Дополнения к семинару 3

Теорема Жордана

Упражнение 3.1.

(1) Приведите пример непересекающихся подмножеств на прямой, расстояние между которыми равно нулю.

(2) Приведите пример непересекающихся замкнутых подмножеств прямой, расстояние между которыми равно нулю.

(3) Существуют ли два замкнутых непересекающихся подмножества окружности, находящиеся на нулевом расстоянии?

★ **Лемма 3.1.** *Пусть X — произвольное топологическое пространство и $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, тогда множество $\{f = c\} \subset X$ замкнуто в X.*

Доказательство. Так как $\{f = c\} = f^{-1}(c)$, а одноточечное множество $\{c\} \subset \mathbb{R}$ замкнуто, то требуемое утверждение вытекает из леммы 2.4. □

⊛ **Определение 3.2.** Пусть X, Y — топологические пространства. *Топология декартова произведения* $X \times Y$ определяется так: множество $W \subset X \times Y$ открыто, если и только если для каждой точки $(x, y) \in W$ существуют окрестности $U^x \subset X$ и $V^y \subset Y$ такие, что $U^x \times V^y \subset W$. Иными словами, “кирпичи” $U \times V$, где U открыто в X, а V открыто в Y, образуют базу топологии декартова произведения, так что каждое открытое подмножество $X \times Y$ является объединение некоторого числа таких “кирпичей”.

▶ **Замечание 3.1.** Стандартная топология на $\mathbb{R}^2$ является топологией декартова произведения прямой $\mathbb{R}$ на себя; стандартная топология $\mathbb{R}^n$ — это декартова топология $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ или, более общо, декартова топология $\mathbb{R}^k \times R^{n-k}$ (проверьте).

★ **Лемма 3.3.** *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые компакты. Тогда $A \times B \subset \mathbb{R}^{2n}$ — компакт.*

Доказательство. Действительно, множество $A \times B$ является замкнутым множеством $\mathbb{R}^{2n}$: для любой точки $(x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus (A \times B)$ или $x \notin A$, или $x \notin B$; без ограничения общности предположим, что $x \notin A$, тогда, в силу замкнутости A, существует $U^x \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $U^x \cap A = \emptyset$; но тогда множество $U^x \times \mathbb{R}^n$, открытое в $\mathbb{R}^{2n}$, не пересекает $A \times B$, так что дополнение к $A \times B$ открыто. То, что множество $A \times B$ ограничено — очевидно. Осталось воспользоваться критерием компактности подмножеств евклидова пространства. □

★ **Лемма 3.4.** *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые непересекающиеся компакты. Тогда $\rho(A, B) > 0$.*

Доказательство. Действительно, функция $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto |xy|$ непрерывна как композиция непрерывных функций. Ее ограничение g на $A \times B$ также непрерывно по лемме 2.1. Но так как $A \cap B = \emptyset$, то $g > 0$. Из леммы 3.3 вытекает, что $A \times B$ — компакт, поэтому g достигает своего минимума m, но этот минимум положителен и, значит, $\rho(A, B) = m > 0$. □

Упражнение 3.2. Пусть A — некоторое подмножество плоскости. Рассмотрим функцию $f(x) = \inf\bigl\{|xy| : y \in A\bigr\}$ (расстояние от x до A). Докажите, что f непрерывна.

Для решение упражнения 3.2 можно воспользоваться следующими определением и леммой.

⊛ **Определение 3.5.** Функция $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *липшицевой*, если существует число L такое, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется $\bigl|g(x) - g(y)\bigr| \le L|xy|$.

★ **Лемма 3.6.** *Всякая липшицева функция g непрерывна.*

Доказательство. Если $L = 0$, то функция f постоянна и, значит, непрерывна. Пусть теперь $L > 0$. Проверим непрерывность в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольную симметричную окрестность $\bigl(g(x) - \varepsilon, g(x) + \varepsilon\bigr)$, тогда все точки из $U_{\varepsilon/L}(x)$ переводятся функцией g в эту окрестность. Действительно, в силу липшицевости отображения g, для каждого $y \in U_{\varepsilon/L}(x)$ имеем $\bigl|g(x) - g(y)\bigr| \le L|xy| < L\,(\varepsilon/L) = \varepsilon$. Непрерывность доказана. □

▶ **Замечание 3.2.** В предыдущей задаче вместо плоскости можно рассмотреть $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 3.3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, заданные на топологическом пространстве X. Докажите, что функция $h(x) = \max\bigl\{f(x), g(x)\bigr\}$ также непрерывна.

