

Глава 7

Жесткие и изгибаемые многогранники

План. Тригонометрическая лемма Коши, изоморфизм графов многогранников, согласованный со структурой граней, одинаково устроенные границы многогранников, отождествление границ многогранников, совмещение многоугольников, теорема Коши о жесткости выпуклых многогранников, комбинаторная лемма Коши, изгибаемые многогранники, октаэдр Брикара, многогранник Штеффена, гипотеза кузнечных мехов, теорема Сабитова о сохранении объема многогранника при изгибании.

Техника, разработанная в предыдущем разделе, позволит нам доказать нетривиальный результат, который будет существенно использован в дальнейшем при доказательстве знаменитой теоремы Коши о жесткости многогранников.

7.1 Тригонометрическая лемма Коши

Рассмотрим на плоскости некоторый выпуклый многоугольник и зафиксируем у него длины всех сторон, кроме одной. Будем понемногу увеличивать углы между этими зафиксированными сторонами. Тогда оставшаяся сторона будет увеличиваться, причем она будет увеличиваться до тех пор, пока наш многоугольник остается выпуклым. Оказывается, для эйлерова сферического многоугольника выполняется аналогичное утверждение. Для упрощения изложения будем предполагать, что все рассматриваемые сферические многоугольники лежат на единичных сферах.

Теорема 7.1 (Тригонометрическая лемма Коши). *Рассмотрим два эйлеровых многоугольника $W_1 = A_1 \cdots A_n$ и $W_2 = B_1 \cdots B_n$. Обозначим через \hat{A}_i и \hat{B}_i величины углов этих многоугольников в вершинах A_i и B_i соответственно. Предположим, что*

- (1) *при всех $i = 1, \dots, n - 1$ имеем $|A_i A_{i+1}| = |B_i B_{i+1}|$, а*
- (2) *при всех $i = 2, \dots, n - 1$ имеем $\hat{A}_i \leq \hat{B}_i$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое.*

Тогда $|A_n A_1| < |B_n B_1|$.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по числу сторон многоугольников.

Начало индукции — сферические треугольники, для которых результат следует из сферической теоремы косинусов. Действительно, пусть a , b и c — длины сторон некоторого эйлерова сферического треугольника, а \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} — величины его углов, противоположных этим сторонам. Так как рассматриваемый треугольник — эйлеров, по следствию 6.37 величины a , b и c лежат на интервале $(0, \pi)$. По сферической теореме косинусов (предложение 6.52), имеем

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C}.$$

В силу ограничений на длины сторон, заключаем, что величины $\sin a$ и $\sin b$ положительны, так что функция $\sin a \sin b \cos \hat{C}$ строго монотонно убывает при $0 < \hat{C} < \pi$. Кроме того, при $c \in (0, \pi)$ функция $\cos c$ также строго монотонно убывает. Таким образом, при фиксированных длинах a и b сторон треугольника, чем больше угол \hat{C} между ними, тем больше длина c противоположной стороны. Применяя эти рассуждения к треугольникам W_1 и W_2 , получим $|A_3 A_1| < |B_3 B_1|$.

Предположим теперь, что теорема доказана для всех m -угольников при $m \leq n - 1$, $n \geq 4$. Докажем, что теорема имеет место и для n -угольников. Рассмотрим два случая.

(1) При некотором $2 \leq k \leq n - 1$ имеем $\widehat{A}_k = \widehat{B}_k$. По следствию 6.40, диагональ $A_{k-1}A_{k+1}$ разбивает многоугольник W_1 на эйлеров треугольник T_A с вершинами $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ и эйлеров многоугольник W_A . Аналогично, диагональ $B_{k-1}B_{k+1}$ разбивает многоугольник W_2 на эйлеров треугольник T_B с вершинами $B_{k-1}B_kB_{k+1}$ и эйлеров многоугольник W_B . Из замечания 6.59 вытекает, что в треугольниках T_A и T_B равны все соответствующие стороны и углы, поэтому многоугольники W_A и W_B удовлетворяют условию теоремы и, по предположению индукции, утверждение теоремы выполняется (см. рис. 7.1).

