Упражнения к главе 2

Упражнение 2.1. Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ и семейство его подмножеств β, состоящее из всевозможных лучей $(a, +\infty)$. Докажите, что

(1) семейство β — база окрестностей;

(2) функция $f(x) = 2x$ непрерывна;

(3) функция $g(x) = -x$ непрерывной не является.

Здесь f и g рассматриваются как отображения из $(\mathbb{R}, \beta)$ в $(\mathbb{R}, \beta)$.

Упражнение 2.2. Пусть X — произвольное множество. Рассмотрим следующие семейства подмножеств X:

(1) $\beta_a = \{X\}$;

(2) β_d, совпадающее с семейством всех одноточечных множеств;

(3) β_z, состоящее всех множеств U, для которых $X \setminus U$ — конечный набор точек.

Докажите, что каждое из этих семейств является базой окрестностей и опишите порожденные ими топологии τ_a, τ_d и τ_z. Семейство τ_a называется *антидискретной топологий*, семейство τ_d — *дискретной топологией*, а семейство τ_z для бесконечного X — *топологией Зарисского*; для конечного X топология τ_z совпадает с τ_d.

Упражнение 2.3. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, заданное формулой $f(x) = \sin x$. Выясните, является ли f непрерывным, если мы рассматриваем на $\mathbb{R}$ и $[-1, 1]$ следующие топологии из задачи 2.2:

(1) $(\mathbb{R}, \tau_a)$, $\big([-1, 1], \tau_z\big)$;

(2) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1, 1], \tau_a\big)$;

(3) $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $\big([-1, 1], \tau_z\big)$;

(4) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1, 1], \tau_d\big)$;

(5) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1, 1], \tau_z\big)$.

Упражнение 2.4. Пусть отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ задано в виде $\gamma(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$. Докажите, что отображение γ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все функции $x_i(t)$.

Упражнение 2.5. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная на пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Γ множество нулей функции f, т.е. $\Gamma = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : f(x_1, \ldots, x_n) = 0\big\}$. Положим $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$. Докажите, что точки P, $Q \in \Omega$, в одной из которых функция f положительна, а в другой — отрицательна, лежат в разных компонентах множества Ω, т.е. их нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей в Ω.

Упражнение 2.6. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием оси x. Докажите, что X состоит из двух компонент — открытых полуплоскостей $\big\{(x, y) : y < 0\big\}$ и $\big\{(x, y) : y > 0\big\}$.

Упражнение 2.7. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Докажите, что X состоит из двух компонент.

Упражнение 2.8. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием произвольного его радиуса AC. Докажите, что X — линейно связное пространство.

Упражнение 2.9. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием двух различных его радиусов AC и AD. Докажите, что X состоит из двух компонент.

Упражнение 2.10. Докажите, что

(1) отрезок и окружность не гомеоморфны;

(2) буквы Р и Я не гомеоморфны;

(3) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с выкинутой точкой $N = (0, 0, 1)$ и плоскость $\mathbb{R}^2$ гомеоморфны.

Упражнение 2.11. Докажите, что дважды перекрученная лента (см. рис. 2.5 из лекции) гомеоморфна цилиндру.

Упражнение 2.12. Покажите, что локально постоянная функция постоянна на каждой компоненте.