

Упражнения к главе 12

Упражнение 12.1. Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. *Эйлеровой характеристикой* такой карты называется число $v - e + f$, где v — число вершин, e — число ребер и f — число областей. Докажите, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание: рассмотрите карту, получающуюся “наложением” двух карт, т.е. объединением их границ.

Упражнение 12.2. *Эйлеровой характеристикой поверхности* называется число

$$\chi = v - e + f,$$

где v , e и f — числа вершин, ребер и областей любой карты, нарисованной на поверхности (согласно утверждению из упражнения 12.1, это число не зависит от карты и, тем самым, характеризует саму поверхность). Вычислите эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мебиуса.

Упражнение 12.3. Поверхность M получается из поверхности N вырезанием k дисков. Выразите $\chi(M)$ через $\chi(N)$.

Упражнение 12.4. Каждая из двух поверхностей M и N имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска. Поверхность Q получается из поверхностей M и N склеиванием краев. Выразите $\chi(Q)$ через $\chi(M)$ и $\chi(N)$.

Упражнение 12.5. Вычислите эйлерову характеристику

- (1) поверхности M_g^m , полученной из сферы с g ручками вырезанием m дырок;
- (2) поверхности N_h^m , полученной из сферы с h пленками Мебиуса вырезанием m дырок.

Упражнение 12.6. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, c, \dots в следующем порядке: $a, b, a, b, c, d, c, d, \dots$. Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Докажите, что, если число разных букв равно $2g$, то полученная поверхность гомеоморфна сфере с g ручками.

Упражнение 12.7. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, c, \dots в следующем порядке: $a, a, b, b, c, c, d, d, \dots$. Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода. Докажите, что, если число разных букв равно h , то полученная поверхность гомеоморфна сфере с h пленками Мебиуса.

Упражнение 12.8. На замкнутой поверхности нарисована карта, причем каждая страна представляет собой некоторый n -угольник, и в каждой вершине сходится по k ребер. Докажите, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e},$$

где χ — эйлерова характеристика поверхности, а e — число ребер карты. Приведите пример такой карты на сфере при $n = 2$, $k = 4$.

Упражнение 12.9. Вычислите эйлеровы характеристики бутылки Клейна и проективной плоскости.