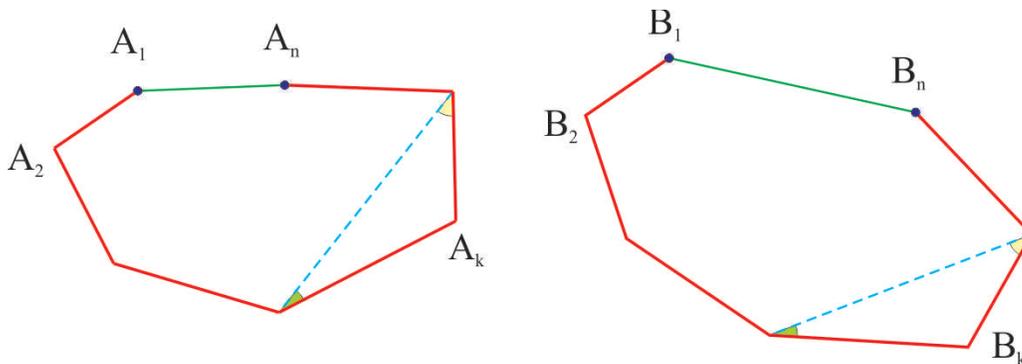


Рис. 7.1: Доказательство теоремы 7.1, случай 1: углы \widehat{A}_k и \widehat{B}_k равны.

(2) Для всех $2 \leq i \leq n - 1$ выполняется $\widehat{A}_i < \widehat{B}_i$. Приводимые ниже построения проиллюстрируем на рис. 7.2. Так как W_1 — эйлеров, он, по следствию 6.37, не содержит диаметрально противоположных точек, поэтому для каждого $i = 1, \dots, n - 1$ однозначно определены малый сферический отрезок A_iA_{i+1} и сферическая прямая $\ell_i \supset A_iA_{i+1}$. По следствию 6.23, многоугольник W_1 лежит в одной из полусфер, ограниченных ℓ_i . Обозначим эту полусферу через Σ_i .

Так как у W_1 имеется не менее четырех сторон, то $n - 2 > 1$, так что $\ell_1 \neq \ell_{n-2}$, поэтому множество $X = \Sigma_1 \cap \Sigma_{n-2}$ является выпуклым двуугольником, причем, в силу сказанного выше, $W_1 \subset X$. Заметим, что угол двуугольника X не превосходит π в силу выпуклости, и не может равняться π , так как иначе вершины A_1, A_{n-2} и A_{n-1} лежали бы на одной сферической прямой, что противоречит эйлеровости W_1 . Таким образом, единственные диаметрально противоположные точки в X — это его вершины, которые мы обозначим через Q и R .

Так как $\widehat{A}_{n-1} < \pi$, сферическая прямая ℓ_{n-1} не проходит через Q и R , и, значит, Q и R находятся в разных открытых полусферах относительно ℓ_{n-1} . Отсюда вытекает, что ℓ_{n-1} делит X на два эйлеровых треугольника, один из которых, а именно $X \cap \Sigma_{n-1}$, содержит W_1 . Оставшийся треугольник обозначим через Δ . Тогда $\Delta \cap W_1 = \ell_{n-1} \cap W_1 = A_{n-1}A_n$, где последнее равенство имеет место в силу следствия 6.37.

Для определенности будем считать, что Q — вершина треугольника Δ . Оставшуюся вершину Δ обозначим через P . Ясно, что $A_n \in A_{n-1}P$.

Пусть ℓ — сферическая прямая, проходящая через точки A_{n-1} и A_1 . По следствию 6.40, диагональ $A_{n-1}A_1$ делит W_1 на эйлеров треугольник $T = A_{n-1}A_nA_1$ и эйлеров многоугольник $Z = A_1 \cdots A_{n-1}$, причем T и Z лежат в разных полусферах относительно ℓ . Обозначим через Σ ту ограниченную ℓ полусферу, которая содержит T и, значит, A_n , а через Σ' — дополнительную полусферу.

