Упражнения к главе 10

Упражнение 10.1. Пусть G — произвольное дерево с множеством вершин V, и $M \subset V$ содержит все вершины степени 1 и 2. Пусть n — число элементов в M. Тогда $V \setminus M$ содержит не более $n-2$ вершин.

Упражнение 10.2. Пусть $A_1A_2A_3$ — произвольный треугольник на плоскости, а S — точка плоскости, для которой величина $\sum_{i=1}^{3}|SA_i|$ наименьшая возможная. Докажите, что если в треугольнике один из углов больше или равен $2\pi/3$, то точка S совпадает с вершиной этого угла. Если же в треугольнике $A_1A_2A_3$ все углы меньше $2\pi/3$, то положение точки S однозначно определяется следующим построением. Обозначим через A'_k, $\{i,\, j,\, k\} = \{1,\, 2,\, 3\}$, точку на плоскости, для которой треугольник $A_iA_jA'_k$ — правильный, пересекающийся с треугольником $A_1A_2A_3$ по стороне A_iA_j. Тогда окружности, описанные вокруг треугольников $A_iA_jA'_k$, а также отрезки $[A'_iA_i]$, называемые **линиями Симпсона**, пересекаются в точке S. Длины линий Симпсона равны между собой и равны длине построенной кратчайшей сети, т.е. величине $\sum_{i=1}^{3}|SA_i|$.

Упражнение 10.3. Покажите, что для дерева Штейнера G, соединяющего конечное подмножество M точек евклидовой плоскости, существует локально минимальное дерево Γ_G тогда и только тогда, когда для всех невырожденных компонент G_i дерева G, соединяющих соответствующие множества $M_i \subset M$, существуют локально минимальные деревья Γ_{G_i}, причем ребра-отрезки деревьев Γ_{G_i} стыкуются в общих вершинах под углами, не меньшими $120°$.

Упражнение 10.4. Покажите, что каждое невырожденное дерево Штейнера с не менее чем тремя граничными вершинами имеет не менее двух усов.

Упражнение 10.5. Построить все локально минимальные деревья для вершин прямоугольника и выбрать из них кратчайшие. Выяснить, сколько кратчайших и какие существуют при данном отношении длин сторон прямоугольника.

Упражнение 10.6. Пусть G — плоское локально минимальное дерево, соединяющее M. Обозначим через $M' \subset M$ множество всех граничных вершин дерева G, степени которых меньше 3. Для каждой такой вершины v обозначим через ξ_v сумму направлений входящих в нее ребер, а через $\ell(G)$ — длину этого дерева. Отождествим евклидову плоскость с полем комплексных чисел и будем рассматривать точки v и векторы ξ_v как комплексные числа. Докажите, что

$$\ell(G) = \sum_{v\in M'} v\,\overline{\xi_v},$$

где через $\overline{z}$ обозначено комплексное число, сопряженное к z.

Упражнение 10.7. Пусть $\mathcal{S} = F$ — граница выпуклого многогранника W, и G — замкнутая локально минимальная сеть на F. Покажите, что G не проходит через вершины многогранника W, что ее ребра — геодезические, и что углы между стыкующимися в вершинах сети ребрами-геодезическими не меньше $120°$, так что степени вершин сети G не превосходят 3. Более того, в вершинах степени 3 ребра стыкуются под углами в $120°$, в вершинах степени 2 — под углами в $180°$, а вершин степени 1 сеть не содержит.

Упражнение 10.8. Опишите возможные ячейки замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях платоновых тел.

Упражнение 10.9. Покажите, что если выпуклый многогранник с треугольными гранями не содержит замкнутых локально минимальных сетей, то и каждый достаточно близкий выпуклый многогранник, т.е. полученный из исходного любыми достаточно малыми смещениями вершин, также не содержит замкнутых локально минимальных сетей.

Упражнение 10.10 (*)**.** Покажите, что каждый выпуклый многогранник с треугольными гранями можно сколь угодно мало пошевелить, т.е. сместить его вершины в сколь угодно близкие точки объемлющего пространства, так, чтобы полученный многогранник остался выпуклым, однако на нем не существовало бы ни одной замкнутой локально минимальной сети.

Упражнение 10.11 (*)**.** Обобщите понятие замкнутых локально минимальных сетей на случай, когда объемлющее пространство $\mathcal{S}$ — стандартная сфера. Покажите, что, с точностью до движения, на сфере существует ровно 10 таких сетей.