Дополнения к семинару 6

Элементы сферической геометрии

Упражнение 6.1. Опишите все тройки точек сферы, являющиеся вершинами некоторых сферических треугольников. Сколько различных сферических треугольников могут иметь одни и те же вершины?

Упражнение 6.2. Пусть W — эйлеров сферический треугольник. Тогда в треугольнике W

(1) против равных сторон лежат равные углы;

(2) против равных углов лежат равные стороны;

(3) против большего угла лежит большая сторона;

(4) против большей стороны лежит больший угол.

Для доказательства пункта (3) нам понадобится ряд вспомогательных результатов. Первые два из них разбираются достаточно просто, так что их проверку мы оставляем в качестве упражнения.

Следствие 6.40 из лекции можно усилить, практически не меняя его доказательства.

★ Лемма 6.1. *Пусть A и B — точки, принадлежащие границе ∂W эйлерова многоугольника W и не лежащие на одном ребре этого многоугольника. Тогда малый сферический отрезок AB*

(1) *лежит в W,*

(2) *пересекает ∂W в точности по точкам A и B,*

(3) *делит W на два эйлеровых многоугольника, пересекающихся по AB.*

Отметим, что каждую сферическую прямую можно рассматривать как одновершинную ломаную, выбрав любую точку этой сферической прямой в качестве вершины. Таким образом, к сферическим прямым применима сферическая теорема Жордана (теорема 6.7 из лекции), что приводит к следующему результату (этот результат легко доказывается и без использования теоремы Жордана).

★ Лемма 6.2. *Пусть $\ell \subset S^2$ — произвольная сферическая прямая, и $A, B \in S^2$ — точки, не лежащие на ℓ. Тогда*

(1) *если A и B диаметрально противоположны, то A и B лежат в разных полусферах относительно ℓ, так что каждый сферический отрезок, соединяющий A и B, пересекает ℓ, и это пересечение состоит ровно из одной точки;*

(2) *если A и B не являются диаметрально противоположными, то малый сферический отрезок AB пересекает ℓ, если и только если A и B лежат в разных полусферах относительно ℓ, причем если пересечение есть, то оно состоит ровно из одной точки;*

(3) *если A и B не являются диаметрально противоположными, то большой сферический отрезок AB всегда пересекает ℓ, при этом,*

   (a) *если A и B лежат в разных полусферах относительно ℓ, то пересечение состоит из одной точки;*

(b) *если A и B лежат в одной полусфере относительно ℓ, то пересечение состоит из двух точек.*

★ **Лемма 6.3.** *Пусть $W = ABC \subset S^2$ — эйлеров треугольник, и α — его угол при вершине A. Тогда для каждого $0 < \varphi < \alpha$ существует и единственная точка D, лежащая внутри стороны BC, такая, что углы при вершине A эйлеровых треугольников DAB и DAC равны соответственно φ и $\alpha - \varphi$.*

Доказательство. Приведем слегка модифицированное, но эквивалентное определение угла сферического треугольника W при вершине A (мы заменим открытую окрестность на замкнутую невырожденную, т.е. замкнутую ненулевого радиуса). Рассмотрим проекцию ψ из центра сферы S^2 достаточно малой сферической замкнутой невырожденной окрестности B_A точки A на касательную плоскость T_AS^2. Тогда $S = \psi(B_A \cap W)$ — сектор круга $K = \psi(B_A)$. Величина этого сектора и есть величина α угла треугольника W при вершине A.

Обозначим через S_A граничную окружность круга B_A, и положим $B' = AB \cap S_A$, $C' = AC \cap S_A$, $B'' = \psi(B')$, $C'' = \psi(C')$. Рассмотрим радиус AD'' круга K, который делит сектор S на два сектора $B''AD''$ и $C''AD''$, причем величина первого из них равна φ, а оставшегося соответственно $\alpha - \varphi$. Пусть $D' = \psi^{-1}(D'')$, тогда $D' \in W$ и $[A, D''] = \psi(AD')$, поэтому углы в треугольниках $B'AD'$ и $C'AD'$ при вершине A равны соответственно φ и $\alpha - \varphi$.

