Дополнения к семинару 5

Многогранники

Комментарий к лекции 5.1. В доказательстве теоремы 5.21 рассматривается внутренняя точка D грани F_k, круг $K \subset F_k$ с центром в D, точки B и C, лежащие в разных открытых полупространствах относительно плоскости $\pi_k \supset F_k$, конусы BK и CK с основанием K и вершинами B и C соответственно. Утверждается, что для некоторого $\varepsilon > 0$ открытый шар $U_\varepsilon(D)$ в $\mathbb{R}^3$ содержится в $BK \cup CK$. Докажем это.

Обозначим через π_B и π_C плоскости, параллельные π_i и проходящие через B и C соответственно. Пусть Π'_B и Π'_C — ограниченные этими плоскостями открытые полупространства, содержащие π_i. Обозначим через $\nu_B \colon \Pi'_B \to \pi_i$ и $\nu_C \colon \Pi'_C \to \pi_i$ радиальные проекции на π_i из B и C соответственно. Отметим, что отображения ν_B и ν_C непрерывны, в частности, эти отображения непрерывны в точке D. Отсюда следует, что существует шар $U_\varepsilon(D) \subset \Pi'_B \cap \Pi'_C$, который переводится этими отображениями внутрь круга K, а это означает, что часть этого шара, лежащая в том же полупространстве относительно π_i, что и B, содержится в BK, а оставшаяся часть шара содержится в CK, так что весь шар $U_\varepsilon(D)$ лежит в $BK \cup CK$.

Комментарий к лекции 5.2. В доказательстве леммы 5.27, а также в доказательстве предложения 5.31 говорится, что непрерывность построенных там отображений и им обратных вытекает из непрерывности радиальной проекции и утверждений, доказанных при решении задач 2.10 и 2.11. Приведем детали этого доказательства, одинакового для обеих лемм (мы разберем случай леммы 5.27).

Из лемм 2.9 и 2.10 вытекает, что радиальная проекция ν порождает непрерывное отображение (обозначим его через f) из $\partial W \setminus \operatorname{Int} F_i$ на π_i. Отметим, что $\partial W \setminus \operatorname{Int} F_i$ является конечным объединение пространственных многоугольников и, значит, компактно. Как показывается в доказательстве леммы, отображение f взаимно однозначно с образом, поэтому, в силу леммы 2.15, оно является гомеоморфизмом.

Упражнение 5.1. Пусть W — выпуклый многогранник, и пусть v, e и f обозначают количества вершин, ребер и граней этого многогранника. Докажите, что

(1) $e + 6 \le 3v$;

(2) $e + 6 \le 3f$;

(3) $f + 4 \le 2v$;

(4) $v + 4 \le 2f$;

(5) многогранник W имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань;

(6) многогранник W имеет хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол (т.е. вершину, в которой стыкуются 3, 4 или 5 граней);

(7) многогранник W имеет или хотя бы одну треугольную грань, или один трехгранный пространственный угол;

(8) сумма всех плоских углов граней многогранника W равна $2\pi(v - 2)$.

Упражнение 5.2.

(a) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 5 ребер?

(b) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 5 ребер?

(c) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 4 ребер?

(d) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 4 ребер?

(e) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 3 ребер?

(f) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 3 ребер?

⊛ **Определение 5.1.** Пусть P — вершина произвольного многогранника W, а $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ — величины углов всех граней W при этой вершине. Тогда *кривизной в вершине* P называется величина $K(P)=2\pi-\sum_i\alpha_i$.

Упражнение 5.3. Докажите, что у выпуклого многогранника сумма кривизн $K(P)$ по всем его вершинам P равна 4π.

Упражнение 5.4. Пусть $L\subset\mathbb{R}^3$ — ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W. Докажите, что $\partial W\setminus L$ состоит в точности из одной компоненты связности, если L незамкнута, и из двух, если L — замкнута.

Пусть $S^2\subset\mathbb{R}^3$ — единичная сфера с центром в начале координат O.

