

## Упражнения к главе 5

**Упражнение 5.1.** Пусть  $W$  — выпуклый многогранник, и пусть  $v$ ,  $e$  и  $f$  обозначают количества вершин, ребер и граней этого многогранника. Докажите, что

- (1)  $e + 6 \leq 3v$ ;
- (2)  $e + 6 \leq 3f$ ;
- (3)  $f + 4 \leq 2v$ ;
- (4)  $v + 4 \leq 2f$ ;
- (5) многогранник  $W$  имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань;
- (6) многогранник  $W$  имеет хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол (т.е. вершину, в которой стыкуются 3, 4 или 5 граней);
- (7) многогранник  $W$  имеет или хотя бы одну треугольную грань, или один трехгранный пространственный угол;
- (8) сумма всех плоских углов граней многогранника  $W$  равна  $2\pi(v - 2)$ .

### Упражнение 5.2.

- (a) Какое минимальное число ребер может иметь выпуклый многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 5 ребер?
- (b) Какое минимальное число ребер может иметь выпуклый многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 5 ребер?
- (c) Какое минимальное число ребер может иметь выпуклый многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 4 ребер?
- (d) Какое минимальное число ребер может иметь выпуклый многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 4 ребер?
- (e) Какое минимальное число ребер может иметь выпуклый многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 3 ребер?
- (f) Какое минимальное число ребер может иметь выпуклый многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 3 ребер?

**Определение 5.37.** Пусть  $P$  — вершина произвольного многогранника  $W$ , а  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — величины углов всех граней  $W$  при этой вершине. Тогда *кривизной в вершине  $P$*  называется величина  $K(P) = 2\pi - \sum_i \alpha_i$ .

**Упражнение 5.3.** Докажите, что у выпуклого многогранника сумма кривизн  $K(P)$  по всем его вершинам  $P$  равна  $4\pi$ .

**Упражнение 5.4.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$ . Докажите, что  $\partial W \setminus L$  состоит из двух компонент.

**Определение 5.38.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$ , а  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — компоненты множества  $\partial W \setminus L$ . Тогда множества  $M_i = L \cup \Omega_i$  называются *многоугольниками на  $\partial W$* . Для многоугольника  $M_i$  точки из  $\Omega_i$  называются *внутренними*, из  $\Omega_j$  — *внешними*, а из  $L$  — *граничными*, где  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ . Положим  $\text{Int } M_i = \Omega_i$ ,  $\text{Out } M_i = \Omega_j$  и  $\partial M_i = L$ .

**Определение 5.39.** Пусть  $X$  — многоугольник на поверхности  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$ , а  $P$  — некоторая вершина многоугольника  $X$ . Тогда *угол  $\alpha_P$  многоугольника  $X$  в вершине  $P$*  определяется так. Если  $P$  лежит внутри грани, то  $\alpha_P$  — это угол на плоскости, содержащей эту грань. Если же  $P$  попала или на ребро, или в вершину из  $\partial W$ , то угол в этой вершине складывается из всех углов многоугольников, полученных пересечением  $X$  и содержащих эту вершину граней (конечно, углы рассматриваются в этой вершине).

**Упражнение 5.5.** Рассмотрим  $n$ -угольник  $X$ , лежащий на границе выпуклого многогранника. Докажите, что его сумма углов равна  $\pi(n - 2)$  плюс сумма кривизн  $K(P)$  по всем вершинам многогранника, попавшим внутрь  $X$ .

**Упражнение 5.6.** Сформулируйте и докажите аналог теоремы Минковского для выпуклых многоугольников.

**Упражнение 5.7.** Существует ли тетраэдр с гранями  $F_1, \dots, F_4$  такой, что площадь каждой  $F_i$  равна 1, грани  $F_1$  и  $F_2$  перпендикулярны друг другу, грани  $F_3$  и  $F_4$  также перпендикулярны друг другу, а угол между ребром  $e_{12} = F_1 \cap F_2$  и  $e_{34} = F_3 \cap F_4$  равен  $37^\circ$ ? Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

**Упражнение 5.8.** Докажите, что выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади. Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

**Определение 5.40.** Пусть  $X$  — произвольное подмножество  $\mathbb{R}^n$ . Наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее  $X$ , называется *выпуклой оболочкой*  $X$  и обозначается через  $\text{conv } X$ . Иными словами,  $\text{conv } X$  — это такое выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , что  $X \subset \text{conv } X$ , и если  $Y \supset X$  — выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , то  $\text{conv } X \subset Y$ .

**Замечание 5.41.** Определение 5.40 и тот факт, что пересечение выпуклых множеств — выпукло, мгновенно влекут, что  $\text{conv } X$  совпадает с пересечением всех выпуклых подмножеств  $\mathbb{R}^n$ , содержащих  $X$ .

**Упражнение 5.9.** Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.