда $W_1 \cup W_2$ — выпуклый многоугольник.

⊗ **Определение 6.4.** Окружностью на сфере, описанной вокруг сферического многоугольника, назовем окружность, проходящую через все вершины этого многоугольника.

Упражнение 6.6. Вокруг всякого ли треугольника на сфере можно описать окружность?

⊗ **Определение 6.5.** Окружность $C \subset S^2$ назовем *вписанной в сферический многоугольник* $W \subset S^2$, если $C \subset W$ и C пересекает все стороны многоугольника W .

Упражнение 6.7. Во всякий ли треугольник на сфере можно вписать окружность?

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

⊛ **Определение 6.6.** Сферическим расстоянием $|AX|$ от точки $A \in S^2$ до непустого подмножества $X \subset S^2$ называется величина $\inf_{P \in X} |AP|$, где $|AP|$ — сферическое расстояние между точками A и P .

★ **Лемма 6.7.** Пусть $\ell \subset S^2$ — сферическая прямая, и $A \in S^2$. Тогда

- (1) или A является центром прямой ℓ (если ℓ рассматривать как сферическую окружность), и тогда все $|AP|$, $P \in \ell$, равны между собой и равны $|A\ell| = \pi/2$;
- (2) или $A \notin \ell$ не является центром ℓ , и тогда из всех малых сферических отрезков AP , $P \in \ell$, имеется ровно два, перпендикулярных ℓ , при этом $|A\ell|$ равно сферической длине кратчайшего из этих отрезков, а все остальные такие AP длиннее; более того, расстояние $|AP|$ строго монотонно возрастает при движении $P \in \ell$ от наименьшего значения $|AP|$ к наибольшему;
- (3) или $A \in \ell$, и тогда $|A\ell| = 0$ и достигается на A , а расстояние $|AP|$ строго монотонно возрастает при движении $P \in \ell$ от A к диаметрально противоположной A точке сферической прямой ℓ .

Доказательство. Проведем следующие построения.

Конструкция 6.8. Введем декартовы координаты x, y, z с началом в центре сферы и осью z такую, что ℓ лежит в плоскости xy , а точка A — в первом квадранте плоскости xz . Тогда $A = (a_x, 0, a_z)$, $a_x^2 + a_z^2 = 1$, $a_x \geq 0$, $a_z \geq 0$, а ℓ можно параметризовать стандартным образом углом φ , что позволяет представить ℓ как образ непрерывной кривой $\gamma(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Такую параметризацию $\gamma(\varphi)$ сферической прямой ℓ назовем индуцированной точкой A . Отметим, что индуцированная параметризация определяется неоднозначно.

Обозначим через $|A\gamma(\varphi)|_e$ евклидово расстояние между точками A и $\gamma(\varphi)$, тогда

$$|A\gamma(\varphi)|_e = \sqrt{(\cos \varphi - a_x)^2 + \sin^2 \varphi + a_z^2} = \sqrt{2 - 2a_x \cos \varphi}.$$

По евклидовой теореме косинусов, имеем $f(\varphi) := |A\gamma(\varphi)| = \arccos\left(1 - |A\gamma(\varphi)|_e^2/2\right) = \arccos(a_x \cos \varphi)$.

Точка A является центром ℓ , если и только если $a_x = 0$, но тогда $f(\varphi) = \pi/2$ при всех φ , что доказывает пункт (1). Если $0 \leq a_x < 1$, то наименьшее значение функции $f(\varphi)$ достигается при $\varphi = 0$, а при изменении φ от 0 до π или $-\pi$ величина $f(\varphi)$ строго монотонно растёт (убедитесь в этом). \square

Конструкция 6.9. Для малого сферического отрезка $m \subset S^2$, соединяющего точки Q и R сферы S^2 , обозначим через ℓ_Q и ℓ_R сферические прямые, проходящие через Q и R соответственно перпендикулярно m (если Q и R диаметрально противоположны, то $\ell_Q = \ell_R$). Пусть S_Q и S_R — замкнутые полусферы, ограниченные ℓ_Q и ℓ_R соответственно и содержащие m . Тогда $D_m = S_Q \cap S_R$ назовем *двуугольником, перпендикулярным m* .

