Дополнения к семинару 2

Элементы топологии

Упражнение 2.1. Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ и семейство его подмножеств β, состоящее из всевозможных лучей $[a, +\infty)$. Докажите, что

(1) семейство β — база окрестностей;

(2) функция $f(x) = 2x$ непрерывна;

(3) функция $g(x) = -x$ непрерывной не является.

Здесь f и g рассматриваются как отображения из $(\mathbb{R}, \beta)$ в $(\mathbb{R}, \beta)$.

Упражнение 2.2. Пусть X — произвольное множество. Рассмотрим следующие семейства подмножеств X:

(1) $\beta_a = \{X\}$;

(2) β_d, совпадающее с семейством всех одноточечных множеств;

(3) β_z, состоящее всех множеств U, для которых $X \setminus U$ — конечный набор точек.

Докажите, что каждое из этих семейств является базой окрестностей и опишите порожденные ими топологии τ_a, τ_d и τ_z. Семейство τ_a называется *антидискретной топологий*, семейство τ_d — *дискретной топологией*, а семейство τ_z для бесконечного X — *топологией Зарисского*); для конечного X топология τ_z совпадает с τ_d.

Упражнение 2.3. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, заданное формулой $f(x) = \sin x$. Выясните, является ли f непрерывным, если мы рассматриваем на $\mathbb{R}$ и $[-1, 1]$ следующие топологии из задачи 2.2:

(1) $(\mathbb{R}, \tau_a)$, $\big([-1, 1], \tau_z\big)$;

(2) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1, 1], \tau_a\big)$;

(3) $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $\big([-1, 1], \tau_z\big)$;

(4) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1, 1], \tau_d\big)$;

(5) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1, 1], \tau_z\big)$.

Упражнение 2.4. Пусть отображение $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ задано в виде $\gamma(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$. Докажите, что отображение γ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все функции $x_i(t)$.

▶ **Замечание 2.1.** Упражнение 2.4 дословно обобщается на непрерывные отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ из произвольного топологического пространства X, в частности, из открытого подмножества $\mathbb{R}^k$.

▶ **Замечание 2.2.** Отрезок $[A, B] \subset \mathbb{R}^n$ можно представить как образ непрерывной кривой. Действительно, если $A = (A^1, \ldots, A_n)$, $B = (B^1, \ldots, B^n)$, то $\gamma(t) = (1-t)A + t\,B = \big((1-t)A^1 + t\,B^1, \ldots, (1-t)A^n + t\,B^n\big)$, $t \in [0, 1]$, представляет собой, в силу упражнения 2.4, искомую непрерывную кривую.

Упражнение 2.5. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана непрерывная функция $f(x_1,\dots,x_n)$. Пусть Γ — множество нулей функции f, т.е. $\Gamma=\{(x_1,\dots,x_n): f(x_1,\dots,x_n)=0\}$. Положим $\Omega=\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$. Докажите, что точки $P, Q\in\Omega$, в одной из которых функция f положительна, а в другой — отрицательна, лежат в разных компонентах множества Ω, т.е. их нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей в Ω.

▶ **Замечание 2.3.** В упражнении 2.5 можно заменить множество Γ на множество $\{f=c\in\mathbb{R}\}$, а условия положительности и отрицательности функции f в точках P и Q — на условия $f(P)>c$ и $f(Q)<c$: для решения достаточно вместо старой функции f рассмотреть функцию $f-c$.

Упражнение 2.6. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием оси x. Докажите, что X состоит из двух компонент — открытых полуплоскостей $\big\{(x,y): y<0\big\}$ и $\big\{(x,y): y>0\big\}$.

▶ **Замечание 2.4.** Пусть $\gamma(t)=(1-t)A+t\,B=\big((1-t)A^1+t\,B^1,\dots,(1-t)A^n+t\,B^n\big)$, $t\in[0,1]$, — параметризация отрезка $[A,B]\subset\mathbb{R}^n$, тогда если для некоторых $1\le i\le n$ и $c\in\mathbb{R}$ выполняется $A_i>c$ и $B_i>c$, то и при всех t имеем $(1-t)A^i+t\,B^i>c$. Аналогично, если для некоторого i выполняется $A_i<c$ и $B_i<c$, то и при всех t имеем $(1-t)A^i+t\,B^i<c$.

Теперь аналитическое доказательство утверждения из решения 2.6 о том, что любые две точки рассматриваемой полуплоскости соединяются отрезком, целиком лежащим в этой полуплоскости, состоит в применении этого замечания: возьмем две точки $A=(A^1,A^2)$ и $B=(B^1,B^2)$, скажем, из верхней полуплоскости, тогда $A^2>0$ и $B^2>0$, поэтому и для всех точек параметризации $\gamma(t)=\big(x^1(t),x^2(t)\big)$ отрезка $[A,B]$ выполняется $x^2(t)>0$, т.е. все точки $\gamma(t)$ также лежат в верхней полуплоскости.