Упражнение 3.4. Докажите, не используя теорему Жордана, что квадрат (стороны квадрата) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.5. Докажите, не используя теорему Жордана, что треугольник (замкнутая трехзвенная ломаная) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.6. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая ломаная без самопересечений такая, что для каждого ее ребра ломаная L лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через это ребро (такие ломаные иногда называют *выпуклыми*). Не используя теорему Жордана, докажите, что L разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.7. Докажите, что открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ линейно связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить ломаной.

В решении упражнения 3.7 можно было бы использовать следующий общий факт.

★ **Лемма 3.7.** *Не существует непустых открытых подмножеств U и V отрезка $[a, b]$ таких, что $U \cap V = \emptyset$ и $U \cup V = [a, b]$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть, без ограничения общности, $a \in U$. Положим $t_0 = \sup\bigl\{t \in [a, b] : [a, t] \subset U\bigr\}$ и покажем, что t_0 не может принадлежать ни U, ни V, а это противоречит определению t_0. Так как U открыто, то для некоторого $a < c \le b$ имеем $[a, c) \subset U$, поэтому $t_0 > a$. Кроме того, из определения t_0 вытекает, что $[a, t_0) \subset U$, поэтому если $t_0 = b$, то $V = \{b\}$, так что V не открыто, противоречие, откуда $t_0 < b$. Если $t_0 \in U$, то, в силу открытости U и того, что $a < t_0 < b$, существует $\varepsilon > 0$, для которого $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset U$, однако последнее противоречит определению t_0. Аналогично разбирается случай $t_0 \in V$. □

▶ **Замечание 3.3.** Упражнение 3.7 естественно обобщается до следующего утверждения: *для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой непрерывной кривой γ, лежащей в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ и соединяющей точки $P, Q \in U$, существует ломаная $L \subset U \cap U_\varepsilon(\gamma)$, соединяющая те же точки P и Q.*

⊛ **Определение 3.8.** Для произвольного непустого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного $\varepsilon > 0$ множество $U_\varepsilon(X) = \cup_{x \in X} U_\varepsilon(x)$ будем называть *ε-окрестностью множества X*.

Упражнение 3.8. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — незамкнутая ломаная без самопересечений. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-окрестность $U_\varepsilon(L)$ ломаной L. Пусть P и Q — произвольные точки из $U_\varepsilon(L) \setminus L$. Покажите, что их можно соединить ломаной, не пересекающей L и лежащей в $U_\varepsilon(L)$.

Упражнение 3.9. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием трех различных его радиусов. Докажите, что X состоит из трех компонент.

Упражнение 3.10. Пусть OA, OB и OC — три отрезка, причем любые два из них имеют только одну общую точку O. Докажите, что объединение этих отрезков не разбивает плоскость, т.е. что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (OA \cup OB \cup OC)$ линейно связно.

Упражнение 3.11. Пусть L_1 и L_2 — незамкнутые ломаные без самопересечений, лежащие на плоскости $\mathbb{R}^2$ и не имеющие общих точек. Докажите, что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$ линейно связно.

Упражнение 3.12. Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1],\ [A_2, B_2], \ldots, [A_m, B_m]$$

отрезков $[A_i, B_i] \subset \mathbb{R}^2$ (некоторые отрезки могут быть вырожденными) и положим $X_k = \cup_{i=1}^{k} [A_i, B_i]$. Предположим, что для каждого $k = 2, \ldots, m$ выполняется или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$, или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$. Докажите, что любые две точки из каждого множества $\Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus X_k$ можно соединить ломаной, лежащей в Ω_k. В частности, каждое множество Ω_k — линейно связно.