

Глава 9

Кратчайшие кривые и геодезические

План. Геометрические оптимизационные задачи, конфигурационное пространство, целевая функция или вариационный функционал, оптимальные или экстремальные объекты, кратчайшие кривые, кратчайшие в евклидовом пространстве, ломаная, вписанная в кривую, длина ломаной в пространстве \mathbb{R}^n , длина кривой в пространстве \mathbb{R}^n , функция расстояния, норма, расстояние, соответствующее норме, евклидово расстояние, кратчайшие в нормированном пространстве, манхэттенское пространство, кратчайшие в манхэттенском пространстве, правильные сферические ломаные, кратчайшие на сфере, кратчайшие на многогранниках, гладкие кривые, кратчайшие на многогранниках, гладкие кривые, вектор скорости гладкой кривой, интегральная формула длины пространственной кривой, геодезические, замкнутые геодезические.

В этой главе мы поговорим о *геометрических оптимизационных задачах*. Общая идея — рассматривается какой-нибудь класс геометрических объектов, обычно называемый *конфигурационным пространством*; каждому объекту приписывается величина, измеряющая степень “совершенства” этого объекта, т.е. сколь хорошо объект подходит в качестве решения той или иной задачи (это соответствие является функцией на конфигурационном пространстве, которая называется обычно *целевой функцией* или *вариационным функционалом*); изучается, какие наименьшие, или наибольшие, или, более общо, критические значения может принимать вариационный функционал и на каких объектах, называемых *оптимальными* или *экстремальными*, эти значения достигаются.

9.1 Кратчайшие кривые

В качестве первой оптимизационной задачи, рассмотрим проблему поиска кратчайшего пути. Итак, нам дано некоторое пространство \mathcal{S} , и в нем — пара точек P и Q . В пространстве \mathcal{S} мы можем проводить кривые и измерять их длины. В качестве конфигурационного пространства рассмотрим какой-нибудь класс кривых, соединяющих P и Q , а в качестве вариационного функционала — функцию длины таких кривых. Задача в том, чтобы найти наименьшее значение этого функционала и описать те кривые, на которых это наименьшее значение достигается. Такие кривые называются *кратчайшими*.

Решение этой проблемы существенно зависит от того, где мы ищем кратчайшие пути, т.е. от выбора пространства \mathcal{S} . Посмотрим некоторые примеры.

9.1.1 Евклидово пространство

Пусть \mathcal{S} — пространство \mathbb{R}^n со стандартной функцией расстояния и все кривые — непрерывны.

Определение 9.1. Будем говорить, что ломаная L вписана в кривую $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, если существует такое разбиение $\xi = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b\}$ отрезка $[a, b]$, что $L = \gamma(t_0)\gamma(t_1) \dots \gamma(t_m)$. Иногда, чтобы подчеркнуть связь между L и ξ , мы будем писать $L = L_\xi$.

Определение 9.2. Длиной $|L|$ ломаной $L = A_0 \dots A_m$ в пространстве \mathbb{R}^n называется сумма длин $|A_{i-1}A_i|$ всех ее ребер: $|L| = \sum_{i=1}^m |A_{i-1}A_i|$.

Определение 9.3. Длиной $|\gamma|$ кривой γ в пространстве \mathbb{R}^n называется точная верхняя грань длин всех вписанных в кривую ломаных.

Замечание 9.4. Обратим особое внимание, что существуют кривые, длина которых равна бесконечности. Например, пусть $f(t)$ — функция на отрезке $[0, 1]$ такая, что $f(0) = 0$, а при $t > 0$ имеем $f(t) = t \sin(1/t)$. Тогда кривая $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in [0, 1]$, имеет бесконечную длину (проверьте).

Рассмотрим теперь следующую оптимизационную задачу.

Задача 9.5. Выберем произвольные точки P и Q из $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$. Требуется найти точную нижнюю грань величины $|\gamma|$ по всем непрерывным кривым γ , соединяющим P и Q , и определить, на какой кривой эта величина достигается, если, конечно, такая кривая существует.

Чтобы решить поставленную задачу, мы начнем со следующей простой леммы.

Лемма 9.6. Длина $|L|$ ломаной $L = A_0 \dots A_m$ не меньше расстояния между ее концами, т.е. $|L| \geq |A_0 A_m|$. Более того, если $|L| = |A_0 A_m|$, то A_0, A_1, \dots, A_m — последовательные точки отрезка $[A_0, A_m]$.