▶ **Замечание 2.5.** Рассмотрим произвольное аффинное отображение $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f\colon A\mapsto M\,A+C$, где M — невырожденная $n\times n$-матрица, а $C\in\mathbb{R}^n$. Как известно из линейной алгебры, отображение f взаимно однозначно и задающие его координатные функции линейны, а, значит, непрерывны; кроме того, координатные функции обратного отображения также линейны, поэтому и они непрерывны. Таким образом, f, в силу упражнения 2.4, — гомеоморфизм.

Кроме того, ограничение гомеоморфизма на любое подмножество является гомеоморфизмом с образом (см. следствие 2.3 ниже).

Таким образом, при изучении топологических свойств тех или иных объектов, связанных с $\mathbb{R}^n$, например, подмножеств $\mathbb{R}^n$ или кривых в $\mathbb{R}^n$, мы можем произвольным образом выбирать в $\mathbb{R}^n$ аффинные системы координат, что не влияет на исследуемые свойства. В частности, объекты, отличающиеся друг от друга на движение или сжатие/растяжение (подобные объекты) обладают одинаковыми топологическими свойствами.

Эти соображения позволяют, например, вывести из упражнения 2.6 аналогичный результат для произвольной прямой $\ell\subset\mathbb{R}^2$: достаточно выбрать (аффинную) систему координат, в которой ℓ является осью абсцисс, рассмотреть соответствующее аффинное отображение перехода от стандартного репера к выбранному, и воспользоваться тем, что гомеоморфизмы сохраняют все топологические свойства, в частности, число компонент связности.

Упражнение 2.7. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Докажите, что X состоит из двух компонент.

▶ **Замечание 2.6.** Приведем решение упражнения 2.7, полезное для дальнейшего. Пусть r_1 и r_2 — выходящие из точки O лучи, которые мы выбрасываем из $\mathbb{R}^2$. Введем декартовы координаты (x,y), выбрав в качестве начала координат точку O, а в качестве отрицательной части оси абсцисс — луч r_1. Тогда на множестве $\mathbb{R}^2\setminus r_1$ можно ввести *полярные координаты* (ρ,φ), связанные с декартовыми координатами так: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $\rho>0$, $\varphi\in(-\pi,\pi)$; $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=(\mathrm{sign}y)\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{x\le 0,\ y=0\}$. Тем самым, мы определили отображение

$$f\colon \Pi:=\big\{(\rho,\varphi): r>0,\ \varphi\in(-\pi,\pi)\big\}\to\mathbb{R}^2\setminus\{x\le 0,\ y=0\},$$

которое, как легко проверяется, является взаимно однозначным, а координатные функции прямого и обратного отображений — непрерывными, поэтому f — гомеоморфизм. Значит, число компонент связности множества $\mathbb{R}^2\setminus\{r_1,\ r_2\}$ равно числу компонент связности множества $\Pi\setminus\{\varphi=\varphi_2\}$, где $(\cos\varphi_2,\sin\varphi_2)$ — направляющий вектор луча r_2. Но это множество состоит из двух компонент: $\Pi_1=\big\{(\rho,\varphi):\varphi\in(-\pi,\varphi_2)\big\}$ и $\Pi_2=\big\{(\rho,\varphi):\varphi\in(\varphi_2,\pi)\big\}$. Действительно, каждое из этих множеств связно, что вытекает из замечания 2.4 (любые две точки из Π_k соединяются лежащим в Π_k отрезком). Таким образом, имеется не более двух компонент связности. Если же $P\in\Pi_1$ и $Q\in\Pi_2$ соединяются в Π непрерывной кривой $\gamma(t)=\big(\rho(t),\varphi(t)\big)$, $t\in[0,1]$, $\gamma(0)=P$, $\gamma(1)=Q$, то

$\varphi(0) < \varphi_0$, а $\varphi(1) > \varphi_0$, поэтому существует t_0 такое, что $\varphi(t_0) = \varphi_0$ и, значит, $\gamma(t_0) \in r_2$. Таким образом, эти точки P и Q нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей в Π и не пересекающей r_2, так что компонент не меньше 2.

Упражнение 2.8. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием произвольного его радиуса AC. Докажите, что X — линейно связное пространство.

▶ **Замечание 2.7.** Приведем решение упражнения 2.8, воспользовавшись той же полярной системой координат, которая была введена в замечании 2.6. В этих координатах множество $U_r(A) \setminus [A, C]$ имеет вид $\big\{(\rho, \varphi) : \rho \in (0, r],\ \varphi \in (-\pi, \pi)\big\}$. Но в этом множестве каждая пара точек соединяется лежащим в нем отрезком, что и доказывает линейную связность.

Упражнение 2.9. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием двух различных его радиусов AC и AD. Докажите, что X состоит из двух компонент.

▶ **Замечание 2.8.** В полярных координатах из замечания 2.6 легко доказывается (аналогично решению упражнения 2.9) и общий результат: если из плоскости (круга) выбросить k лучей, выходящих из одной точки (k радиусов), то полученное множество будет состоять из k компонент.