⊛ **Определение 5.2.** Каждая окружность, получающаяся при пересечении сферы S^2 и плоскости, проходящей через O, называется *сферической прямой*. Каждая пара точек A, B на сферической прямой делит ее на две части, которые, вместе с точками A и B, называются *сферическими отрезками, соединяющими* A *и* B. *Сферическая ломаная* — это конечная последовательность $A_0,s_1,A_1,s_2,\dots,A_n$, где A_i — точка на сфере S^2, называемая *вершиной ломаной*, а s_i — сферический отрезок, соединяющий A_{i-1} и A_i, называемый *ребром ломаной*. *Замкнутость*, *незамкнутость* и свойство быть ломаной *без самопересечения* определяются точно так же, как и в случае ломаных в $\mathbb{R}^n$. Каждую сферическую ломаную Γ без самопересечений будем отождествлять с объединением ее ребер и писать $\Gamma\subset S^2$. Кроме того, каждую сферическую ломаную можно представить как образ непрерывной кривой, которая последовательно проходит по сферическим отрезкам, составляющим эту ломаную.

★ **Лемма 5.3.** *Пусть* $\Gamma\subset S^2$ *— сферическая ломаная без самопересечений, тогда* $S^2\setminus\Gamma$ *линейно связно, если ломаная* Γ *незамкнута, и состоит из двух компонент, если* Γ *— замкнута.*

Доказательство. Так как конечное число сферических прямых, в частности, сферических отрезков, не покрывает всю сферу (доказывается непосредственно вытекает из леммы 4.1), то существует $N\in S^2\setminus\Gamma$. Так как каждый сферический отрезок компактен (проверьте), то и каждая сферическая ломаная является компактом, поэтому $\rho\big(\Gamma,\{N\}\big)>0$ и, значит, существует $r>0$ такое, что $B_r(N)\subset\mathbb{R}^3$ не пересекает Γ. Положим $K=B_r(N)\cap S^2$. Так как сферический круг K не пересекает Γ и является линейно связным (убедитесь в этом), точка N и все точки из $K\setminus\{N\}$ лежат в одной и той же компоненте множества $S^2\setminus\Gamma$. Обозначим эту компоненту через Ω.

Возьмем произвольные точки P и Q из Ω, и пусть γ — непрерывная кривая в Ω, соединяющая P и Q. Если γ не проходит через N, то γ также является непрерывной кривой в $\Omega\setminus\{N\}$, соединяющей P и Q. Если же γ проходит через N, то обозначим через A первую точку входа этой кривой в $B_r(N)$, а через B — последнюю точку выхода кривой γ из $B_r(N)$. Точки A и B лежат на окружности $S:=S_r(N)\cap S^2$. Перестроим кривую γ, заменив ее фрагмент между точками A и B на любую из двух дуг окружности S, лежащих между этими точками. Полученная кривая содержится в $\Omega\setminus\{N\}$ и соединяет точки P и Q. Таким образом, множество $\Omega\setminus\{N\}$ линейно связно и, значит, S^2 и $S^2\setminus\{N\}$ имеют одинаковое число компонент.

По пункту (3) упражнения 2.10, $S^2\setminus\{N\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$. Обозначим через ν соответствующий гомеоморфизм (в качестве которого можно взять стереографическую проекцию ν из точки N на плоскость, перпендикулярную ON и проходящую через O). Тогда кривая Γ перейдет в кривую без самопересечений, которая замкнута или незамкнута одновременно с кривой Γ. Осталось применить теорему Жордана. □

▶ **Замечание 5.4.** Если в качестве ν в доказательстве леммы 5.3 взять стереографическую проекцию, то сферическая ломаная Γ перейдет в кривую на плоскости $\mathbb{R}^2$, составленную из дуг окружностей и прямолинейных отрезков (можно показать, что стереографическая проекция ν переводит сферические прямые, не проходящие через N, в окружности, а проходящие через N — в евклидовы прямые). Для таких аналогов ломаных можно провести доказательство теоремы Жордана подобно тому, как было проделано в лекции для плоских ломаных.