Доказательство. Действительно, по неравенству треугольника, имеем

$$(9.1) \quad \begin{aligned} |L| &= |A_0 A_1| + |A_1 A_2| + |A_2 A_3| + \dots + |A_{m-1} A_m| \geq \\ &\geq |A_0 A_2| + |A_2 A_3| + \dots + |A_{m-1} A_m| \geq |A_0 A_3| + \dots + |A_{m-1} A_m| \geq \dots \\ &\dots \geq |A_0 A_m|. \end{aligned}$$

При этом, равенство $|L| = |A_0 A_m|$ имеет место тогда и только тогда, когда все неравенства в формуле (9.1) превращаются в равенства. Однако, последнее имеет место в точности тогда, когда каждая последующая точка A_i , $i \geq 2$, лежит на продолжении отрезка $A_0 A_{i-1}$ за вершину A_{i-1} . \square

Следствие 9.7. Длина непрерывной кривой не меньше расстояния между ее концами, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда образ кривой — отрезок, а координатные функции монотонны.

Доказательство. Пусть γ — непрерывная кривая, соединяющая точки P и Q , и пусть $L = A_0 \dots A_m$, $P = A_0$, $Q = A_m$, — произвольная ломаная, вписанная в γ . Тогда, по определению длины кривой, $|\gamma| \geq |L|$ и, значит, по лемме 9.6, имеем $|\gamma| \geq |PQ|$. По той же лемме, равенство имеет место тогда и только тогда, когда для любой такой ломаной L ее вершины являются последовательными точками отрезка $[P, Q]$, а это и означает, что образ отображения γ — прямолинейный отрезок, а координатные функции — монотонны. \square

Из следствия 9.7 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 9.8. Для любых двух точек P и Q пространства \mathbb{R}^n существует соединяющая их кратчайшая кривая, и каждая такая кривая задает монотонное движение по отрезку $[P, Q]$. Таким образом, с точностью до параметризации, точки P и Q соединяются единственной кратчайшей кривой, и эта кривая — отрезок $[P, Q]$.

Замечание 9.9. Легко модифицировать предыдущий пример так, чтобы в полученном пространстве \mathcal{S} кратчайшая кривая существовала не для любой пары точек. Для этого можно, скажем, выкинуть из \mathbb{R}^n произвольную точку A , тогда точки P и Q , для которых $A \in (P, Q)$, кратчайшей непрерывной кривой соединить нельзя: ведь у каждой такой кривой будет точка, лежащая вне отрезка $[P, Q]$, поэтому ее длина будет больше $|PQ|$. Осталось заметить, что $|PQ|$ — это точная нижняя грань длин всех непрерывных кривых на $\mathbb{R}^n \setminus \{A\}$, соединяющих P и Q .

9.1.2 Нормированное пространство

Кроме стандартной функции расстояния на \mathbb{R}^n , имеется и еще много других. Начнем с общего определения расстояния на произвольном множестве X .

Определение 9.10. Функцией расстояния или метрикой на произвольном множестве X называется функция $\rho(x, y)$, заданная на парах элементов x и y из X , которая

- (1) положительно определена, т.е. $\rho(x, y) \geq 0$ для любых точек x и y из X , причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- (2) симметрична, т.е. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$;
- (3) удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ для любых $x, y, z \in X$.

Множество X , на котором задана функция расстояния, называется метрическим пространством.

Один из естественных способов определения расстояния на \mathbb{R}^n описывается в терминах нормы.

Определение 9.11. *Нормой* на пространстве \mathbb{R}^n называется такая функция $\|x\|$ на векторах $x \in \mathbb{R}^n$, которая

- (1) *положительно определена*, т.е. $\|x\| \geq 0$ для любого вектора x , причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- (2) *положительно-однородна*, т.е. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любого вектора x и числа λ ;
- (3) *субаддитивна*, т.е. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых векторов x и y .

Пространство \mathbb{R}^n , на котором задана норма, называется *нормированным*.

Рассмотрим функцию $\rho(x, y) = \|xy\| = \|x - y\|$ на парах точек из \mathbb{R}^n , где $\|\cdot\|$ — некоторая заданная норма. Из свойств нормы легко вытекает, что ρ — функция расстояния (проверьте).

Определение 9.12. *Расстояние на \mathbb{R}^n , соответствующее норме $\|\cdot\|$, — это функция $\rho(x, y) = \|xy\| = \|x - y\|$.*

Пример 9.13. Положим $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, тогда так определенная норма называется *евклидовой* и задает стандартное евклидово расстояние.

Пусть \mathcal{S} — нормированное пространство \mathbb{R}^n с функцией расстояния, соответствующей норме $\|\cdot\|$; все кривые — непрерывны; длина $\|L\|$ ломаной $L = A_0 \dots A_m$ равна $\sum_{i=1}^m \|A_{i-1}A_i\|$; длина $\|\gamma\|$ непрерывной кривой γ снова определяется как точная верхняя грань длин вписанных в кривую ломаных. Выберем произвольные точки P и Q из \mathcal{S} .

Следующий результат получается аналогично следствию 9.8.

