Дополнения к семинару 4

Приложения теоремы Жордана. Плоские графы

Упражнение 4.1.

(1) Докажите, что любой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — ломаные.

(2) Докажите, что простой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — прямолинейные отрезки.

Для доказательства пункта (2) нам понадобится следующий результат.

★ **Лемма 4.1.** *Пусть* $\Pi_1, \dots, \Pi_k$ *— плоскости в* $\mathbb{R}^3$*. Тогда существует точка* $x \in \mathbb{R}^3$ *такая, что* $x \notin \cup_{i=1}^k \Pi_i$*.*

Доказательство. Приведем несколько решений.

(1) Рассмотрим все плоскости, параллельные Π_1. Этих плоскостей столько же, сколько вещественных чисел (их можно перечислить точками пересечения с какой-нибудь прямой, перпендикулярной Π_1). Так как вещественных чисел бесконечно много, в этом семействе существует плоскость Π, отличная от всех Π_i. Каждая плоскость Π_i, не параллельная Π, пересекает Π по некоторой прямой ℓ_i. Таких прямых — конечное число. Снова заметим, что имеется бесконечно много прямых, параллельных данной прямой ℓ_i, поэтому среди них есть прямая ℓ, отличная от всех ℓ_j. Каждая прямая ℓ_j, не параллельная ℓ, пересекает ее по одной точке. Так как на прямой существует бесконечное число точек, одна из них не является точкой пересечения с прямыми ℓ_j. Ясно, что эта точка не принадлежит ни одной плоскости Π_i.

(2) Обозначим через n_i любую из двух единичных нормалей к Π_i. Выберем произвольную точку $x_1 \in \Pi_1$ и положим $x_2 = x_1 + n_1$. Заметим, что $\rho(x_2, \Pi_1) = 1$.

Если $x_2 \notin \cup_{i=2}^k \Pi_i$, то x_2 — искомая точка x. Иначе x_2 лежит на некоторой Π_i. Без ограничения общности будем считать, что $i = 2$, тогда положим $x_3 = x_2 + n_2/2$. Заметим, что $\rho(x_3, \Pi_2) = 1/2$ и $\rho(x_3, \Pi_1) \geq 1/2$, так что $x_3 \notin \Pi_1 \cup \Pi_2$.

Снова, если $x_3 \notin \cup_{i=3}^k \Pi_i$, то можно положить $x = x_3$. Иначе, без ограничения общности, предположим, что $x_3 \in \Pi_3$, и пусть $x_4 = x_3 + n_3/2^2$. Имеем $\rho(x_4, \Pi_i) \geq 1/2^2$ для всех $i = 1, 2, 3$, так что $x_4 \notin \cup_{i=1}^3 \Pi_i$. Теперь ясно, как построить искомую точку x для всех плоскостей (опишите аккуратный индуктивный переход). □

▶ **Замечание 4.2.** Используя определитель Вандермонда, легко показать, что любые n точек на кривой $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ в $\mathbb{R}^3$ образуют множество общего положения (сделайте это).

▶ **Замечание 4.3.** Понятие множества общего положения легко обобщается на случай точек в пространстве $\mathbb{R}^n$. Также на этот случай почти дословно переносится лемма 4.1, ее доказательство и замечание 4.2. Убедитесь в справедливости сказанного.

Во всех приводимых ниже упражнениях, кроме 4.8, мы предполагаем, что ребра плоских графов — ломаные, хотя утверждения остаются справедливыми и в общем случае.

Упражнение 4.2. Используя формулу Эйлера, покажите, что граф $K_{3,3}$ непланарный.

Упражнение 4.3. Не используя формулу Эйлера, выведите из леммы 4.2 лекции 4, что граф K_5 непланарный.

Упражнение 4.4. Пусть G — плоский связный простой граф, имеющий v вершин, e ребер и f граней.

(1) Используя формулу Эйлера, покажите, что при $v \geq 3$ выполняется $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$.

(2) Покажите, что G содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

Упражнение 4.5. Пусть G — плоский связный простой граф. Покажите, что G не может состоять из 10 вершин, степень каждой из которых равна 5.

Упражнение 4.6. Опишите все плоские связные простые графы, вершины которых имеют одну и ту же степень $d \geq 3$, каждая грань ограничена одним и тем же числом $k \geq 3$ ребер и каждое ребро лежит ровно в двух гранях (найдите количества вершин, ребер, граней этих графов и приведите соответствующие примеры).

▶ **Замечание 4.4.** Упражнение 4.6 становится намного более сложным, если отказаться от условия простоты графа, а также от ограничений $d \geq 3$ и $k \geq 3$. Кроме того, в качестве усложнения упражнения можно попросить описать всевозможные плоские реализации таких графов, в частности, выяснить, есть ли графы, отличные от графов платоновых тел.

⊛ **Определение 4.5.** Пусть G — простой граф. *Окружением* $\mathcal{N} = \mathcal{N}(v)$ *вершины* v графа G назовем следующий граф: его вершины — это все вершины из G, смежные с v; его ребра — все ребра графа G, соединяющие выбранные вершины.

⊛ **Определение 4.6.** Пусть $\mathcal{C} = \{\mathrm{Col}_i\}$ — некоторое множество, элементы которого будем называть *цветами*. Каждое отображение $\nu\colon V \to \mathcal{C}$ будем называть *раскраской графа* $G = (V, E, \partial)$ *цветами из множества* $\mathcal{C}$. При этом будем говорить, что *вершина* v *покрашена в цвет* $\nu(v)$. Раскраска ν называется *правильной*, если смежные вершины покрашены разными цветами.

