

# Дополнения к семинару 3

## Теорема Жордана

### Упражнение 3.1.

- (1) Приведите пример непересекающихся подмножеств на прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (2) Приведите пример непересекающихся замкнутых подмножеств прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (3) Существуют ли два замкнутых непересекающихся подмножества окружности, находящиеся на нулевом расстоянии?

★ **Лемма 3.1.** Пусть  $X$  — произвольное топологическое пространство и  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, тогда множество  $\{f = c\} \subset X$  замкнуто в  $X$ .

*Доказательство.* Так как  $\{f = c\} = f^{-1}(c)$ , а одноточечное множество  $\{c\} \subset \mathbb{R}$  замкнуто, то требуемое утверждение вытекает из леммы 2.4.  $\square$

⊛ **Определение 3.2.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства. Топология декартова произведения  $X \times Y$  определяется так: множество  $W \subset X \times Y$  открыто, если и только если для каждой точки  $(x, y) \in W$  существуют окрестности  $U^x \subset X$  и  $V^y \subset Y$  такие, что  $U^x \times V^y \subset W$ . Иными словами, “кирпичи”  $U \times V$ , где  $U$  открыто в  $X$ , а  $V$  открыто в  $Y$ , образуют базу топологии декартова произведения, так что каждое открытое подмножество  $X \times Y$  является объединение некоторого числа таких “кирпичей”.

▶ **Замечание 3.1.** Стандартная топология на  $\mathbb{R}^2$  является топологией декартова произведения прямой  $\mathbb{R}$  на себя; стандартная топология  $\mathbb{R}^n$  — это декартова топология  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  или, более общо, декартова топология  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  (проверьте).

★ **Лемма 3.3.** Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  — непустые компакты. Тогда  $A \times B \subset \mathbb{R}^{2n}$  — компакт.

*Доказательство.* Действительно, множество  $A \times B$  является замкнутым множеством  $\mathbb{R}^{2n}$ : для любой точки  $(x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus (A \times B)$  или  $x \notin A$ , или  $y \notin B$ ; без ограничения общности предположим, что  $x \notin A$ , тогда, в силу замкнутости  $A$ , существует  $U^x \subset \mathbb{R}^n$  такая, что  $U^x \cap A = \emptyset$ ; но тогда множество  $U^x \times \mathbb{R}^n$ , открытое в  $\mathbb{R}^{2n}$ , не пересекает  $A \times B$ , так что дополнение к  $A \times B$  открыто. То, что множество  $A \times B$  ограничено — очевидно. Осталось воспользоваться критерием компактности подмножеств евклидова пространства.  $\square$

★ **Лемма 3.4.** Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  — непустые непересекающиеся компакты. Тогда  $\rho(A, B) > 0$ .

*Доказательство.* Действительно, функция  $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, f: (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto |xy|$  непрерывна как композиция непрерывных функций. Ее ограничение  $g$  на  $A \times B$  также непрерывно по лемме 2.1. Но так как  $A \cap B = \emptyset$ , то  $g > 0$ . Из леммы 3.3 вытекает, что  $A \times B$  — компакт, поэтому  $g$  достигает своего минимума  $m$ , но этот минимум положителен и, значит,  $\rho(A, B) = m > 0$ .  $\square$

**Упражнение 3.2.** Пусть  $A$  — некоторое подмножество плоскости. Рассмотрим функцию  $f(x) = \inf\{|xy| : y \in A\}$  (расстояние от  $x$  до  $A$ ). Докажите, что  $f$  непрерывна.

▶ **Замечание 3.2.** В предыдущей задаче вместо плоскости можно рассмотреть  $\mathbb{R}^n$ .

**Упражнение 3.3.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — непрерывные функции, заданные на топологическом пространстве  $X$ . Докажите, что функция  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  также непрерывна.

**Упражнение 3.4.** Докажите, не используя теорему Жордана, что квадрат (стороны квадрата) разбивает плоскость на 2 компоненты.

**Упражнение 3.5.** Докажите, не используя теорему Жордана, что треугольник (замкнутая трехзвенная ломаная) разбивает плоскость на 2 компоненты.