Так как угол в вершине A_{n-1} многоугольника Z больше нуля и меньше π , прямая ℓ делит X на два эйлеровых треугольника $Y = X \cap \Sigma$ и $Y' = X \cap \Sigma'$ (рассуждения такие же, как и для прямой ℓ_{n-1}). Из сказанного выше вытекает, что $T \subset Y$ и $Z \subset Y'$.

Будем рассматривать ребро PQ треугольника Δ как непрерывную кривую $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, $P = \gamma(0)$, $Q = \gamma(1)$. Так как треугольник Δ — эйлеров, каждый малый сферический отрезок $A_{n-1}\gamma(t)$ лежит в Δ . Кроме того, длина $\rho(t) = |A_{n-1}\gamma(t)|$ такого сферического отрезка непрерывно зависит от t (это вытекает, например, из теоремы косинусов).

Сферическая прямая $A_{n-1}\gamma(t)$, $t < 1$, делит X на два эйлеровых треугольника $A_{n-1}\gamma(t)R$ и $A_{n-1}\gamma(t)Q$. Угол треугольника $A_{n-1}\gamma(t)R$ при вершине A_{n-1} обозначим через $\alpha(t)$. Тогда, как следует из теоремы косинусов, $\alpha(t)$ — непрерывная функция, причем $\alpha(0) = \widehat{A}_{n-1}$ и $\alpha(t) \rightarrow \pi$ при $t \rightarrow 1$. Так как $\widehat{A}_{n-1} < \widehat{B}_{n-1} < \pi$, существует такое $t_0 \in (0, 1)$, для которого $\alpha(t_0) = \widehat{B}_{n-1}$.

(2.1) Пусть $|A_{n-1}A_n| < \rho(t_0)$. Тогда на $A_{n-1}\gamma(t_0)$ существует точка A'_n такая, что $|A_{n-1}A'_n| = |A_{n-1}A_n|$.

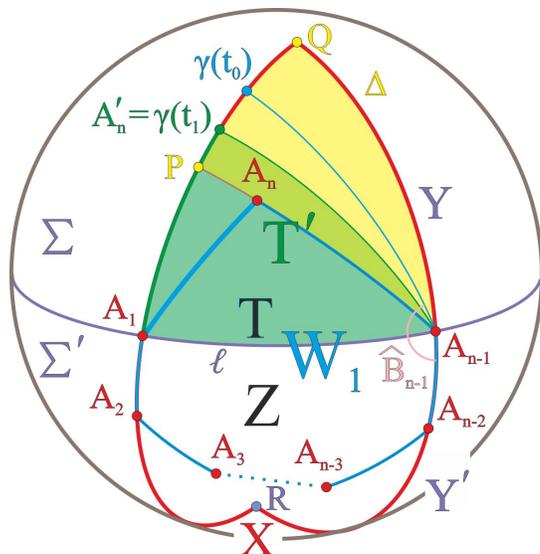


Рис. 7.3: Доказательство теоремы 7.1, случай 2.2: $|A_{n-1}A_n| \geq \rho(t_0)$.

7.2 Многогранники с одинаковой структурой границы

Пусть $W \subset \mathbb{R}^3$ и $W' \subset \mathbb{R}^3$ — некоторые многогранники, а G и G' — их графы.

Определение 7.2. Будем говорить, что изоморфизм $g: G \rightarrow G'$ графов многогранников W и W' согласован со структурой граней, если для каждой грани $F \subset W$ отображение g переводит множество вершин этой грани взаимно однозначно на множество вершин некоторой грани второго многогранника, которую мы будем обозначать через $g(F)$.

Будем говорить, что границы многогранников W и W' устроены одинаково, если существует изоморфизм g их графов, согласованный со структурой граней и такой, что для каждой грани F многогранника W ограничение g на множество вершин грани F продолжается до движения μ_F пространства \mathbb{R}^3 , совмещающего грань F и $g(F)$. Описанное только что отображение g будем называть отождествлением границ многогранников W и W' и записывать в виде $g: \partial W \rightarrow \partial W'$.