Пусть m обозначает прямую в T_AS^2, проходящую через $[A, D'']$, а ℓ — сферическую прямую, проходящую через A и D'. Тогда $\psi(\ell \cap B_A) = m \cap K$. Точки B'' и D'' лежат в разных компонентах множества $K \setminus m$, поэтому, так как ψ — гомеоморфизм, точки B' и C' лежат в разных компонентах множества $B_A \setminus \ell$ и, значит, в разных полусферах относительно ℓ. По лемме 6.2, малые сферические отрезки AB и AC, пересекающие ℓ в точке A, не могут пересекать ℓ еще и в других точках, поэтому B и C также лежат в разных полусферах относительно ℓ. Но по той же лемме, малый сферический отрезок BC пересекает ℓ ровно в одной точке, которую мы и обозначим через D. Точка D лежит внутри стороны BC треугольника W, поэтому, в силу леммы 6.1, AD делит W на два эйлеровых треугольника с нужными углами при вершине A. Единственность точки D вытекает из единственности радиуса AD'' и единственности точки пересечения сферической прямой ℓ с BC. □

Упражнение 6.3 (Мнемоническое правило Непера)**.** Пусть W — сферический прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и углами α и β, лежащими напротив катетов a и b соответственно. Положим $\bar a = \pi/2 - a$, $\bar b = \pi/2 - b$. Под *элементами* W будем понимать его углы α и β, а также его стороны, однако вместо катетов a и b будем рассматривать их “дополнения” $\bar a$ и $\bar b$ до $\pi/2$. Расположим вдоль окружности элементы W в том порядке, в котором они встречаются при обходе самого W, а именно, в порядке α, c, β, $\bar a$, $\bar b$. Докажите, что

(1) для трех несмежных элементов косинус элемента, расположенного отдельно от других двух, равен произведению их синусов;

(2) для трех смежных элементов W косинус среднего элемента равен произведению котангенсов соседних.

Упражнение 6.4. Докажите, что плоский многоугольник выпуклый, если и только если все его углы не превосходят π.

Упражнение 6.5. Пусть W_1 и W_2 — плоские выпуклые многоугольники. Предположим, что

(1) многоугольники W_1 и W_2 пересекаются по их общему ребру e;

(2) в каждой концевой точке ребра e суммарный угол этих многоугольников не превосходит π.

Тогда $W_1 \cup W_2$ — выпуклый многоугольник.

⊛ **Определение 6.4.** Окружностью на сфере, *описанной* вокруг сферического многоугольника, назовем окружность, проходящую через все вершины этого многоугольника.

Упражнение 6.6. Вокруг всякого ли треугольника на сфере можно описать окружность?

⊛ **Определение 6.5.** Окружность $C \subset S^2$ назовем *вписанной в сферический многоугольник* $W \subset S^2$, если $C \subset W$ и C пересекает все стороны многоугольника W.

Упражнение 6.7. Во всякий ли треугольник на сфере можно вписать окружность?

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

⊛ **Определение 6.6.** *Сферическим расстоянием* $|AX|$ от точки $A \in S^2$ до непустого подмножества $X \subset S^2$ называется величина $\inf_{P\in X}|AP|$, где $|AP|$ — сферическое расстояние между точками A и P.

★ **Лемма 6.7.** *Пусть $\ell \subset S^2$ — сферическая прямая, и $A \in S^2$. Тогда*

(1) *или A является центром прямой ℓ (если ℓ рассматривать как сферическую окружность), и тогда все $|AP|$, $P \in \ell$, равны между собой и равны $|A\ell| = \pi/2$;*

(2) *или $A \notin \ell$ не является центром ℓ, и тогда из всех малых сферических отрезков AP, $P \in \ell$, имеется ровно два, перпендикулярных ℓ, при этом $|A\ell|$ равно сферической длине кратчайшего из этих отрезков, а все остальные такие AP длиннее; более того, расстояние $|AP|$ строго монотонно возрастает при движении $P \in \ell$ от наименьшего значения $|AP|$ к наибольшему;*

(3) *или $A \in \ell$, и тогда $|A\ell| = 0$ и достигается на A, а расстояние $|AP|$ строго монотонно возрастает при движении $P \in \ell$ от A к диаметрально противоположной A точке сферической прямой ℓ.*

Доказательство. Проделаем следующие построения.

Конструкция 6.8. Введем декартовы координаты x, y, z с началом в центре сферы и осью z такою, что ℓ лежит в плоскости xy, а точка A — в первом квадранте плоскости xz. Тогда $A = (a_x, 0, a_z)$, $a_x^2 + a_z^2 = 1$, $a_x \ge 0$, $a_z \ge 0$, а ℓ можно параметризовать стандартным образом углом φ, что позволяет представить ℓ как образ непрерывной кривой $\gamma(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Такую параметризацию $\gamma(\varphi)$ сферической прямой ℓ назовем *индуцированной точкой* A. Отметим, что индуцированная параметризация определяется неоднозначно.

Обозначим через $\big|A\gamma(\varphi)\big|_e$ евклидово расстояние между точками A и $\gamma(\varphi)$, тогда

$$\big|A\gamma(\varphi)\big|_e = \sqrt{(\cos\varphi - a_x)^2 + \sin^2\varphi + a_z^2} = \sqrt{2 - 2a_x\cos\varphi}.$$

По евклидовой теореме косинусов, имеем $f(\varphi) := |A\gamma(\varphi)| = \arccos\Big(1 - \big|A\gamma(\varphi)\big|_e^2/2\Big) = \arccos(a_x\cos\varphi)$.

