

# Дополнения к семинару 2

## ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

**Упражнение 2.1.** Рассмотрим множество  $\mathbb{R}$  и семейство его подмножеств  $\beta$ , состоящее из всевозможных лучей  $[a, +\infty)$ . Докажите, что

- (1) семейство  $\beta$  — база окрестностей;
- (2) функция  $f(x) = 2x$  непрерывна;
- (3) функция  $g(x) = -x$  непрерывной не является.

Здесь  $f$  и  $g$  рассматриваются как отображения из  $(\mathbb{R}, \beta)$  в  $(\mathbb{R}, \beta)$ .

**Упражнение 2.2.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Рассмотрим следующие семейства подмножеств  $X$ :

- (1)  $\beta_a = \{X\}$ ;
- (2)  $\beta_d$ , совпадающее с семейством всех одноточечных множеств;
- (3)  $\beta_z$ , состоящее всех множеств  $U$ , для которых  $X \setminus U$  — конечный набор точек.

Докажите, что каждое из этих семейств является базой окрестностей и опишите порожденные ими топологии  $\tau_a$ ,  $\tau_d$  и  $\tau_z$ . Семейство  $\tau_a$  называется *антидискретной топологией*, семейство  $\tau_d$  — *дискретной топологией*, а семейство  $\tau_z$  для бесконечного  $X$  — *топологией Зарисского*; для конечного  $X$  топология  $\tau_z$  совпадает с  $\tau_d$ .

**Упражнение 2.3.** Рассмотрим отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , заданное формулой  $f(x) = \sin x$ . Выясните, является ли  $f$  непрерывным, если мы рассматриваем на  $\mathbb{R}$  и  $[-1, 1]$  следующие топологии из задачи 2.2:

- (1)  $(\mathbb{R}, \tau_a), ([-1, 1], \tau_z)$ ;
- (2)  $(\mathbb{R}, \tau_z), ([-1, 1], \tau_a)$ ;
- (3)  $(\mathbb{R}, \tau_d), ([-1, 1], \tau_z)$ ;
- (4)  $(\mathbb{R}, \tau_z), ([-1, 1], \tau_d)$ ;
- (5)  $(\mathbb{R}, \tau_z), ([-1, 1], \tau_z)$ .

**Упражнение 2.4.** Пусть отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  задано в виде  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Докажите, что отображение  $\gamma$  непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все функции  $x_i(t)$ .

► **Замечание 2.1.** Упражнение 2.4 дословно обобщается на непрерывные отображения  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  из произвольного топологического пространства  $X$ , в частности, из открытого подмножества  $\mathbb{R}^k$ .

► **Замечание 2.2.** Отрезок  $[A, B] \subset \mathbb{R}^n$  можно представить как образ непрерывной кривой. Действительно, если  $A = (A^1, \dots, A^n)$ ,  $B = (B^1, \dots, B^n)$ , то  $\gamma(t) = (1-t)A + tB = ((1-t)A^1 + tB^1, \dots, (1-t)A^n + tB^n)$ ,  $t \in [0, 1]$ , представляет собой, в силу упражнения 2.4, искомую непрерывную кривую.

**Упражнение 2.5.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  задана непрерывная функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Пусть  $\Gamma$  — множество нулей функции  $f$ , т.е.  $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ . Положим  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ . Докажите, что точки  $P, Q \in \Omega$ , в одной из которых функция  $f$  положительна, а в другой — отрицательна, лежат в разных компонентах множества  $\Omega$ , т.е. их нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей в  $\Omega$ .

► **Замечание 2.3.** В упражнении 2.5 можно заменить множество  $\Gamma$  на множество  $\{f = c \in \mathbb{R}\}$ , а условия положительности и отрицательности функции  $f$  в точках  $P$  и  $Q$  — на условия  $f(P) > c$  и  $f(Q) < c$ : для решения достаточно вместо старой функции  $f$  рассмотреть функцию  $f - c$ .

**Упражнение 2.6.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из  $\mathbb{R}^2$  выбрасыванием оси  $x$ . Докажите, что  $X$  состоит из двух компонент — открытых полуплоскостей  $\{(x, y) : y < 0\}$  и  $\{(x, y) : y > 0\}$ .