Пример 7.3. Перестроим правильный тетраэдр, заменив одну из его граней F на пирамиду с основанием F и вершиной, полученной из центра треугольника F смещением в перпендикулярном F направлении. Так как направление смещения можно выбрать двумя способами, при фиксированной достаточно малой величине смещения получаем два многогранника, у которых граница устроена одинаково, см. рис. 7.4.

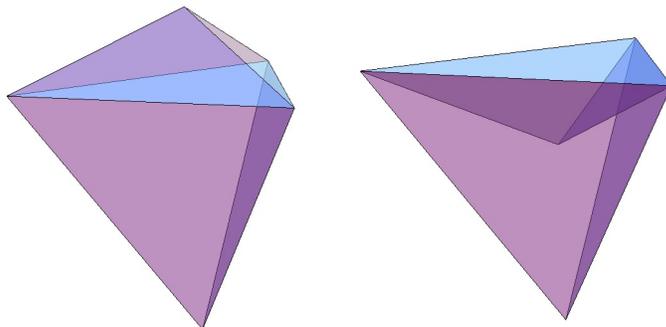


Рис. 7.4: Границы устроены одинаково, но многогранники не равные.

Однако один из этих многогранников — выпуклый, а другой — нет, поэтому они не совмещаются никаким движением пространства.

7.3 Теорема Коши о жесткости выпуклых многогранников

Возникает естественный вопрос: а можно ли построить аналог примера 7.3 так, чтобы оба многогранника были выпуклыми? Оказывается, ответ на этот вопрос отрицательный. Сейчас мы сформулируем и докажем соответствующий результат. Подробности см. в [2], [3], [4], [5], [6].

Теорема 7.4 (Коши [1]). *Предположим, что границы двух выпуклых многогранников W и W' устроены одинаково, и $g: \partial W \rightarrow \partial W'$ — некоторое отождествление их границ. Тогда существует движение $\mu: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что $\mu(W) = W'$ и ограничение его на вершины, ребра и грани многогранника W совпадает с g . Иными словами, выпуклые многогранники, у которых границы устроены одинаково, равны, причем каждое отождествление границ этих многогранников порождается движением пространства, совмещающим многогранники.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что не удастся построить движение μ . Заметим, что искомое движение μ существует, если и только если для каждого ребра e величина α_e двугранного угла многогранника W при ребре e равна величине $\alpha'_{g(e)}$ двугранного угла многогранника W' при ребре $g(e)$. Поэтому наше предположение равносильно тому, что у W существует ребро e , для которого $\alpha_e \neq \alpha'_{g(e)}$.

Каждому ребру e из W , для которого $\alpha_e \neq \alpha'_{g(e)}$, припишем знак “+”, если $\alpha_e > \alpha'_{g(e)}$, и знак “−”, если $\alpha_e < \alpha'_{g(e)}$. Если $\alpha_e = \alpha'_{g(e)}$, то такому ребру e ничего приписывать не будем.

Лемма 7.5 (Комбинаторная лемма Коши). *Предположим, что некоторые ребра границы ∂W выпуклого многогранника W помечены произвольным образом плюсами и минусами, причем хотя бы одно ребро помечено. Тогда в W существует вершина, инцидентная хотя бы одному помеченному ребру, при обходе которой число перемен знака инцидентных ей помеченных ребер меньше 4.*

Доказательство. Напомним, что при доказательстве планарности графа выпуклого многогранника (следствие 5.28) мы строили некоторое отображение ν из части границы многогранника на плоскость, являющееся гомеоморфизмом с образом и, значит, сохраняющее порядок выходящих из вершин многогранника ребер. Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что если у произвольного плоского связного простого графа пометить одни ребра плюсами, а другие — минусами, то найдется вершина, при обходе которой число перемен знака будет меньше 4 (это утверждение мы затем применим к ν -образу связной компоненты подграфа графа многогранника W , составленного из всех помеченных плюсами и минусами ребер).

