

Упражнения к главе 3

Упражнение 3.1.

- (1) Приведите пример непересекающихся подмножеств на прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (2) Приведите пример непересекающихся замкнутых подмножеств прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (3) Существуют ли два замкнутых непересекающихся подмножества окружности, находящиеся на нулевом расстоянии?

Упражнение 3.2. Пусть A — некоторое подмножество плоскости. Рассмотрим функцию $f(x) = \inf\{|xy| : y \in A\}$ (расстояние от x до A). Докажите, что f непрерывна.

Упражнение 3.3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, заданные на топологическом пространстве X . Докажите, что функция $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ также непрерывна.

Упражнение 3.4. Докажите, не используя теорему Жордана, что квадрат (стороны квадрата) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.5. Докажите, не используя теорему Жордана, что треугольник (замкнутая трехзвенная ломаная) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.6. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая ломаная без самопересечений такая, что для каждого ее ребра ломаная L лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через это ребро (такие ломаные иногда называют *выпуклыми*). Не используя теорему Жордана, докажите, что L разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.7. Докажите, что открытое подмножество в \mathbb{R}^n линейно связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить ломаной.

Упражнение 3.8. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — незамкнутая ломаная без самопересечений. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -окрестность $U_\varepsilon(L)$ ломаной L . Пусть P и Q — произвольные точки из $U_\varepsilon(L) \setminus L$. Покажите, что их можно соединить ломаной, не пересекающей L и лежащей в $U_\varepsilon(L)$.

Упражнение 3.9. Пусть X — подмножество плоскости \mathbb{R}^2 , которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием трех различных его радиусов. Докажите, что X состоит из трех компонент.

Упражнение 3.10. Пусть OA , OB и OC — три отрезка, причем любые два из них имеют только одну общую точку O . Докажите, что объединение этих отрезков не разбивает плоскость, т.е. что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (OA \cup OB \cup OC)$ линейно связно.

Упражнение 3.11. Пусть L_1 и L_2 — незамкнутые ломаные без самопересечений, лежащие на плоскости \mathbb{R}^2 и не имеющие общих точек. Докажите, что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$ линейно связно.

Упражнение 3.12. Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_m, B_m]$$

отрезков $[A_i, B_i] \subset \mathbb{R}^2$ (некоторые отрезки могут быть вырожденными) и положим $X_k = \cup_{i=1}^k [A_i, B_i]$. Предположим, что для каждого $k = 2, \dots, m$ выполняется или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$, или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$. Докажите, что любые две точки из каждого множества $\Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus X_k$ можно соединить ломаной, лежащей в Ω_k . В частности, каждое множество Ω_k — линейно связно.