**Упражнение 3.6.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — замкнутая ломаная без самопересечений такая, что для каждого ее ребра ломаная  $L$  лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через это ребро (такие ломаные иногда называют *выпуклыми*). Не используя теорему Жордана, докажите, что  $L$  разбивает плоскость на 2 компоненты.

**Упражнение 3.7.** Докажите, что открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$  линейно связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить ломаной.

В решении упражнения 3.7 можно было бы использовать следующий общий факт.

★ **Лемма 3.5.** Не существует непустых открытых подмножеств  $U$  и  $V$  отрезка  $[a, b]$  таких, что  $U \cap V = \emptyset$  и  $U \cup V = [a, b]$ .

*Доказательство.* Предположим противное, и пусть, без ограничения общности,  $a \in U$ . Положим  $t_0 = \sup\{t \in [a, b] : [a, t] \subset U\}$  и покажем, что  $t_0$  не может принадлежать ни  $U$ , ни  $V$ , а это противоречит определению  $t_0$ . Так как  $U$  открыто, то для некоторого  $a < c \leq b$  имеем  $[a, c] \subset U$ , поэтому  $t_0 > a$ . Кроме того, из определения  $t_0$  вытекает, что  $[a, t_0) \subset U$ , поэтому если  $t_0 = b$ , то  $V = \{b\}$ , так что  $V$  не открыто, противоречие, откуда  $t_0 < b$ . Если  $t_0 \in U$ , то, в силу открытости  $U$  и того, что  $a < t_0 < b$ , существует  $\varepsilon > 0$ , для которого  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset U$ , однако последнее противоречит определению  $t_0$ . Аналогично разбирается случай  $t_0 \in V$ .  $\square$

► **Замечание 3.3.** Упражнение 3.7 естественно обобщается до следующего утверждения: для каждого  $\varepsilon > 0$  и каждой непрерывной кривой  $\gamma$ , лежащей в открытом множестве  $U \subset \mathbb{R}^n$  и соединяющей точки  $P, Q \in U$ , существует ломаная  $L \subset U \cap U_\varepsilon(\gamma)$ , соединяющая те же точки  $P$  и  $Q$ .

⊗ **Определение 3.6.** Для произвольного непустого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  и произвольного  $\varepsilon > 0$  множество  $U_\varepsilon(X) = \cup_{x \in X} U_\varepsilon(x)$  будем называть  $\varepsilon$ -окрестностью множества  $X$ .

**Упражнение 3.8.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — незамкнутая ломаная без самопересечений. Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность  $U_\varepsilon(L)$  ломаной  $L$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — произвольные точки из  $U_\varepsilon(L) \setminus L$ . Покажите, что их можно соединить ломаной, не пересекающей  $L$  и лежащей в  $U_\varepsilon(L)$ .

**Упражнение 3.9.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из некоторого круга  $U_r(A)$  выбрасыванием трех различных его радиусов. Докажите, что  $X$  состоит из трех компонент.

**Упражнение 3.10.** Пусть  $OA, OB$  и  $OC$  — три отрезка, причем любые два из них имеют только одну общую точку  $O$ . Докажите, что объединение этих отрезков не разбивает плоскость, т.е. что  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (OA \cup OB \cup OC)$  линейно связно.

**Упражнение 3.11.** Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — незамкнутые ломаные без самопересечений, лежащие на плоскости  $\mathbb{R}^2$  и не имеющие общих точек. Докажите, что  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$  линейно связно.

**Упражнение 3.12.** Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_m, B_m]$$

отрезков  $[A_i, B_i] \subset \mathbb{R}^2$  и положим  $X_k = \cup_{i=1}^k [A_i, B_i]$ . Предположим, что для каждого  $k = 2, \dots, m$  выполняется или  $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$ , или  $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$ . Докажите, что любые две точки из каждого множества  $\Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus X_k$  можно соединить ломаной, лежащей в  $\Omega_k$ . В частности, каждое множество  $\Omega_k$  — линейно связно.