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует такой плоский связный простой граф H , ребра которого помечены плюсами и минусами, и в котором число перемен знака при обходе каждой вершины не меньше 4. В частности, у такого графа степени вершин не меньше 4. Обозначим через c суммарное число таких перемен знаков, а через v , e и f — количества вершин, ребер и граней графа H , тогда, в силу предположения, $c \geq 4v$.

Заметим теперь, что c можно вычислить и по-другому: оно равно количеству перемен знаков при обходах всех граней графа H . Легко видеть, что каждая грань графа H , длина обхода которой равна $2k$ или $2k + 1$, не может давать в c вклад больший, чем $2k$. Последнее удобнее записать так: вклад в c грани, длина обхода которой равна i , не превосходит $2[i/2]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не большее, чем x .

Граф H не может иметь только одну грань, так как тогда он являлся бы деревом, а у дерева есть вершина степени 1. Таким образом, H имеет не менее двух граней, и так как граф H — простой, каждая его грань ограничена не менее чем тремя ребрами, поэтому длина каждого обхода не меньше 3. Таким образом, если f_i обозначает количество граней, у которых длины их обходов равны i , то $f_i = 0$ при $i \leq 2$ и

$$4v \leq c \leq \sum_{i \geq 3} 2[i/2] f_i.$$

Отметим также, что при обходе всех граней мы проходим каждое ребро ровно два раза, поэтому $2e = \sum_{i \geq 3} i f_i$. Кроме того, по определению, $f = \sum_{i \geq 3} f_i$, откуда, по формуле Эйлера,

$$4 = 2v - 2e + 2f \leq \sum_{i \geq 3} ([i/2] - i + 2) f_i \leq 0,$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что $[i/2] - i + 2 \leq 0$ при $i \geq 3$ (проверьте). Полученное противоречие и завершает доказательство леммы. \square

Покажем, что доказанная только что лемма противоречит тригонометрической лемме Коши.

Пусть v — вершина многогранника W , из которой выходит помеченное ребро (такая вершина существует по предположению). Рассмотрим сферы S и S' с центрами в v и $g(v)$ одинаковых радиусов, настолько малых, что ограниченные ими шары пересекают только инцидентные этим вершинам ребра и грани. Тогда $X = S \cap W$ и $X' = S' \cap W'$ — эйлеровы многоугольники. Действительно, эти пересечения — выпуклые сферические многоугольники, так как, в силу выпуклости многогранников, порождающие X и X' многогранные углы C_v и $C_{g(v)}$ выпуклы. Кроме того, так как в каждой вершине многогранника стыкуется не менее трех граней, число сторон у X и у X' не меньше 3. Наконец, углы в X и X' — это двугранные углы в C_v и $C_{g(v)}$, однако все эти двугранные углы не превосходят π в силу выпуклости C_v и $C_{g(v)}$, и, на самом деле, строго меньше π , так как смежные грани многогранника не могут лежать в одной плоскости. Осталось воспользоваться предложением 6.36.

Соответствие g порождает соответствие между вершинами и ребрами сферических многоугольников X и X' . Так как g сохраняет углы граней, у многоугольников X и X' соответствующие стороны равны. С другой стороны, расстановка знаков на ребрах многогранника W индуцирует расстановку знаков в вершинах сферического многоугольника X : знак “+” означает, что соответствующий угол многоугольника X' меньше рассматриваемого угла многоугольника X , знак “−” означает, что больше, а отсутствие метки — равенство углов.

Лемма 7.6. *В сделанных выше обозначениях, число перемен знака при движении по границе многоугольника X не меньше 4.*

Доказательство. Как мы уже отметили, X и X' являются эйлеровыми многоугольниками, поэтому они однозначно задаются последовательностями своих вершин. Пусть $X = A_1 \cdots A_n$ и $X' = B_1 \cdots B_n$, причем будем считать, что $g(A_i) = B_i$ при всех i . Для дальнейшего воспользуемся обозначениями из теоремы 7.1 и положим $\delta_i = \widehat{A}_i - \widehat{B}_i$. По сделанному выше предположению, не все δ_i равны нулю. Покажем, что тогда в последовательности $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \delta_1$ имеется не менее 4 перемен знака.