► **Замечание 2.4.** Пусть  $\gamma(t) = (1-t)A + tB = ((1-t)A^1 + tB^1, \dots, (1-t)A^n + tB^n)$ ,  $t \in [0, 1]$ , — параметризация отрезка  $[A, B] \subset \mathbb{R}^n$ , тогда если для некоторых  $1 \leq i \leq n$  и  $c \in \mathbb{R}$  выполняется  $A_i > c$  и  $B_i > c$ , то и при всех  $t$  имеем  $(1-t)A^i + tB^i > c$ . Аналогично, если для некоторого  $i$  выполняется  $A_i < c$  и  $B_i < c$ , то и при всех  $t$  имеем  $(1-t)A^i + tB^i < c$ .

Теперь аналитическое доказательство утверждения из решения 2.6 о том, что любые две точки рассматриваемой полуплоскости соединяются отрезком, целиком лежащим в этой полуплоскости, состоит в применении этого замечания: возьмем две точки  $A = (A^1, A^2)$  и  $B = (B^1, B^2)$ , скажем, из верхней полуплоскости, тогда  $A^2 > 0$  и  $B^2 > 0$ , поэтому и для всех точек параметризации  $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t))$  отрезка  $[A, B]$  выполняется  $x^2(t) > 0$ , т.е. все точки  $\gamma(t)$  также лежат в верхней полуплоскости.

► **Замечание 2.5.** Рассмотрим произвольное аффинное отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f: A \mapsto MA + C$ , где  $M$  — невырожденная  $n \times n$ -матрица, а  $C \in \mathbb{R}^n$ . Как известно из линейной алгебры, отображение  $f$  взаимно однозначно и задающие его координатные функции линейны, а, значит, непрерывны; кроме того, координатные функции обратного отображения также линейны, поэтому и они непрерывны. Таким образом,  $f$ , в силу упражнения 2.4, — гомеоморфизм.

Кроме того, ограничение гомеоморфизма на любое подмножество является гомеоморфизмом с образом (см. следствие 2.3 ниже).

Таким образом, при изучении топологических свойств тех или иных объектов, связанных с  $\mathbb{R}^n$ , например, подмножеств  $\mathbb{R}^n$  или кривых в  $\mathbb{R}^n$ , мы можем произвольным образом выбирать в  $\mathbb{R}^n$  аффинные системы координат, что не влияет на исследуемые свойства. В частности, объекты, отличающиеся друг от друга на движение или сжатие/растяжение (подобные объекты) обладают одинаковыми топологическими свойствами.

Эти соображения позволяют, например, вывести из упражнения 2.6 аналогичный результат для произвольной прямой  $\ell \subset \mathbb{R}^2$ : достаточно выбрать (аффинную) систему координат, в которой  $\ell$  является осью абсцисс, рассмотреть соответствующее аффинное отображение перехода от стандартного репера к выбранному, и воспользоваться тем, что гомеоморфизмы сохраняют все топологические свойства, в частности, число компонент связности.

**Упражнение 2.7.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из  $\mathbb{R}^2$  выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Докажите, что  $X$  состоит из двух компонент.

► **Замечание 2.6.** Приведем решение упражнения 2.7, полезное для дальнейшего. Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — выходящие из точки  $O$  лучи, которые мы выбрасываем из  $\mathbb{R}^2$ . Введем декартовы координаты  $(x, y)$ , выбрав в качестве начала координат точку  $O$ , а в качестве отрицательной части оси абсцисс — луч  $r_1$ . Тогда на множестве  $\mathbb{R}^2 \setminus r_1$  можно ввести *полярные координаты*  $(\rho, \varphi)$ , связанные с декартовыми координатами так:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $\rho > 0$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ ;  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = (\text{sign } y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x \leq 0, y = 0\}$ . Тем самым, мы определили отображение

$$f: \Pi := \{(\rho, \varphi) : \rho > 0, \varphi \in (-\pi, \pi)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{x \leq 0, y = 0\},$$