Следствие 9.14. *Для любых двух точек P и Q нормированного пространства \mathbb{R}^n монотонно параметризованный отрезок $[P, Q]$ является кратчайшей кривой, соединяющей P и Q .*

Замечание 9.15. Однако теперь кратчайшая кривая не обязана быть единственной с точностью до параметризации. Ниже мы рассмотрим соответствующие примеры.

9.1.3 Манхеттенское пространство

Определение 9.16. *Манхеттенской нормой на \mathbb{R}^n называется функция $\|(x^1, \dots, x^n)\| = \sum_{i=1}^n |x^i|$. Соответствующее расстояние ρ и нормированное пространство также называются *манхеттенскими*.*

Замечание 9.17. Название нормы и расстояния происходит от названия одного из районов в Нью-Йорке, где основные улицы — стриты и авеню — образуют прямоугольную сетку (основным исключением является Бродвей, пересекающий эту сетку наискосок). Если пешеход двигается по этой сетке дорог, не возвращаясь на уже пройденные стриты и авеню, то он проходит путь, длина которого равна введенному только что расстоянию между концами этого пути.

Из следствия 9.14 вытекает, что каждый отрезок в пространстве с манхеттенской метрикой является кратчайшей кривой. Есть ли другие кратчайшие кривые, образы которых не являются отрезками? Ответ положительный.

Пример 9.18. На манхеттенской плоскости \mathbb{R}^2 рассмотрим точки $P = (0, 0)$ и $Q = (1, 1)$. Пусть $R = (1, 0)$. Тогда отрезок $[P, Q]$ имеет ту же манхеттенскую длину, что и ломаная PRQ .

Следующее предложение полностью описывает кратчайшие кривые в манхеттенском пространстве.

Предложение 9.19. *Пусть $\gamma = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ — непрерывная кривая в пространстве с манхеттенской метрикой, соединяющая точки P и Q . Тогда γ кратчайшая, если и только если все функции $\gamma^i(t)$ — монотонные.*

Доказательство. Пусть $L = A_0 \dots A_m$, $P = A_0$, $Q = A_m$, — произвольная ломаная, вписанная в γ . Для каждой точки $A \in \mathbb{R}^n$ через (A^1, \dots, A^n) будем обозначать ее координаты. Тогда $L^i = A_0^i \dots A_m^i$ — ломаная в одномерном евклидовом пространстве \mathbb{R} , вписанная в кривую $\gamma^i(t)$, которая соединяет точки P^i и Q^i . Заметим, что, по определению, $\|L\| = \sum_{i=1}^n |L^i|$, где $|L^i|$ — евклидова длина ломаной L^i , поэтому $\|\gamma\| = \sum_{i=1}^n |\gamma^i|$. Следовательно, кривая γ — кратчайшая, если и только если все кривые γ^i — кратчайшие. По следствию 9.7, кривая γ^i — кратчайшая тогда и только тогда, когда она является монотонной функцией. Это замечание и завершает доказательство. \square

Замечание 9.20. Из предложения 9.19 вытекает следующее наблюдение (кривые рассматриваются с точностью до параметризации): если для двух разных i имеем $P^i \neq Q^i$, то точки P и Q в манхеттенском пространстве соединяются бесконечным числом кратчайших кривых; в противном случае кратчайшая кривая определена однозначно.

9.1.4 Сфера

Выберем теперь в качестве \mathcal{S} произвольную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с центром в O и радиусом 1. Наша задача — выяснить, как устроены кратчайшие кривые на S^2 .

Теорема 9.21. Пусть P и Q — произвольные точки на S^2 , тогда кратчайшие кривые на S^2 , соединяющие P и Q — это, в точности, все малые сферические отрезки.

Прежде чем доказывать теорему, обсудим некоторые необходимые нам результаты из сферической геометрии.

Пусть A_0, \dots, A_n — некоторая последовательность различных точек сферы S^2 . Тогда A_i можно рассматривать как вершины обычной, евклидовой, ломаной L , соединив последовательные A_i отрезками. Также можно построить сферическую ломаную Λ , соединив последовательные A_i сферическими отрезками.

Определение 9.22. Сферическую ломаную, все ребра которой — малые сферические отрезки, будем называть *правильной*. Ломаную L и правильную сферическую ломаную Λ с одной и той же последовательностью вершин будем называть *соответствующими друг другу*.

Лемма 9.23. Пусть L и Λ — соответствующие друг другу евклидова и правильная сферическая ломаные, а $|L|$ и $|\Lambda|$ — их длины. Тогда

$$|L| \leq |\Lambda| \leq \frac{\pi}{2}|L|.$$

Доказательство. Первое неравенство вытекает из того, что хорда всегда короче дуги, которую она стягивает. Докажем теперь второе неравенство.