Докажем сначала, что имеется хотя бы одно изменение знака. Если это не так, то, без ограничения общности, можно считать, что для всех $k = 2, \dots, n-1$ имеем $\widehat{A}_k \leq \widehat{B}_k$, причем одно из этих неравенств — строгое (если строгое неравенство пришлось на $k = 1$ или $k = n$, то перенумеруем вершины). Но тогда, по теореме 7.1, имеем $|A_1 A_n| < |B_1 B_n|$, противоречие. Итак, имеется хотя бы одна перемен знака. Но так как мы при обходе возвращаемся к первоначальной разности δ_1 , число перемен знака должно быть четным. Таким образом, нам осталось показать, что не может быть ровно двух перемен знака.

Предположим противное. Тогда, сделав подходящие перенумерации вершин, мы получаем, что для некоторого $1 \leq m < n$ выполняется $\widehat{A}_i \leq \widehat{B}_i$ при всех $1 \leq i \leq m$, а для $m+1 \leq i \leq n$ имеем $\widehat{A}_i \geq \widehat{B}_i$, причем как в первой группе неравенств, так и во второй имеются строгие неравенства. Пусть K, L, M и N — середины сторон $A_1 A_n, A_m A_{m+1}, B_1 B_n$ и $B_m B_{m+1}$ соответственно, см. рис. 7.5. По следствию 6.38, малые сферические отрезки KL и NM делят X и X' соответственно на два эйлеровых многоугольника, удовлетворяющих условиям теоремы 7.1.

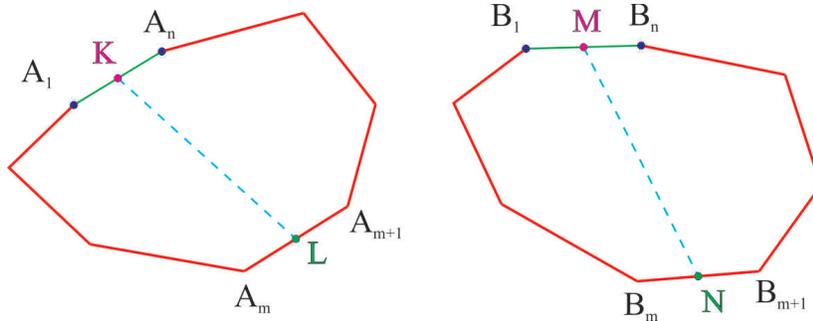


Рис. 7.5: Завершение доказательства теоремы Коши.

Тогда, по этой теореме, примененной к многоугольникам

$$KA_1 \dots A_m L \text{ и } MB_1 \dots B_m N,$$

имеем $|KL| < |MN|$, но, по той же теореме, примененной к многоугольникам

$$LA_{m+1} \dots A_n K \text{ и } NB_{m+1} \dots B_n M,$$

имеем $|KL| > |MN|$, противоречие, завершающее доказательство леммы. \square

Применяя леммы 7.5 и 7.6, получаем противоречие, которое и завершает доказательство теоремы. \square

7.4 Изгибаемые многогранники

Зададимся следующим вопросом: существуют ли такие многогранники, у которых можно менять двугранные углы, не деформируя при этом грани? Такие многогранники называются *изгибаемыми*. Теорема Коши утверждает, что все выпуклые многогранники неизгибаемы. Существуют ли (невыпуклые) изгибаемые многогранники?