которое, как легко проверяется, является взаимно однозначным, а координатные функции прямого и обратного отображений — непрерывными, поэтому  $f$  — гомеоморфизм. Значит, число компонент связности множества  $\mathbb{R}^2 \setminus \{r_1, r_2\}$  равно числу компонент связности множества  $\Pi \setminus \{\varphi = \varphi_2\}$ , где  $(\cos \varphi_2, \sin \varphi_2)$  — направляющий вектор луча  $r_2$ . Но это множество состоит из двух компонент:  $\Pi_1 = \{(\rho, \varphi) : \varphi \in (-\pi, \varphi_2)\}$  и  $\Pi_2 = \{(\rho, \varphi) : \varphi \in (\varphi_2, \pi)\}$ . Действительно, каждое из этих множеств линейно связно, что вытекает из замечания 2.4 (любые две точки из  $\Pi_k$  соединяются лежащим в  $\Pi_k$  отрезком). Таким образом, имеется не более двух компонент линейной связности. Если же  $P \in \Pi_1$  и  $Q \in \Pi_2$  соединяются в  $\Pi$  непрерывной кривой  $\gamma(t) = (\rho(t), \varphi(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma(0) = P$ ,

$\gamma(1) = Q$ , то  $\varphi(0) < \varphi_0$ , а  $\varphi(1) > \varphi_0$ , поэтому существует  $t_0$  такое, что  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  и, значит,  $\gamma(t_0) \in r_2$ . Таким образом, эти точки  $P$  и  $Q$  нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей в  $\Pi$  и не пересекающей  $r_2$ , так что компонент не меньше 2.

**Упражнение 2.8.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из некоторого круга  $U_r(A)$  выбрасыванием произвольного его радиуса  $AC$ . Докажите, что  $X$  — линейно связное пространство.

► **Замечание 2.7.** Приведем решение упражнения 2.8, воспользовавшись той же полярной системой координат, которая была введена в замечании 2.6. В этих координатах множество  $U_r(A) \setminus [A, C]$  имеет вид  $\{(\rho, \varphi) : \rho \in (0, r), \varphi \in (-\pi, \pi)\}$ . Но в этом множестве каждая пара точек соединяется лежащим в нем отрезком, что и доказывает линейную связность.

**Упражнение 2.9.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из некоторого круга  $U_r(A)$  выбрасыванием двух различных его радиусов  $AC$  и  $AD$ . Докажите, что  $X$  состоит из двух компонент.

► **Замечание 2.8.** В полярных координатах из замечания 2.6 легко доказывается (аналогично решению упражнения 2.9) и общий результат: если из плоскости (круга) выбросить  $k$  лучей, выходящих из одной точки ( $k$  радиусов), то полученное множество будет состоять из  $k$  компонент.

**Упражнение 2.10.** Докажите, что

- (1) отрезок и окружность не гомеоморфны;
- (2) буквы  $P$  и  $Я$  не гомеоморфны;
- (3) сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  с выкинутой точкой  $N = (0, 0, 1)$  и плоскость  $\mathbb{R}^2$  гомеоморфны.

Для решения упражнения 2.10 нам понадобятся следующие результаты.

★ **Лемма 2.1.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств, и  $Z \subset X$  — подмножество, на котором рассматривается индуцированная топология. Тогда отображение  $f|_Z: Z \rightarrow Y$  также непрерывно.

*Доказательство.* Напомним, что индуцированная топология на  $Z$  — это семейство, составленное из пересечений с  $Z$  всевозможных открытых в  $X$  множеств. Кроме того, отображение непрерывно, если и только если прообраз каждого открытого множества открыт.

Пусть  $V$  — открытое множество в  $Y$ , тогда  $f^{-1}(V)$  открыто в  $X$ . Заметим, что  $f|_Z^{-1}(V) = Z \cap f^{-1}(V)$ , так что это множество открыто в  $Z$  и, значит,  $f|_Z$  непрерывно.  $\square$

★ **Лемма 2.2.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение и  $g: X \rightarrow Z \subset Y$  — отображение, совпадающее с  $f$ , т.е. для каждого  $x \in X$  выполняется  $g(x) = f(x)$ . Тогда  $g$  также непрерывно.