Обозначим через ℓ_i длину i -ого ребра ломаной L ; через φ_i — длину i -ого ребра правильной сферической ломаной Λ . Тогда $\varphi_i/\ell_i = \varphi_i/(2 \sin \frac{\varphi_i}{2})$. Функция $f(x) = x/\sin x$ монотонно возрастает на $(0, \pi/2]$, поэтому ее максимум равен $\pi/2$ и, значит, $\varphi_i/\ell_i \leq \pi/2$, откуда и вытекает заключение леммы. \square

Лемма 9.24. Пусть γ — непрерывная кривая конечной длины на сфере S^2 , тогда ее длина равна точной верхней грани длин правильных сферических ломаных, вписанных в γ .

Доказательство. Пусть кривая γ параметризована отрезком $[a, b]$, и $\xi = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ — какое-нибудь разбиение этого отрезка. Положим $A_i = \gamma(t_i)$, и пусть Λ_ξ — вписанная в γ правильная сферическая ломаная с вершинами A_i . Заметим, что сферическое неравенство треугольника (следствие 6.53) обобщается и на треугольники, составленные из малых сферических отрезков и содержащие диаметрально противоположные вершины, только теперь неравенство становится нестрогим. Таким образом, для всякого подразделения $\xi' \supset \xi$ отрезка $[a, b]$ имеем $|\Lambda_{\xi'}| \geq |\Lambda_\xi|$.

Так как γ — непрерывное отображение отрезка, оно является равномерно непрерывным, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $a \leq t \leq t' \leq b$, $t' - t < \delta$, имеем $|\gamma(t)\gamma(t')| < \varepsilon$. Отсюда и из леммы 9.23 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой правильной сферической ломаной Λ , вписанной в γ , существует такая правильная сферическая ломаная Λ' , также вписанная в γ , для которой $|\Lambda'| \geq |\Lambda|$ и длины всех ребер Λ' меньше ε . Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ точная верхняя грань длин правильных сферических ломаных, вписанных в γ , равна точной верхней грани длин таких ломаных при условии, что рассматриваются только ломаные с ребрами, длина которых меньше ε .

Пусть L и Λ — соответствующие друг другу вписанные в γ евклидова и правильная сферическая ломаные, причем все ребра ломаной Λ короче ε . По определению длины непрерывной кривой, имеем $|L| \leq |\gamma|$. По лемме 9.23, $|\Lambda| \leq \frac{\pi}{2}|L| \leq \frac{\pi}{2}|\gamma|$.

Воспользуемся обозначениями из леммы 9.23. Тогда $|L| = \sum_i \ell_i$, $|\Lambda| = \sum_i \varphi_i$. Применяя формулу Тейлора, получим $\varphi_i - \ell_i = O(\varphi_i^3) \leq C \varphi_i^3$, где положительную постоянную C можно выбрать не зависящей от i (т.е. рассмотреть формулу Тейлора на всем отрезке $[0, \pi/2]$). Поэтому

$$0 < |\Lambda| - |L| \leq \sum_i \varphi_i - \sum_i \ell_i \leq C \sum_i \varphi_i^3 \leq C \varepsilon^2 \sum_i \varphi_i \leq C \varepsilon^2 \frac{\pi}{2} |\gamma|.$$

Так как длина $|\gamma|$ кривой γ конечна по предположению, то $|\Lambda| - |L| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, что и завершает доказательство леммы. \square

Практически дословно воспроизводя доказательство леммы 9.6, получаем следующий результат.

Лемма 9.25. *Длина малого сферического отрезка, соединяющего концы правильной сферической ломаной Λ , меньше или равна длине $|\Lambda|$ этой ломаной. Более того, если имеет место равенство, то вершины Λ являются последовательными точками на малом сферическом отрезке, соединяющем концы Λ .*

Следствие 9.26. *Для любых точек P и Q сферы S^2 существует соединяющая их кратчайшая кривая на S^2 , и каждая такая кривая, с точностью по параметризации, является малым сферическим отрезком. Таким образом, если P и Q не являются диаметрально противоположными, то они соединяются единственной кратчайшей кривой, а если диаметрально противоположны, то таких кривых бесконечно много.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную непрерывную кривую γ , соединяющую P и Q и имеющую конечную длину (такие кривые есть, например малый сферический отрезок). Из леммы 9.24 вытекает, что длина $|\gamma|$ кривой γ не меньше длины любой вписанной в γ правильной сферической ломаной Λ . Из леммы 9.25 следует, что длина $|\Lambda|$ ломаной Λ не меньше длины каждого малого сферического отрезка, соединяющего концы γ . Таким образом, малый сферический отрезок, соединяющий P и Q , действительно является кратчайшей кривой на сфере S^2 .