⊛ **Определение 5.5.** Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W, а Ω_1 и Ω_2 — компоненты множества $\partial W \setminus L$. Тогда множества $M_i = L \cup \Omega_i$ называются *многоугольниками на* ∂W. Для многоугольника M_i точки из Ω_i называются *внутренними*, из Ω_j — *внешними*, а из L — *граничными*, где $\{i,j\} = \{1,2\}$. Положим $\operatorname{Int} M_i = \Omega_i$, $\operatorname{Out} M_i = \Omega_j$ и $\partial M_i = L$.

⊛ **Определение 5.6.** Пусть X — многоугольник на поверхности ∂W выпуклого многогранника W, а P — некоторая вершина многоугольника X. Тогда *угол* α_P *многоугольника* X *в вершине* P определяется так. Если P лежит внутри грани, то α_P — это угол на плоскости, содержащей эту грань. Если же P попала или на ребро, или в вершину из ∂W, то угол в этой вершине складывается из всех углов многоугольников, полученных пересечением X и содержащих эту вершину граней (конечно, углы рассматриваются в этой вершине).

Упражнение 5.5. Рассмотрим n-угольник X, лежащий на границе выпуклого многогранника. Докажите, что его сумма углов равна $\pi(n-2)$ плюс сумма кривизн $K(P)$ по всем вершинам многогранника, попавшим внутрь X.

Упражнение 5.6. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Минковского для выпуклых многоугольников.

✠ **Соглашение 5.7.** На протяжении всего решения задачи 5.6, смежные ребра каждого плоского многоугольника всегда предполагаются не лежащими на одной прямой.

⊛ **Определение 5.8.** *Ежом плоского многоугоглъника* называется семейство внешних нормалей к его сторонам, причем длина нормали к данной стороне многоугольника равна длине этой стороны.

Ответ к упражнению 5.6. Конечный набор векторов на плоскости является ежом некоторого выпуклого плоского многоугольника, если и только если векторы этого набора:

(1) неколлинеарны;

(2) попарно не сонаправлены;

(3) в сумме дают ноль.

При этом выпуклый многоугольник, соответствующий каждому таком набору, единственен с точностью до сдвига.

Цель первого добавления — дать аккуратное определение ориентации ломаной, а также внешних (внутренних) нормалей к ребрам многоугольника и показать, как связаны эти понятия. Обычно этот материал используется в математическом анализе как наглядно-очевидный, так что приводимые ниже рассуждения написаны лишь для тех, кто хотел бы более глубоко разобраться в этих вещах.

Ориентации ломаных и внешние (внутренние) нормали многоугольников. Обсудим сначала важное понятие ориентации, связанное как с ломаными, так и с самим пространством.

Пусть $L = A_0 \cdots A_n$ — произвольная ломаная в $\mathbb{R}^n$. *Ориентировать ребро* $e_i = [A_{i-1}, A_i]$ ломаной L означает представить это ребро в виде вектора $A_{i-1}A_i$ или A_iA_{i-1}. Таким образом, каждое ребро ломаной можно ориентировать двумя способами. *Ориентировать ломаную* L означает задать *согласованную* ориентацию всех ее ребер, т.е. превратить все ребра ломаной или в векторы $A_{i-1}A_i$, $i = 1, \ldots, n$ (ориентация *от начала к концу*), или в противоположные векторы A_iA_{i-1}, $i = 1, \ldots, n$ (ориентация *от конца к началу*). Тем самым, ломаную можно также ориентировать двумя способами.

Далее, напомним, что *ориентацией векторного пространства* $\mathbb{R}^n$ называется семейство всех базисов, для каждой пары которых матрица перехода имеет положительный определитель. В линейной алгебре показывается, что при $n > 0$ всегда имеется ровно две ориентации; чтобы выбрать одну из них, достаточно указать произвольного представителя соответствующего класса базисов. Обычно ориентация стандартного базиса, составленного из векторов вида $(1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,1,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)$, называется *положительной*, а оставшаяся ориентация — *отрицательной*.