*Доказательство.* Пусть  $V$  — произвольное открытое множество в  $Z$ , тогда существует открытое в  $Y$  множество  $W$  такое, что  $V = Z \cap W$ . Так как  $f$  непрерывно, то  $f^{-1}(W)$  открыто в  $X$ , однако  $g^{-1}(V) = f^{-1}(W)$ , поэтому  $g$  — непрерывно в силу произвольности множества  $V$ .  $\square$

★ **Следствие 2.3.** Если  $f: X \rightarrow Y$  — гомеоморфизм, то для любого  $Z \subset X$  отображение  $g: Z \rightarrow f(Z)$ , совпадающее с  $f$  на  $Z$ , т.е. для которого  $g(x) = f(x)$  при каждом  $x \in Z$ , также является гомеоморфизмом.

**Упражнение 2.11.** Докажите, что дважды перекрученная лента гомеоморфна цилиндру.

★ **Лемма 2.4.** Отображение  $g: X \rightarrow Y$  топологических пространств непрерывно, если и только если прообраз каждого замкнутого множества замкнут.

*Доказательство.* Напомним, что отображение непрерывно, если и только если прообраз каждого открытого множества открыт. Пусть  $F \subset Y$  — произвольное замкнутое множество. Это означает, что  $U = Y \setminus F$  — открытое множество. Но  $g^{-1}(F) = g^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus g^{-1}(U)$ , поэтому  $g^{-1}(F)$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $g^{-1}(U)$  — открыто.  $\square$

★ **Лемма 2.5.** Пусть  $X$  — произвольное топологическое пространство, а  $Y \subset X$  — его замкнутое подмножество. Тогда множество  $Z \subset Y$  замкнуто в  $Y$ , если и только если  $Z$  замкнуто в  $X$ .

*Доказательство.* Положим  $U = X \setminus Y$ , тогда, по условию,  $U$  открыто в  $X$ . Если  $Z$  замкнуто в  $Y$ , то  $Y \setminus Z = Z \cap V$ , где  $V$  открыто в  $X$ . Так как  $Z = X \setminus (V \cup U)$ , то  $Z$  замкнуто в  $X$ . Обратно, если  $Z$  замкнуто в  $X$ , то  $W = X \setminus Z$  открыто в  $X$ , но тогда  $Y \setminus Z = Z \cap W$  открыто в  $Y$ , что и доказывает замкнутость  $Z$  в  $Y$ .  $\square$

**★ Лемма 2.6.** Пусть  $X$  — компактное топологическое пространство, а  $Y \subset X$  — его замкнутое подмножество. Тогда  $Y$  — компактно.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное покрытие  $\{U_\alpha\}$  множества  $Y$ , где каждое  $U_\alpha \subset X$  открыто в  $X$ . Так как  $Y$  — замкнуто, то  $U = X \setminus Y$  — открыто, поэтому  $\{U_\alpha\} \cup \{U\}$  — открытое покрытие  $X$ . Так как  $X$  компактно, из этого покрытия выделяется конечное подсемейство  $\{V_i\}_{i=1}^n$ , также покрывающее  $X$ . Осталось заметить, что семейство  $\{U_i\}_{i=1}^n \setminus \{U\}$  покрывает  $Y$  и, значит, является конечным подпокрытием в  $\{U_\alpha\}$ .  $\square$

**★ Лемма 2.7.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное инъективное отображение компактного топологического пространства в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $f$  — гомеоморфизм с образом.

*Доказательство.* Обозначим через  $g: X \rightarrow f(X)$  биективное отображение, совпадающее с  $f$ . Мы должны показать, что  $g$  — гомеоморфизм. По лемме 2.2, отображение  $g$  непрерывно, поэтому достаточно проверить, что  $g^{-1}$  непрерывно. По лемме 2.4, достаточно показать, что для каждого замкнутого  $F \subset X$  его образ  $g(F)$  замкнут в  $f(X)$ . По лемме 2.6, каждое такое  $F$  является компактом, поэтому, как было показано на лекции, множество  $f(F)$  компактно в  $\mathbb{R}^n$ . Но тогда  $f(F)$  — замкнутое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ . Кроме того, компактным является  $f(X)$  и, значит,  $f(X)$  также замкнуто в  $\mathbb{R}^n$ . Осталось применить лемму 2.5, в силу которой множество  $f(F) = g(F)$  замкнуто в  $f(X)$ .  $\square$

**Упражнение 2.12.** Покажите, что локально постоянная функция постоянна на каждой компоненте.