Упражнения к главе 4

Упражнение 4.1.

(1) Докажите, что любой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — ломаные.

(2) Докажите, что простой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — прямолинейные отрезки.

Упражнение 4.2. Используя формулу Эйлера, покажите, что граф $K_{3,3}$ непланарный.

Упражнение 4.3. Не используя формулу Эйлера, выведите из леммы 4.2, что граф K_5 непланарный.

Упражнение 4.4. Пусть G — плоский связный простой граф, имеющий v вершин, e ребер и f граней.

(1) Используя формулу Эйлера, покажите, что при $v \geq 3$ выполняется $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$.

(2) Покажите, что G содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

Упражнение 4.5. Пусть G — плоский связный простой граф. Покажите, что G не может состоять из 10 вершин, степень каждой из которых равна 5.

Упражнение 4.6. Опишите все плоские связные простые графы, вершины которых имеют одну и ту же степень $d \geq 3$, каждая грань ограничена одним и тем же числом $k \geq 3$ ребер и каждое ребро лежит ровно в двух гранях.

Определение 4.27. Пусть G — простой граф. *Окружением* $\mathcal{N} = \mathcal{N}(v)$ *вершины* v графа G назовем следующий граф: его вершины — это все вершины из G, каждая из которых соединена с v некоторым ребром; его ребра — все ребра графа G, соединяющие выбранные вершины.

Определение 4.28. Пусть $\mathcal{C} = \{\mathrm{Col}_i\}$ — некоторое множество, элементы которого будем называть *цветами.* Каждое отображение $\nu\colon V \to \mathcal{C}$ будем называть *раскраской графа* $G = (V, E, \partial)$ *цветами из множества* $\mathcal{C}$. При этом будем говорить, что *вершина* v *покрашена в цвет* $\nu(v)$. Раскраска ν называется *правильной*, если смежные вершины покрашены разными цветами.

Упражнение 4.7 (Теорема Хивуда о пяти красках)**.** Докажите, что для каждого плоского простого графа существует правильная раскраска 5 цветами.

Упражнение 4.8. Докажите, что каждый планарный граф имеет реализацию в виде плоского графа, ребра которого — ломаные.