Рассмотрим теперь произвольный многоугольник $F \subset \mathbb{R}^2$, ограниченный ломаной $L = \partial F = A_0 \cdots A_{n-1}A_0$. *Для удобства изложения, мы подразумеваем, что сложение в индексах происходит по модулю* n, например $A_n = A_0$.

Рассмотрим произвольное ребро $e_i = [A_{i-1}, A_i]$ многоугольника F и любую внутреннюю точку $P \in (A_{i-1}, A_i)$ этого ребра. Так как $r_P := \rho\big(P, L \setminus (A_{i-1}, A_i)\big) > 0$, для каждого вектора $v \in \mathbb{R}^2$, не параллельного ребру e_i, и каждого $0 < \varepsilon < r_P/|v|$ полуинтервал $(P, P + \varepsilon v]$ не пересекает L, поэтому состоит целиком или из точек внутренности $\operatorname{Int} F$, или из точек внешности $\operatorname{Out} F$ многоугольника F. Ненулевой вектор $v \in \mathbb{R}^2$ назовем *внешним* по отношению к паре (e_i, P), где P — внутренняя точка ребра e_i многоугольника F, если для достаточно малых ε имеем $(P, P+\varepsilon v] \subset \operatorname{Out} F$, и *внутренним* по отношению к этой паре, если $(P, P+\varepsilon v] \subset \operatorname{Int} F$. Из определения мгновенно вытекает, что сонаправленные векторы, не параллельные e_i, являются одновременно внутренними или одновременно внешними по отношению к паре (e_i, P). Кроме того, если вектор v — внутренний (внешний) по отношению к (e_i, P), то $-v$ — внешний (внутренний) по отношению к этой паре (так как ребро e_i разбивает открытый круг U_P, определенный в лекции, на два открытых полукруга, один из которых лежит внутри F, а другой — снаружи).

Пусть $Q \in (A_{i-1}, A_i)$ — еще одна внутренняя точка ребра e_i, тогда $r_{[P,Q]} := \rho\big([P, Q], L \setminus (A_{i-1}, A_i)\big) > 0$, поэтому для ненулевого вектора v, не параллельного e_i, и любого $0 < \varepsilon < r_{[P,Q]}/|v|$ отрезок $[P + \varepsilon v, Q + \varepsilon v]$ также не пересекает L и, значит, все его точки или внутренние, или внешние по отношению к F. Отсюда мгновенно вытекает, что каждый вектор v, внешний (внутренний) по отношению к паре (e_i, P), является таким же и по отношению к паре (e_i, Q). Тем самым, мы разбили все векторы, не параллельные ребру e_i, на *внешние* и *внутренние по отношению ко всему ребру* e_i (точнее говоря, по отношению к внутренности этого ребра).

★ Лемма 5.9. *Векторы v и w, не параллельные ребру $e_i = [A_{i-1}, A_i]$ многоугольника F, являются одновременно внешними или одновременно внутренними по отношению к e_i, если и только если базисы $(v, A_{i-1}A_i)$ и $(w, A_{i-1}A_i)$ одинаково ориентированы.*

Доказательство. Выберем произвольную внутреннюю точку P ребра e_i. Обозначим через ℓ_i прямую, проходящую через e_i. Положим $R = P + v$, тогда $R \notin \ell_i$, так как v не параллелен e_i. Обозначим через ℓ прямую, проходящую через R в направлении w. Так как w не параллелен e_i, прямая ℓ пересекает ℓ_i в некоторой точке S. Применим к треугольнику PRS гомотетию с центром в P так, чтобы образ $PR'S'$ этого треугольника оказался в окрестности U_P, введенной на лекции. Тогда вектор PR' сонаправлен с v; вектор $S'R'$ коллинеарен w, так что для некоторого $\lambda \neq 0$ имеем $S'R' = \lambda w$; векторы PR' и $S'R'$, а вместе с ними и векторы v и λw, одновременно относятся к внутренности или внешности. Так как $S'R' = PR' - PS'$ и вектор PS' коллинеарен $A_{i-1}A_i$, то базисы $(v, A_{i-1}A_i)$, $(PR', A_{i-1}A_i)$, $(S'R', A_{i-1}A_i)$ и $(\lambda w, A_{i-1}A_i)$ одинаково ориентированы. Таким образом, свойство векторов v и w одновременно быть внутренними или внешними, равносильно тому, что $\lambda > 0$, а последнее равносильно одинаковой ориентированности базисов $(v, A_{i-1}A_i)$ и $(w, A_{i-1}A_i)$. □