Покажем, что других кратчайших кривых, кроме малых сферических отрезков, на сфере нет. Пусть γ — отличная от каждого малого сферического отрезка кратчайшая кривая, соединяющая P и Q . Тогда на кривой γ существуют такие точки R и T , что правильная сферическая ломаная $\Lambda = PRTQ$ вписана в γ и отлична от каждого малого сферического отрезка I , соединяющего P и Q . По лемме 9.25, Λ длиннее I . По лемме 9.24, кривая γ не короче $|\Lambda|$, тем самым, γ длиннее I , противоречие. \square

9.1.5 Многогранники

Выберем в качестве \mathcal{S} границу $\mathcal{F} = \partial W$ многогранника W . Наша задача — описать свойства кривых на \mathcal{F} , соединяющих заданные точки P и Q и имеющих наименьшую длину среди всех таких кривых.

Начнем с простого наблюдения.

Предложение 9.27. *Если отрезок $[P, Q]$ лежит в \mathcal{F} , то кратчайшей кривой на \mathcal{F} , соединяющей P и Q , является этот отрезок. Более того, для таких P и Q кратчайшая кривая единственна.*

Доказательство. Действительно, в силу следствия 9.8, отрезок $[P, Q]$ является единственной кратчайшей кривой в \mathbb{R}^3 , соединяющей P и Q , поэтому любая другая кривая на \mathcal{F} с концами в P и Q длиннее отрезка $[P, Q]$. \square

Посмотрим теперь, как устроены кратчайшие кривые на \mathcal{F} локально, т.е. в маленьких окрестностях своих точек.

Предложение 9.28. *Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ — кратчайшая кривая на \mathcal{F} , пересекающая некоторое ребро e многогранника W во внутренней точке $R = \gamma(t_0)$ ребра e , причем $t_0 \in (a, b)$. Пусть e — общее ребро граней F_1 и F_2 . Тогда существует $\delta > 0$ такое, что*

- (1) $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$;
- (2) ограничения γ на отрезки $[t_0 - \delta, t_0]$ и $[t_0, t_0 + \delta]$ представляют собой отрезки, один из которых лежит в F_1 , другой — в F_2 ;
- (3) угол между одним из этих отрезков и лучом, выпущенным из R в одном из двух направлений ребра e , равен углу между вторым отрезком и лучом, выпущенным в противоположном направлении (в дальнейшем это свойство будем условно называть “угол падения равен углу преломления”).

Доказательство. Рассмотрим шаровую окрестность $U_\varepsilon(R)$ точки R радиуса ε меньшего, чем расстояние от R до всех не содержащих R ребер и граней W . Из непрерывности γ вытекает, что существует такое $\delta > 0$, $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$, для которого γ переводит $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ в $U_\varepsilon(R)$.

Шар $U_\varepsilon(R)$ пересекает \mathcal{F} по двум полукругам, один из которых лежит в F_1 , а другой — в F_2 . Полукруг, лежащий в F_i , обозначим через U_i . Используя подходящие движения пространства \mathbb{R}^3 , расположим круги U_i в одной плоскости π так, чтобы они пересекались по диаметру. Такое расположение кругов U_i в плоскости π

назовем *локальной разверткой* в окрестности точки R . Ясно, что длина любой кривой на \mathcal{F} , лежащей в $U_\varepsilon(R)$, равна длине ее изображения на развертке. Так как каждый фрагмент кратчайшей кривой укоротить нельзя, этот фрагмент также является кратчайшей кривой, поэтому ограничение γ на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, изображенное на развертке, представляет собой отрезок, а рассмотренное на \mathcal{F} — два отрезка $[\gamma(t_0 - \delta), R]$ и $[R, \gamma(t_0 + \delta)]$, причем один лежит в $U_1 \subset F_1$, а другой — в $U_2 \subset F_2$. Кроме того, так как на локальной развертке рассматриваемый фрагмент-отрезок образует с диаметром — образом части ребра e — равные вертикальные углы, выполняется свойство “угол падения равен углу преломления”. \square

Наконец, разберемся, как выглядит кратчайшая кривая в окрестности ее точки, совпадающей с вершиной многогранника.

Конструкция 9.29. Пусть v — произвольная вершина многогранника W , а F_1, \dots, F_k — все его грани, содержащие v и упорядоченные в соответствии с одним из обходов вокруг вершины v . Для удобства изложения, положим $F_{k+i} = F_i$ при каждом целом i , и обозначим через e_i ребро многогранника W , выходящее из v и являющееся общим для граней F_{i-1} и F_i . Отметим, что ребра e_i и e_{i+1} принадлежат грани F_i . Угол многоугольника F_i при вершине v , т.е. между сторонами e_i и e_{i+1} , обозначим через α_i .