Упражнение 4.7 (Теорема Хивуда о пяти красках)**.** Докажите, что для каждого плоского простого графа существует правильная раскраска 5 цветами.

Для решения упражнения 4.8, нам понадобится ряд понятий и результатов.

⊛ **Определение 4.7.** Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $r \geq 0$ положим $B_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |xy| \leq r\big\}$ и $S_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |xy| = r\big\}$. Множество $B_r(x)$ называется *замкнутым шаром с центром в* x *и радиусом* r, а множество $S_r(x)$ — *сферой с центром в* x *и радиусом* r.

★ **Лемма 4.8.** *Пусть $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $P \neq Q$, соединены непрерывной кривой $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $P = \gamma(a)$, $Q = \gamma(b)$. Тогда для $0 < r < |PQ|$ существует $t_0 \in (a, b)$ такое, что $\gamma(t_0) \in S_r(Q)$ и $\gamma\big([a, t_0)\big) \cap B_r(Q) = \emptyset$.*

Доказательство. Положим $t_0 = \sup\Big\{t \in [a, b] : \gamma\big([a, t)\big) \cap B_r(Q) = \emptyset\Big\}$. Так как функция $f(t) = \big|Q\gamma(t)\big|$ непрерывна как композиция непрерывных функций и $\big|Q\gamma(a)\big| = |QP| > r$, то $t_0 > a$. Аналогично получаем $t_0 < b$. Осталось показать, что $\gamma(t_0) \in S_r(Q)$. Если $\gamma(t_0) \notin B_r(Q)$, то, в силу непрерывности функции f, для t, близких к t_0, также $\gamma(t) \notin B_r(Q)$, что противоречит выбору t_0. Аналогично разбирается случай $\gamma(t_0) \in U_r(Q)$. □

⊛ **Определение 4.9.** Точки t_0 и $\gamma(t_0)$ из леммы 4.8 будем называть *точками первого входа кривой* γ *в круг* $B_r(Q)$. Аналогично определяется *точка первого выхода кривой* γ *из круга* $B_r(P)$.

▶ **Замечание 4.10.** Если ориентировать кривую $\gamma(t)$ в обратную сторону, т.е. заменить параметр t на $s = -t$, то точка первого входа в круг $B_r(Q)$ для новой кривой станет *точкой последнего выхода из* $B_r(Q)$, а точка первого выхода из круга $B_r(P)$ — *точкой последнего входа в круг* $B_r(P)$.

Схожая ситуация возникает, когда рассматривается точка A, отличная от P и Q, а также круг $B_r(A)$, не содержащий ни P, ни Q, но пересекающийся с кривой γ. В этом случае тоже определены *первая точка входа в* $B_r(A)$ и *последняя точка выхода из* $B_r(A)$. Обе эти точки лежат на $S_r(A)$, а кривая γ до первой из них и после второй не пересекает $B_r(A)$.

Одно из приложений описанной конструкции состоит в замене фрагмента кривой γ между такими точками на “хорошо устроенную кривую”, также соединяющую эти точки и лежащую в $B_r(A)$, скажем, на сегмент или на пару радиусов круга. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться этой перестройкой.

Отметим, что все сказанное выше в этом замечании переносится и на другие достаточно хорошо устроенные пространства, например, на евклидову сферу, где также определены круговые окрестности, и эти окрестности являются линейно связными.

Упражнение 4.8. Докажите, что каждый планарный граф имеет реализацию в виде плоского графа, ребра которого — ломаные.

★ Лемма 4.11. *Пусть G — граф, $v \neq w$ — его вершины, и $v = v_1e_1v_2e_2\cdots e_mv_m = w$ — маршрут, соединяющий v и w. Тогда существует путь, содержащийся в этом маршруте и соединяющий v и w.*

Доказательство. Начав с v, будем двигаться по маршруту до первой вершины A, которую мы уже проходили (*точка самопересечения*). Перестроим этот маршрут, выбросив из пройденного фрагмента все ребра после первой встречи вершины A. В результате снова получим маршрут. Продолжим движение по перестроенному маршруту до следующей точки самопересечения и вновь выкинем из пройденного фрагмента перестроенного маршрута все ребра после первой встречи этой точки. В результате мы избавимся от всех самопересечений и, значит, получим путь. □

★ Лемма 4.12. *Пусть G — граф, $v = v_1e_1v_2e_2\cdots e_mv_m = v$ — циклический маршрут, причем $v_2 \neq v_{m-1}$ и ни одна внутренняя вершина маршрута не совпадает с v. Тогда существует простой цикл, содержащийся в этом маршруте и содержащий v.*

Доказательство. Снова, начав с v, будем двигаться по маршруту до первой вершины, которую мы уже проходили, и перестраивать этот маршрут, выбрасывая из него все ребра пройденного фрагмента после первой встречи этой вершины. В результате мы или выкинем все, оставив одну вершину v, или же получим простой цикл. Выкинуть все мы могли лишь в том случае, когда на последнем шаге мы уничтожили выходящее из $v = w$ ребро. Однако ребро v_1v_2 на предыдущих шагах не может быть выкинуто, так как, по предположению, ни одна внутренняя вершина маршрута не совпадает с v. На последнем шаге это ребро также не уничтожается, так как мы потребовали, чтобы $v_2 \neq v_{m-1}$. Таким образом, остается одна возможность — простой цикл. □