Далее, определим понятие внутренних и внешних векторов в вершине A_i многоугольника F. Положим $L_i = L \setminus \big((A_{i-1}, A_i] \cup [A_i, A_{i+1})\big)$ и $r_i = \rho(A_i, L_i) > 0$. Рассмотрим произвольную прямую ℓ, проходящую через A_i и такую, что вершины A_{i-1} и A_{i+1} лежат в разных открытых полуплоскостях относительно ℓ. Пусть v — ненулевой вектор, параллельный ℓ и такой, что $|v| < r_i$. Тогда полуинтервал $(A_i, A_i + v]$ не пересекает L и, значит, целиком лежит или в $\operatorname{Int} F$, или в $\operatorname{Out} F$. Последнее позволяет разделить все такие векторы v на *внешние и внутренние по отношению к A_i*.

Пусть P — внутренняя точка ребра e_i, а $r_{[A_i,P]} = \rho\big([A_i, P], L_i\big)$. Пусть v — ненулевой вектор, параллельный ℓ и такой, что $|v| < r_{[A_i,P]}$. Тогда отрезок $[A_i + v, P + v]$ не пересекает L и, поэтому, целиком лежит или в $\operatorname{Int} F$, или в $\operatorname{Out} F$. Отсюда вытекает, что вектор v, внутренний (внешний) по отношению к A_i, является таким же и по отношению к e_i (аналогично, по отношению к e_{i+1}). Так как A_{i-1} и A_{i+1} лежат в разных открытых полуплоскостях относительно ℓ, реперы (v, A_iA_{i-1}) и (v, A_iA_{i+1}) имеют противоположную ориентацию, так что реперы $(v, A_{i-1}A_i)$ и (v, A_iA_{i+1}) ориентированы одинаково. Применяя лемму 5.9, приходим к следующему заключению.

★ Лемма 5.10. *Векторы v и w являются одновременно внешними (внутренними) по отношению к ребрам e_i и e_j соответственно, если и только если ориентации реперов $(v, A_{i-1}A_i)$ и $(w, A_{j-1}A_j)$ одинаковы. В частности, если каждый вектор $A_{i-1}A_i$ повернуть на один и тот же угол, не кратный π, то все полученные векторы будут одновременно или внутренними, или внешними по отношению к ребрам, из которых они получились.*

⊛ Определение 5.11. Семейство векторов ν_i, $i = 1, \ldots, n$, называется семейством *внешних* (*внутренних*) *нормалей* для многоугольника F, если при каждом i вектор ν_i перпендикулярен $A_{i-1}A_i$ и является внешним (внутренним) по отношению к ребру e_i.

► **Замечание 5.12.** Лемма 5.10 неявно используется в математическом анализе для задания *канонической* (положительной) ориентации ломаной: выбирается семейство внешних нормалей ν_i к ребрам e_i, а затем ребра ориентируются так, чтобы базисы $(\nu_i, \vec{e}_i)$ имели положительную ориентацию (здесь через $\vec{e}_i$ мы обозначили ориентированное ребро e_i). При этом считается очевидным, что полученные ориентации всех ребер ломаной согласованы между собой и, значит, порождают ориентацию ломаной.

Свойства ежа произвольного многоугольника.

★ **Следствие 5.13.** *Еж $\{\xi_i\}$ произвольного плоского многоугольника F удовлетворяет свойствам* (1) *и* (3) *из ответа к упражнению* 5.6.