Выберем в гранях F_p и F_q произвольные точки x_p и x_q , отличные от v . Обозначим через $\alpha_{p,m}$, $m \in \{p, p+1\}$, угол при вершине v между отрезками e_m и $[v, x_p]$; аналогично, обозначим через $\alpha_{q,m}$, $m \in \{q, q+1\}$, угол при вершине v между отрезками e_m и $[v, x_q]$. Отметим, что некоторые из этих углов могут вырождаться, т.е. быть равными нулю.

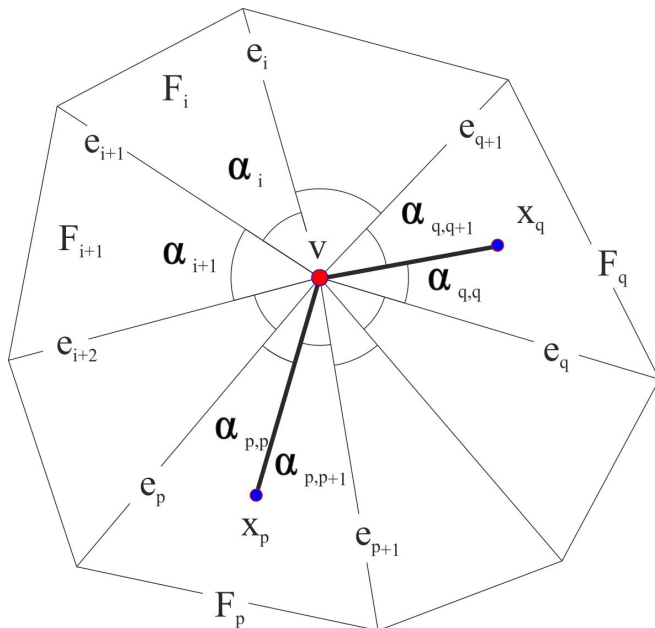


Рис. 9.1: Угол между отрезками, выходящими из вершины многогранника.

Пусть $B_\varepsilon(v)$ — замкнутый шар с центром в v радиуса ε , выбранного меньшим расстояния от v до всех вершин, ребер и граней многогранника W , не содержащих v , а также до точек x_p и x_q . Тогда отрезки $[v, x_p]$ и $[v, x_q]$ разбивают $B_\varepsilon(v) \cap \mathcal{F}$ на две компоненты K_1 и K_2 (по аналогии с тем, как два радиуса разбивают круг). Каждая из этих компонент представляет собой объединение секторов.

Определение 9.30. В сделанных выше обозначениях, сумма величин углов секторов, составляющих компоненту K_i , называется *углом между $[v, x_p]$ и $[v, x_q]$ на границе \mathcal{F} многогранника W* .

Таким образом, если отрезки $[v, x_p]$ и $[v, x_q]$ различны, то они определяют два угла.

Имеет место следующий очевидный результат.

Лемма 9.31. В сделанных выше обозначениях, углы на поверхности \mathcal{F} многогранника W между отрезками $[v, x_p]$ и $[v, x_q]$ равны

$$\alpha_{p,p+1} + \sum_{i=p+1}^{q-1} \alpha_i + \alpha_{q,q} \quad \text{и} \quad \alpha_{q,q+1} + \sum_{i=q+1}^{p-1} \alpha_i + \alpha_{p,p}.$$

Предложение 9.32. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — кратчайшая кривая на границе \mathcal{F} многогранника W . Предположим, что для некоторого $t_0 \in (a, b)$ точка $\gamma(t_0)$ является вершиной многогранника W . Выберем настолько маленькое δ , чтобы $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$ и ограничения γ на отрезки $[t_0 - \delta, t_0]$ и $[t_0, t_0 + \delta]$ лежали в некоторых гранях многогранника W и, значит, являлись бы отрезками. Тогда каждый из двух углов на многограннике W между этими отрезками больше или равен π , в частности, кривизна $K(v)$ в такой вершине v неположительна.

Доказательство. Пусть это не так, тогда угол, составленный из секторов S_i одной из компонент K_j , скажем K_1 , меньше π . С помощью подходящих движений выложим секторы S_i на плоскости так, чтобы соседние секторы пересекались по радиусу (аналог локальной развертки). Тогда объединение этих секторов — сектор величины меньше π , заключенный между образами частей $[O', A]$ и $[O', B]$ отрезков $[\gamma(t_0 - \delta), \gamma(t_0)]$ и $[\gamma(t_0), \gamma(t_0 + \delta)]$, где O' — центр полученного “большого” сектора. Но тогда длина хорды $[A, B]$ этого сектора меньше, чем $|O'A| + |O'B|$, поэтому, заменяя в γ прообразы отрезков $[O', A]$ и $[O', B]$ на прообраз сектора $[A, B]$, мы укоротим γ , противоречие. \square

Следствие 9.33. На выпуклом многограннике кратчайшие кривые не проходят через вершины.