★ **Лемма 6.10.** Пусть $Q, R \in S^2$, m — малый сферический отрезок, соединяющий Q и R , и D_m — двуугольник, перпендикулярный m . Тогда

- (1) для каждой точки $A \in \text{Int } D_m$ существует и единственная точка P , лежащая внутри m и такая, что $|AP| = |Am|$;
- (2) для каждой точки $A \in S^2 \setminus \text{Int } D_m$ расстояние $|Am|$ достигается на той из точек P и Q , которая расположена ближе к A ; при этом в каждой точке P , внутренней для m , имеем $|AP| > |Am|$.

Доказательство. Продолжим сферический отрезок m до сферической прямой ℓ_m и рассмотрим параметризацию $\gamma(\varphi)$ сферической прямой ℓ_m , индуцированную точкой A , см. конструкцию 6.8. По лемме 6.7, функция $f(\varphi) = |A\gamma(\varphi)|$ принимает наименьшее значение в точке $\varphi = 0$, и ее величина строго монотонно растёт при изменении φ от 0 к π или $-\pi$. Легко видеть, что

- (1) для $A \in \text{Int } D_m$ точка $\gamma(0)$ лежит внутри m ;
- (2) для $A \in D_m$, являющейся центром ℓ_m , в качестве $\gamma(0)$ можно выбрать любую точку из ℓ_m , в частности, подходят и точки Q, R ;
- (3) для $A \in S^2 \setminus \text{Int } D_m$, не совпадающей с центром ℓ_m , точка $\gamma(0)$ лежит на $\ell_m \setminus \text{Int } m$, поэтому, в силу монотонного роста величины $f(\varphi)$ при изменении φ от 0 к π или $-\pi$, величина $|Am|$ достигается на той из точек Q, R , которая расположена ближе к A , а на всех точках P , внутренних для m , имеем $|AP| > |Am|$.

□

⊗ **Определение 6.11.** Двуугольник будем называть *внутренним*, если его угол не превосходит π ; иначе двуугольник назовем *внешним*. Биссектрисой внутреннего двуугольника D с вершинами Q и R назовем сферический отрезок $m \subset D$, соединяющий Q с R и разбивающий D на два равных двуугольника.

★ **Лемма 6.12.** Пусть D — внутренний двуугольник, ограниченный сферическими отрезками m и m' . Тогда множество точек из D , равноудаленных от m и m' , совпадает с биссектрисой двуугольника D .

Доказательство. Непосредственно вытекает из леммы 6.10. □

★ **Лемма 6.13.** Пусть D — внутренний двуугольник, величина угла которого меньше π . Рассмотрим произвольные точки A и B , лежащие во внутренностях разных сторон двуугольника D . Тогда малый сферический отрезок AB пересекает биссектрису двуугольника D , причем точка пересечения единственна и лежит как внутри D , так и внутри AB .

Доказательство. Так как угол двуугольника D меньше π , а точки A и B отличны от его вершин, эти точки не являются диаметрально противоположными и, поэтому, они соединяются единственным малым сферическим отрезком AB . По условию, точки A и B находятся в разных полусферах относительно сферической прямой ℓ , проходящей через биссектрису b двуугольника D , значит, в силу леммы 6.2, $AB \cap \ell$ состоит из одной точки, обозначим ее через X . Так как двуугольник D — выпуклый, то $AB \subset D$, поэтому $\{X\} = AB \cap b$. Точка X отлична от вершин двуугольника D , так как иначе сферический отрезок AB имел бы в X излом. Следовательно, X лежит внутри b , поэтому X — внутренняя точка двуугольника D и, значит, внутренняя точка AB . □

Упражнение 6.8. Даны стороны сферического треугольника. Найти радиус описанной окружности.

⊗ **Определение 6.14.** Пусть m — сферический отрезок, и A — его середина. Тогда сферическая прямая ℓ , проходящая через A перпендикулярно m , называется *серединным перпендикуляром к m* .