Доказательство. Пусть $\partial F = A_0 \cdots A_{n-1}A_0$. Ориентируем ломаную ∂F от начала к концу, и пусть $\vec{e}_i = A_{i-1}A_i$ обозначают ориентированные ребра этой ломаной. Без ограничения общности, будем считать, что эта ориентация каноническая в смысле замечания 5.12 (иначе перенумеруем вершины ломаной в обратном порядке и повторим рассуждения).

Если бы векторы ξ_i были коллинеарны, то и все векторы $\vec{e}_i$ были бы такими же, так что все вершины $A_i = A_1 + \vec{e}_1 + \ldots + \vec{e}_{i-1}$ лежали бы на одной прямой ℓ. Будем рассматривать ℓ как координатную прямую, и пусть A_k имеет на ℓ максимальную координату среди оставшихся A_i. Тогда точки A_{k-1} и A_{k+1} имеют меньшие координаты чем у A_k, поэтому ребра $[A_{k-1}, A_k]$ и $[A_k, A_{k+1}]$ пересекаются по целому невырожденному отрезку, противоречие с тем, что ломаная, ограничивающая многоугольник, не должна иметь самопересечений. Тем самым, доказан пункт (1).

Далее, по лемме 5.10 и замечанию 5.12, векторы ξ_i получаются из векторов $\vec{e}_i$ поворотом на $-\pi/2$. Но $A_0 = A_0 + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n$, поэтому $\sum_i \vec{e}_i = 0$ и, следовательно, $\sum_i \xi_i = 0$ (так как поворот — линейное преобразование). Тем самым, доказан пункт (3). □

Вернемся к выпуклому многоугольнику $F \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $\partial F = A_0 \cdots A_{n-1}A_0$, $e_i = [A_{i-1}, A_i]$, сложение в индексах происходит по модулю n, а ℓ_i — прямая, содержащая e_i.

Свойства (1) и (3) мы уже доказали в следствии 5.13. Чтобы доказать свойство (2), сформулируем аналоги утверждения и следствия из лекции (их доказательства точно такие же).

★ **Лемма 5.14.** *В сделанных выше обозначениях,*

(1) *многоугольник F равен пересечению полуплоскостей π_i, ограниченных прямыми ℓ_i;*

(2) *при каждом i имеем $e_i = F \cap \ell_i$.*

Обозначим через $\pi_i' \subset \pi_i$ открытую полуплоскость $\pi_i \setminus \ell_i$.

★ **Следствие 5.15.** *В сделанных выше обозначениях,*

(1) *для каждого i имеем $\{A_i\} = \ell_i \cap \ell_{i+1}$ и $A_i \in \pi_j'$ при всех $j \notin \{i, i+1\}$;*

(2) *для каждой внутренней точки P ребра e_i имеем $P \in \ell_i$ и $P \in \pi_j'$ при всех $j \ne i$;*

(3) *для каждой внутренней точки P многоугольника F имеем $P \in \pi_i'$ при всех i.*

★ **Лемма 5.16.** *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — векторы ежа выпуклого многоугольника F, занумерованные в соответствии с последовательной нумерацией ребер F. Будем рассматривать единичные векторы $n_i = \xi_i/|\xi_i|$ как точки на стандартной единичной окружности S^1 с центром в начале координат. Тогда точки n_i расположены на S^1 последовательно, т.е. если в направлении вектора n_1 выпустить ось абсцисс декартовой системы, а ось ординат пустить в таком направлении, чтобы ордината точки n_2 была положительна, и после этого записать векторы n_i в виде $n_i = (\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$, $0 \le \varphi_i < 2\pi$, то числа $\varphi_1 = 0, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ будут последовательными точками на полуинтервале $[0, 2\pi)$.*

Доказательство. Ориентируем ломаную $\partial F = A_0 \cdots A_{n-1}A_0$ канонически (замечание 5.12), при этом дополнительно будем считать, что эта ориентация — от начала ломаной к ее концу (в противном случае перенумеруем вершины). Тогда $\vec{e}_i = A_{i-1}A_i$ обозначают так ориентированные ребра ломаной ∂F. Так как векторы $\vec{e}_i$ получаются из векторов ξ_i поворотом на $\pi/2$, нам достаточно проделать те же самые построения, заменив n_i на $\vec{e}_i$.