Точка A является центром ℓ, если и только если $a_x = 0$, но тогда $f(\varphi) = \pi/2$ при всех φ, что доказывает пункт (1). Если $0 \le a_x < 1$, то наименьшее значение функции $f(\varphi)$ достигается при $\varphi = 0$, а при изменении φ от 0 до π или $-\pi$ величина $f(\varphi)$ строго монотонно растет (убедитесь в этом). □

Конструкция 6.9. Для малого сферического отрезка $m \subset S^2$, соединяющего точки Q и R сферы S^2, обозначим через ℓ_Q и ℓ_R сферические прямые, проходящие через Q и R соответственно перпендикулярно m (если Q и R диаметрально противоположны, то $\ell_Q = \ell_R$). Пусть S_Q и S_R — замкнутые полусферы, ограниченные ℓ_Q и ℓ_R соответственно и содержащие m. Тогда $D_m = S_Q \cap S_R$ назовем *двуугольником, перпендикулярным m*.

★ **Лемма 6.10.** *Пусть $Q, R \in S^2$, m — малый сферический отрезок, соединяющий Q и R, и D_m — двуугольник, перпендикулярный m. Тогда*

(1) *для каждой точки $A \in \operatorname{Int} D_m$ существует и единственна точка P, лежащая внутри m и такая, что $|AP| = |Am|$;*

(2) *для каждой точки $A \in S^2 \setminus \operatorname{Int} D_m$ расстояние $|Am|$ достигается на той из точек Q и R, которая расположена ближе к A; при этом в каждой точке P, внутренней для m, имеем $|AP| > |Am|$.*

Доказательство. Продолжим сферический отрезок m до сферической прямой ℓ_m и рассмотрим параметризацию $\gamma(\varphi)$ сферической прямой ℓ_m, индуцированную точкой A, см. конструкцию 6.8. По лемме 6.7, функция $f(\varphi) = |A\gamma(\varphi)|$ принимает наименьшее значение в точке $\varphi = 0$, и ее величина строго монотонно растет при изменении φ от 0 к π или $-\pi$. Легко видеть, что

(1) для $A \in \operatorname{Int} D_m$ точка $\gamma(0)$ лежит внутри m;

(2) для $A \in D_m$, являющейся центром ℓ_m, в качестве $\gamma(0)$ можно выбрать любую точку из ℓ_m, в частности, подходят и точки Q, R;

(3) для $A \in S^2 \setminus \operatorname{Int} D_m$, не совпадающей с центром ℓ_m, точка $\gamma(0)$ лежит на $\ell_m \setminus \operatorname{Int} m$, поэтому, в силу монотонного роста величины $f(\varphi)$ при изменении φ от 0 к π или $-\pi$, величина $|Am|$ достигается на той из точек Q, R, которая расположена ближе к A, а на всех точках P, внутренних для m, имеем $|AP| > |Am|$.

□

⊛ **Определение 6.11.** Двуугольник будем называть *внутренним*, если его угол не превосходит π; иначе двуугольник назовем *внешним*. *Биссектрисой внутреннего двуугольника* D с вершинами Q и R назовем сферический отрезок $m \subset D$, соединяющий Q с R и разбивающий D на два равных двуугольника.

★ **Лемма 6.12.** *Пусть D — внутренний двуугольник, ограниченный сферическими отрезками m и m'. Тогда множество точек из D, равноудаленных от m и m', совпадает с биссектрисой двуугольника D.*

Доказательство. Непосредственно вытекает из леммы 6.10. □

★ **Лемма 6.13.** *Пусть D — внутренний двуугольник, величина угла которого меньше π. Рассмотрим произвольные точки A и B, лежащие во внутренностях разных сторон двуугольника D. Тогда малый сферический отрезок AB пересекает биссектрису двуугольника D, причем точка пересечения единственна и лежит как внутри D, так и внутри AB.*

Доказательство. Так как угол двуугольника D меньше π, а точки A и B отличны от его вершин, эти точки не являются диаметрально противоположными и, поэтому, они соединяются единственным малым сферическим отрезком AB. По условию, точки A и B находятся в разных полусферах относительно сферической прямой ℓ, проходящей через биссектрису b двуугольника D, значит, в силу леммы 6.2, $AB \cap \ell$ состоит из одной точки, обозначим ее через X. Так как двуугольник D — выпуклый, то $AB \subset D$, поэтому $\{X\} = AB \cap b$. Точка X отлична от вершин двуугольника D, так как иначе сферический отрезок AB имел бы в X излом. Следовательно, X лежит внутри b, поэтому X — внутренняя точка двуугольника D и, значит, внутренняя точка AB. □

Упражнение 6.8. Даны стороны сферического треугольника. Найти радиус описанной окружности.