9.1.6 Интегральная формула длины пространственной кривой

Определение 9.34. Кривая $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ в \mathbb{R}^n называется *гладкой*, если функции $x_i(t)$ непрерывно дифференцируемы бесконечное число раз.

Замечание 9.35. Часто гладкость понимают в более слабом смысле, требуя, чтобы функции были непрерывно дифференцируемы столько раз, сколько достаточно для решения конкретной задачи.

Определение 9.36. Вектором скорости $\dot{\gamma}(t)$ гладкой кривой

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

вычисленным в точке t , называется вектор $(\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$, составленный из производных координатных функций $x_i(t)$.

Заметим, что длина $\|\dot{\gamma}(t)\|$ вектора скорости в евклидовом пространстве, по определению, равна $\sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2(t)}$, поэтому $\|\dot{\gamma}(t)\|$ является непрерывной функцией и, значит, для нее определен интеграл $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.

Теорема 9.37. Пусть $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ в \mathbb{R}^n — гладкая кривая, тогда ее длина может быть вычислена по формуле

$$|\gamma| = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Эта теорема доказывается в курсе математического анализа. Мы же будем заниматься различными ее применениями.

Пример 9.38. Проверим теорему 9.37 на примерах некоторых известных кривых.

- Пусть $\gamma(t) = P + (Q - P)t$, $t \in [0, 1]$, — кривая, задающая отрезок $[P, Q]$. Тогда $\dot{\gamma}(t) = Q - P$ и $|\gamma| = \int_0^1 \|Q - P\| dt = \|Q - P\|$.
- Пусть $\gamma(t) = (O_1, O_2) + r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, — кривая, задающая окружность с центром в (O_1, O_2) и радиусом r на плоскости \mathbb{R}^2 . Тогда $\dot{\gamma}(t) = r(-\sin t, \cos t)$, откуда $|\gamma| = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$.

9.1.7 Прямой круговой цилиндр

Пусть x, y, z — декартовы координаты в \mathbb{R}^3 . Рассмотрим прямую $\ell(z) = (1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$, $z \in \mathbb{R}$, и пусть \mathcal{C} обозначает цилиндр, полученный вращением этой прямой вокруг оси z . Обозначая через φ угол поворота, найдем, что точки цилиндра \mathcal{C} могут быть заданы в виде $(\cos \varphi, \sin \varphi, z)$. Это представление определяет отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$.

Лемма 9.39. Пусть $\delta(t) = (\varphi(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, — гладкая кривая на декартовой плоскости с координатами φ, z, u

$$\gamma(t) = f(\delta(t)) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t), z(t))$$

— соответствующая кривая на цилиндре \mathcal{C} . Тогда длины этих кривых одинаковы.

Доказательство. Используем теорему 9.37. С одной стороны,

$$|\delta| = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

С другой стороны, $\dot{\gamma}(t) = (-\sin \varphi(t) \dot{\varphi}(t), \cos \varphi(t) \dot{\varphi}(t), \dot{z}(t))$, поэтому

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{\sin^2 \varphi(t) \dot{\varphi}^2(t) + \cos^2 \varphi(t) \dot{\varphi}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt,$$

что и требовалось. \square

Замечание 9.40. Лемма 9.39 интуитивно очевидна, если представить плоскость в виде “бесконечного” листа бумаги, который мы, с помощью отображения f , наматываем на цилиндр. При этом, естественно, длины кривых сохраняются, если представлять кривые как нити, приклеенные к листу бумаги.

Следствие 9.41. Пусть $\delta(t) = (\varphi(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, — гладкая кривая на декартовой плоскости с координатами φ, z, u

$$\gamma(t) = f(\delta(t)) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t), z(t))$$

— соответствующая кривая на цилиндре \mathcal{C} . Предположим, что γ — кратчайшая кривая. Тогда δ — отрезок (точнее, монотонная параметризация отрезка).

Доказательство. Если это не так, то существует кривая $\bar{\delta}(t)$, соединяющая концы кривой δ и такая, что $|\bar{\delta}| < |\delta|$. Положим $\bar{\gamma}(t) = f(\bar{\delta}(t))$, тогда $\bar{\gamma}$ — кривая на \mathcal{C} , соединяющая концы кривой γ . По лемме 9.39, имеем $|\bar{\gamma}| < |\gamma|$, противоречие с тем, что γ — кратчайшая кривая. \square

Замечание 9.42. Отметим, что кратчайшие кривые мы искали среди гладких кривых. Однако, из наших рассуждений не вытекает, как устроены кратчайшие кривые в классе *всех непрерывных* кривых на цилиндре (на самом деле, ответ не изменится; проверьте).

9.2 Геодезические

Локально кратчайшие кривые, т.е. такие кривые, у которых малые фрагменты являются кратчайшими, называются геодезическими. Дадим соответствующее определение.