Итак, будем теперь считать, что $\vec{e}_i = (\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$, причем $\vec{e}_1$ направлен вдоль оси абсцисс, а ордината вектора $\vec{e}_2$ положительна. Так как вершина A_{i+1} лежит в открытой полуплоскости π_i', а вектор ξ_i направлен в противоположную полуплоскость, ориентация базиса $(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1})$ противоположна ориентации базиса $(\vec{e}_i, \xi_i)$, и, значит, положительна, поэтому $\delta_i := \varphi_{i+1} - \varphi_i > 0$. Кроме того, если α_i обозначает угол многоугольника F при вершине A_i, то $\delta_i = \pi - \alpha_i$, откуда $\sum_i \delta_i = \pi n - \sum_i \alpha_i = 2\pi$, так что все φ_i лежат на полуинтервале $[0, 2\pi)$ и образуют монотонную последовательность. □

★ Лемма 5.17. *Пусть $v_1, \dots, v_n$ — множество ненулевых попарно не сонаправленных векторов на плоскости $\mathbb{R}^2$ таких, что $\sum_i v_i = 0$. Предположим дополнительно, что точки $v_i/|v_i|$ на стандартной окружности S^1 расположены последовательно. Тогда для любого натурального $k < n-1$, любого целого i и любых $\lambda, \mu \in (0,1]$ имеем $\lambda v_i + v_{i+1} + \dots + v_{i+k-1} + \mu v_{i+k} \neq 0$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существует описанное в лемме семейство $v_1, \dots, v_n$, для которого $\lambda v_i + v_{i+1} + \dots + v_{i+k-1} + \mu v_{i+k} = 0$. Тогда также $(1-\mu)v_{i+k} + v_{i+k+1} + \dots + v_{i+n-1} + (1-\lambda)v_{i+n} = 0$. Так как $k < n-1$ и k — натуральное, то $n \geq 3$ и $v_{i+k+1} \neq v_i$. Обозначим через α ту дугу окружности S^1 между точками $v_i/|v_i|$ и $v_{i+k}/|v_{i+k}|$, которая не содержит $v_{i+k+1}/|v_{i+k+1}|$. Тогда α не может быть меньше π, так как иначе все векторы $v_i, \dots, v_{i+k}$ будут составлять с вектором $v_i + v_{i+k}$ углы меньше $\pi/2$, поэтому будут иметь положительную проекцию на него и, значит, $\lambda v_i + v_{i+1} + \dots + v_{i+k-1} + \mu v_{i+k} \neq 0$. Аналогично показывается, что дуга α не может быть больше π. Осталось рассмотреть случай $\alpha = \pi$. Но тогда у всех векторов непустого семейства $\{v_j\}_{j=i+k+1}^{i+n-1}$ будет ненулевая проекция одного и того же знака на ненулевой вектор, перпендикулярный v_{i+k}, откуда $(1-\mu)v_{i+k} + v_{i+k+1} + \dots + v_{i+n-1} + (1-\lambda)v_{i+n} \neq 0$. □

Упражнение 5.7. Существует ли тетраэдр с гранями $F_1, \dots, F_4$ такой, что площадь каждой F_i равна 1, грани F_1 и F_2 перпендикулярны друг другу, грани F_3 и F_4 также перпендикулярны друг другу, а угол между ребром $e_{12} = F_1 \cap F_2$ и $e_{34} = F_3 \cap F_4$ равен $37°$? Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Упражнение 5.8. Докажите, что выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади. Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

⊛ Определение 5.18. Для непустого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ его *выпуклой оболочкой* $\operatorname{conv} X$ называется наименьшее выпуклое множество, содержащее X. Эквивалентное определение: $\operatorname{conv} X$ — это пересечение всех выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащих X.

Упражнение 5.9. Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.