Упражнение 2.10. Докажите, что

(1) отрезок и окружность не гомеоморфны;

(2) буквы Р и Я не гомеоморфны;

(3) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с выкинутой точкой $N = (0, 0, 1)$ и плоскость $\mathbb{R}^2$ гомеоморфны.

Для решения упражнения 2.10 нам понадобятся следующие результаты.

★ **Лемма 2.1.** *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, и $Z \subset X$ — подмножество, на котором рассматривается индуцированная топология. Тогда отображение $f|_Z\colon Z \to Y$ также непрерывно.*

Доказательство. Напомним, что индуцированная топология на Z — это семейство, составленное из пересечений с Z всевозможных открытых в X множеств. Кроме того, отображение непрерывно, если и только если прообраз каждого открытого множества открыт.

Пусть V — открытое множество в Y, тогда $f^{-1}(V)$ открыто в X. Заметим, что $f|_Z^{-1}(V) = Z \cap f^{-1}(V)$, так что это множество открыто в Z и, значит, $f|_Z$ непрерывно. □

★ **Лемма 2.2.** *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и $g\colon X \to Z \subset Y$ — отображение, совпадающее с f, т.е. для каждого $x \in X$ выполняется $g(x) = f(x)$. Тогда g также непрерывно.*

Доказательство. Пусть V — произвольное открытое множество в Z, тогда существует открытое в Y множество W такое, что $V = Z \cap W$. Так как f непрерывно, то $f^{-1}(W)$ открыто в X, однако $g^{-1}(V) = f^{-1}(W)$, поэтому g — непрерывно в силу произвольности множества V. □

★ **Следствие 2.3.** *Если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, то для любого $Z \subset X$ отображение $g\colon Z \to f(Z)$, совпадающее с f на Z, т.е. для которого $g(x) = f(x)$ при каждом $x \in Z$, также является гомеоморфизмом.*

Упражнение 2.11. Докажите, что дважды перекрученная лента гомеоморфна цилиндру.

★ **Лемма 2.4.** *Отображение $g\colon X \to Y$ топологических пространств непрерывно, если и только если прообраз каждого замкнутого множества замкнут.*

Доказательство. Напомним, что отображение непрерывно, если и только если прообраз каждого открытого множества открыт. Пусть $F \subset Y$ — произвольное замкнутое множество. Это означает, что $U = Y \setminus F$ — открытое множество. Но $g^{-1}(F) = g^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus g^{-1}(U)$, поэтому $g^{-1}(F)$ замкнуто тогда и только тогда, когда $g^{-1}(U)$ — открыто. □

★ **Лемма 2.5.** *Пусть X — произвольное топологическое пространство, а $Y \subset X$ — его замкнутое подмножество. Тогда множество $Z \subset Y$ замкнуто в Y, если и только если Z замкнуто в X.*

Доказательство. Положим $U = X \setminus Y$, тогда, по условию, U открыто в X. Если Z замкнуто в Y, то $Y \setminus Z = Z \cap V$, где V открыто в X. Так как $Z = X \setminus (V \cup U)$, то Z замкнуто в X. Обратно, если Z замкнуто в X, то $W = X \setminus Z$ открыто в X, но тогда $Y \setminus Z = Z \cap W$ открыто в Y, что и доказывает замкнутость Z в Y. $\square$

★ **Лемма 2.6.** *Пусть X — компактное топологическое пространство, а $Y \subset X$ — его замкнутое подмножество. Тогда Y — компактно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное покрытие $\{U_\alpha\}$ множества Y, где каждое $U_\alpha \subset X$ открыто в X. Так как Y — замкнуто, то $U = X \setminus Y$ — открыто, поэтому $\{U_\alpha\} \cup \{U\}$ — открытое покрытие X. Так как X компактно, из этого покрытия выделяется конечное подсемейство $\{V_i\}_{i=1}^n$, также покрывающее X. Осталось заметить, что семейство $\{V_i\}_{i=1}^n \setminus \{U\}$ покрывает Y и, значит, является конечным подпокрытием в $\{U_\alpha\}$. $\square$

★ **Лемма 2.7.** *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное инъективное отображение компактного топологического пространства в $\mathbb{R}^n$. Тогда f — гомеоморфизм с образом.*

Доказательство. Обозначим через $g\colon X \to f(X)$ биективное отображение, совпадающее с f. Мы должны показать, что g — гомеоморфизм. По лемме 2.2, отображение g непрерывно, поэтому достаточно проверить, что g^{-1} непрерывно. По лемме 2.4, достаточно показать, что для каждого замкнутого $F \subset X$ его образ $g(F)$ замкнут в $f(X)$. По лемме 2.6, каждое такое F является компактом, поэтому, как было показано на лекции, множество $f(F)$ компактно в $\mathbb{R}^n$. Но тогда $f(F)$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, компактным является $f(X)$ и, значит, $f(X)$ также замкнуто в $\mathbb{R}^n$. Осталось применить лемму 2.5, в силу которой множество $f(F) = g(F)$ замкнуто в $f(X)$. $\square$

Упражнение 2.12. Покажите, что локально постоянная функция постоянна на каждой компоненте.