▶ **Замечание 6.1.** Серединный перпендикуляр ℓ к сферическому отрезку m представляет собой множество всех точек сферы S^2 , равноудаленных от концов m . Действительно, равенство сферических расстояний между парами точек сферы равносильно равенству евклидовых расстояний между этими же точками, поэтому множество всех точек сферы, равноудаленных от концов A и B сферического отрезка m , — это пересечение со сферой S^2 евклидова серединного перпендикуляра к евклидову отрезку $[A, B]$, а это и есть ℓ .

⊗ **Определение 6.15.** Сферические отрезки назовем взаимно *дополнительными*, если их объединение — сферическая прямая.

▶ **Замечание 6.2.** Легко видеть, что сферическая прямая является серединным перпендикуляром к сферическому отрезку, если и только если она — серединный перпендикуляр к дополнительному сферическому отрезку.

▶ **Замечание 6.3.** Каждая окружность на сфере S^2 имеет два центра, образующих пару диаметрально противоположных точек, получающихся пересечением сферы S^2 и евклидовой прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно плоскости, в которой лежит окружность. *Радиусом сферической окружности* будем называть наименьшее из двух расстояний от центров окружности до нее. Если r — радиус окружности, то расстояние до “далекого” ее центра равно $\pi - r$.

★ **Лемма 6.16.** Пусть A, B и C — точки на сфере S^2 , не лежащие на одной сферической прямой. Тогда

- (1) *серединные перпендикуляры, проведенные к разным сторонам треугольника с вершинами A, B и C , различны;*
- (2) *у всех 8-ми треугольников с вершинами A, B и C тройки серединных перпендикуляров к сторонам одни и те же;*
- (3) *три серединных перпендикуляра пересекаются по одной паре диаметрально противоположных точек;*
- (4) *точки пересечения трех серединных перпендикуляров — центры одной и той же окружности, описанной вокруг всех 8-ми треугольников с вершинами A, B и C .*

Доказательство. (1) Пусть для начала рассматриваемый треугольник — эйлеров. Предположим противное, т.е. что у разных сторон треугольника, скажем, у AB и AC , серединный перпендикуляр один и тот же. Обозначим его через ℓ . Пусть $C' \in AB$ и $B' \in AC$ — середины этих сторон. Так как треугольник ABC эйлеров, то $|AB| < \pi$ и $|AC| < \pi$, поэтому $|AC'| = |C'B| < \pi/2$ и $|AB'| = |B'C| < \pi/2$. Но тогда AB и AC не пересекаются, противоречие с тем, что у них имеется общая точка A . Результат для произвольного, не обязательно эйлерова треугольника, вытекает из замечания 6.2.

(2) Это также вытекает из замечания 6.2.

(3) Так как, по пункту (1), серединные перпендикуляры к AB и AC различны, они пересекаются по двум диаметрально противоположным точкам. Каждая из этих точек, по замечанию 6.1, равноудалена от A , B и C , поэтому, в силу того же замечания, серединный перпендикуляр к BC содержит обе эти точки.

(4) По замечанию 6.1, точки пересечения серединных перпендикуляров равноудалены от вершин треугольника и, поэтому, являются центрами описанной окружности. \square

⊗ **Определение 6.17.** *Высотой сферического треугольника W , выпущенной из его вершины A , называется малый сферический отрезок AH (он может быть вырожденным), соединяющий точку A с некоторой точкой H сферической прямой ℓ , проходящей через сторону треугольника W , противоположную вершине A ; при этом, если AH невырожден, требуется дополнительно, чтобы AH был перпендикулярен ℓ .*

► **Замечание 6.4.** Из леммы 6.7 вытекает, что, в обозначениях определения 6.17, если A является центром сферической прямой ℓ , то имеется бесконечно много высот AH , и их длины равны $\pi/2$; в противном случае, имеется ровно две высоты, и их длины равны $|A\ell|$ и $\pi - |A\ell|$. Высоту с меньшей длиной, равной $|A\ell|$, назовем *малой*, а с большей длиной, равной $\pi - |A\ell|$, — *большой*.

Упражнение 6.9. Даны стороны сферического треугольника. Найти его высоты.

Упражнение 6.10. Доказать, что для выпуклого сферического n -угольника имеет место равенство

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \pi(n - 2) + \frac{S}{r^2},$$

где α_j — его углы, а S — его площадь.