Определение 9.43. Кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$ в объемлющем пространстве \mathcal{S} называется *геодезической*, если для любого $t \in [a, b]$ существует такое $\varepsilon > 0$ (зависящее, вообще говоря, от t), что ограничение γ на отрезок $[a, b] \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ является кратчайшей кривой.

Пример 9.44. Геодезическими в евклидовом пространстве являются отрезки прямых и только они. Тем самым, множество геодезических в этом случае совпадает с множеством кратчайших кривых.

Пример 9.45. В манхэттенском пространстве существуют геодезические, не являющиеся кратчайшими кривыми. В качестве примера можно рассмотреть “букву П”, стороны которой параллельны координатным осям. Более того, добавив еще ряд “поворотов” к букве П, можно превратить ее в геодезическую спираль, у которой могут быть даже самопересечения.

Пример 9.46. На сфере каждая геодезическая — это движение по некоторой сферической прямой. При этом допускается многократный проход сферической прямой, тем самым, здесь также возможны самопересечения.

Пример 9.47. На выпуклом многограннике кривая γ является геодезической, если и только если в каждой грани она — отрезок прямой, в каждой внутренней точке ребра многогранника, через которую проходит γ , выполняется закон “угол падения равен углу преломления”, и γ не проходит через вершины. Если многогранник невыпуклый, то геодезическая может проходить через вершины, и тогда в каждой такой вершине оба угла между выходящими из нее отрезками геодезической больше или равны π .

Конструкция 9.48. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$ — замкнутая кривая и $\varepsilon > 0$. Зададим отображение $\gamma^\varepsilon: [a, b + \varepsilon] \rightarrow \mathcal{S}$, положив $\gamma^\varepsilon(t) = \gamma(t)$ при $t \leq b$ и $\gamma^\varepsilon(t) = \gamma(a + (t - b))$ при $t \geq b$. Ясно, что γ^ε — непрерывная кривая, совпадающая на $[a, b]$ с исходной кривой γ , а при $t > b$ продолжающая движение по γ .

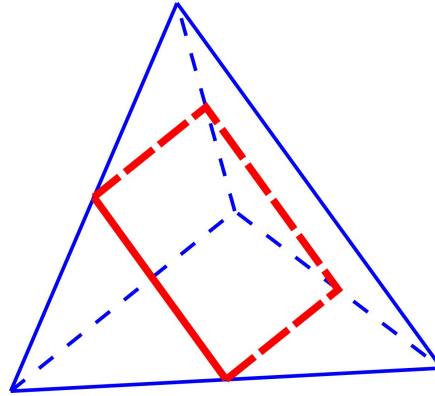


Рис. 9.2: Замкнутая геодезическая без самопересечений на тетраэдре.

Определение 9.49. Замкнутая кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$ в объемлющем пространстве \mathcal{S} называется *замкнутой геодезической*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ кривая γ^ε — геодезическая.

Пример 9.50. На сфере замкнутые геодезические без самопересечений — это все сферические прямые.

Пример 9.51. На рассмотренном выше прямом круговом цилиндре замкнутые геодезические без самопересечений — это все окружности, параллельные плоскости xy .

На границах многогранников замкнутые геодезические без самопересечений описаны в очень немногих случаях. Г. Гальперин (см. [4]. [5]) показал, что на случайно взятом выпуклом многограннике таких геодезических нет. В статье [6] разбирается случай тетраэдров. В [7] приведены интересные задачи о замкнутых геодезических на многогранниках. Некоторые из них мы включили в упражнения.

Литература к главе 9

- [1] Shephard G.C. *Convex Polytopes with Convex Nets*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, v. 78, p. 389–403.
- [2] Wikipedia, Открытые математические проблемы.
- [3] Bern M., Demaine E.D., Eppstein D., and Kuo E. *Ununfoldable Polyhedra*. Proc. 11th Canadian Conference on Computational Geometry, 1999, pp. 13-16. Preprint dated 3 Aug 1999 available from <http://arxiv.org/abs/cs.CG/9908003>.
- [4] Гальперин Г.А. *О теореме Люстерника–Шнирельмана для многогранников*. УМН, 1991, т. 46, N 6(282), с. 207–208.
- [5] Galperin G. *Convex polyhedra without simple closed geodesics*. Regular and chaotic dynamics, 2003, v. 8, N 1, p.45-58.
- [6] Протасов В.Ю. *Замкнутые геодезические на поверхности симплекса*. Матем. сб., 2007, т. 198, N 2, с. 103–120.
- [7] <http://www.mcsme.ru/mmks/mar08/Poincare.pdf>
- [8] Люстерник Л.А. *Кратчайшие линии. Вариационные задачи*. М.: Гостехиздат, 1955, Серия: Популярные лекции по математике, выпуск 19.