⊛ **Определение 6.14.** Пусть m — сферический отрезок, и A — его середина. Тогда сферическая прямая ℓ, проходящая через A перпендикулярно m, называется *серединным перпендикуляром к m*.

▶ **Замечание 6.15.** Серединный перпендикуляр ℓ к сферическому отрезку m представляет собой множество всех точек сферы S^2, равноудаленных от концов m. Действительно, равенство сферических расстояний между парами точек сферы равносильно равенству евклидовых расстояний между этими же точками, поэтому множество всех точек сферы, равноудаленных от концов A и B сферического отрезка m, — это пересечение со сферой S^2 *евклидова серединного перпендикуляра к евклидову отрезку* $[A, B]$, а это и есть ℓ.

⊛ **Определение 6.16.** Сферические отрезки с одними и теми же концами назовем взаимно *дополнительными*, если их объединение — сферическая прямая.

▶ **Замечание 6.17.** Легко видеть, что сферическая прямая является серединным перпендикуляром к сферическому отрезку, если и только если она — серединный перпендикуляр к дополнительному сферическому отрезку.

▶ **Замечание 6.18.** Каждая окружность на сфере S^2 имеет два центра, образующих пару диаметрально противоположных точек, получающихся пересечением сферы S^2 и евклидовой прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно плоскости, в которой лежит окружность. *Радиусом сферической окружности* будем называть наименьшее из двух расстояний от центров окружности до нее. Если r — радиус окружности, то расстояние до “далекого” ее центра равно $\pi - r$.

★ **Лемма 6.19.** *Пусть A, B и C — точки на сфере S^2, не лежащие на одной сферической прямой. Тогда*

(1) *серединные перпендикуляры, проведенные к разным сторонам треугольника с вершинами A, B и C, различны;*

(2) *у всех 8-ми треугольников с вершинами A, B и C тройки серединных перпендикуляров к сторонам одни и те же;*

(3) *три серединных перпендикуляра пересекаются по одной паре диаметрально противоположных точек;*

(4) *точки пересечения трех серединных перпендикуляров — центры одной и той же окружности, описанной вокруг всех 8-ми треугольников с вершинами A, B и C.*

Доказательство. (1) Пусть для начала рассматриваемый треугольник — эйлеров. Предположим противное, т.е. что у разных сторон треугольника, скажем, у AB и AC, серединный перпендикуляр один и тот же. Обозначим его через ℓ. Пусть $C' \in AB$ и $B' \in AC$ — середины этих сторон. Так как треугольник ABC эйлеров, то $|AB| < \pi$ и $|AC| < \pi$, поэтому $|AC'| = |C'B| < \pi/2$ и $|AB'| = |B'C| < \pi/2$. Но тогда AB и AC не пересекаются, противоречие с тем, что у них имеется общая точка A. Результат для произвольного, не обязательно эйлерова треугольника, вытекает из замечания 6.17.

(2) Это также вытекает из замечания 6.17.

(3) Так как, по пункту (1), серединные перпендикуляры к AB и AC различны, они пересекаются по двум диаметрально противоположным точкам. Каждая из этих точек, по замечанию 6.15, равноудалена от A, B и C, поэтому, в силу того же замечания, серединный перпендикуляр к BC содержит обе эти точки.

(4) По замечанию 6.15, точки пересечения серединных перпендикуляров равноудалены от вершин треугольника и, поэтому, являются центрами описанной окружности. □

⊛ **Определение 6.20.** *Высотой сферического треугольника W, выпущенной из его вершины* A, называется малый сферический отрезок AH (он может быть вырожденным), соединяющий точку A с некоторой точкой H сферической прямой ℓ, проходящей через сторону треугольника W, противоположную вершине A; при этом, если AH невырожден, требуется дополнительно, чтобы AH был перпендикулярен ℓ.

▶ **Замечание 6.21.** Из леммы 6.7 вытекает, что, в обозначениях определения 6.20, если A является центром сферической прямой ℓ, то имеется бесконечно много высот AH, и их длины равны $\pi/2$; в противном случае, имеется ровно две высоты, и их длины равны $|A\ell|$ и $\pi - |A\ell|$. Высоту с меньшей длиной, равной $|A\ell|$, назовем *малой*, а с большей длиной, равной $\pi - |A\ell|$, — *большой.*

Упражнение 6.9. Даны стороны сферического треугольника. Найти его высоты.

Упражнение 6.10. Доказать, что для выпуклого сферического n-угольника имеет место равенство

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \pi(n-2) + \frac{S}{r^2},$$

где α_j — его углы, а S — его площадь.