Прежде чем перейти к изложению материала, отметим, что в современной литературе рассматривается более общее понятие многогранников, допускающих самопересечения. Именно в таком, более широком классе, были построены первые примеры изгибаемых многогранников (октаэдр Р. Брикара [7], 1897 год). Рассмотрим пространственный четырехугольник $ABCD$, у которого равны противоположные стороны. Если он не лежит в плоскости, то середины его диагоналей не совпадают, и через них проходит единственная прямая, которую мы обозначим через ℓ . Легко доказать (сделайте это), что прямая ℓ перпендикулярна отрезкам AC и BD . Пусть S — точка, лежащая вне прямой ℓ и прямых, проходящих через пары вершин четырехугольника $ABCD$. Рассмотрим четыре треугольника, вершины которых совпадают с S , а основания — со сторонами четырехугольника $ABCD$, см. рис. 7.6.

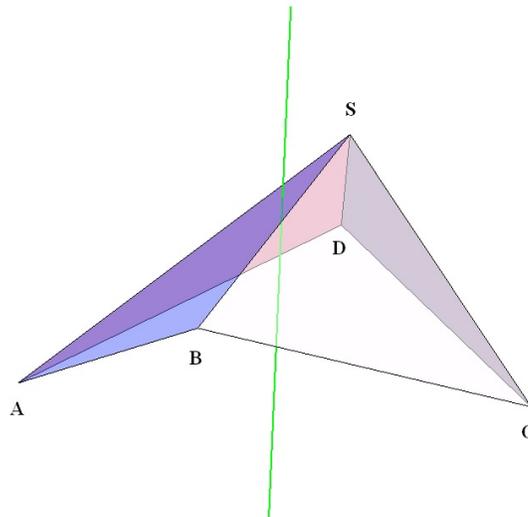


Рис. 7.6: “Половина” октаэдра Брикара

Эти треугольники лежат на соответствующем четырехгранном угле, который можно деформировать, меняя его двугранные углы, но сохраняя плоские и, значит, сохраняя построенные треугольники. Пусть S' — точка, симметричная S относительно прямой ℓ . Так как $S \notin \ell$, то $S' \neq S$. Построим теперь еще четыре треугольника, вершины которых совпадают с S' , а основания — со сторонами четырехугольника $ABCD$. Эти четыре треугольника симметричны первым четырем относительно прямой ℓ , поэтому при описанной выше деформации первого четырехгранного угла также деформируется и второй четырехгранный угол, меняя свои двугранные углы, но сохраняя плоские, вместе с построенными треугольниками. Объединение полученных 8 треугольников и образуют *октаэдр Брикара*, см. рис. 7.7.

Из построения вытекает, что октаэдр Брикара изгибаем. Динамическую реализацию этого изгиба можно посмотреть в [8].

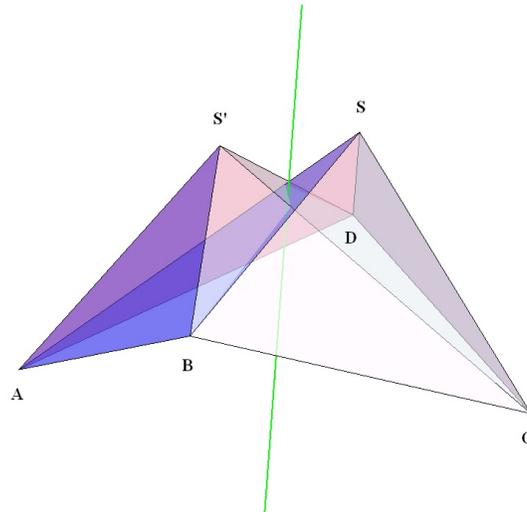


Рис. 7.7: Октаэдр Брикара

В 1977 году Р. Конелли [9] построил первый пример изгибаемого многогранника, не имеющего самопересечений. Несколько позже, в 1979 году, К. Штеффен построил пример изгибаемого многогранника без самопересечений с наименьшим на сегодняшний день числом вершин, равным 9, см. например [4] или [10] (И. Г. Максимов [11] показал, что все многогранники без самопересечений с не более чем 8 вершинами, за исключением, возможно, многогранников одного комбинаторного типа, неизгибаемы). На рис. 7.8 изображена развертка многогранника Штеффена и схема склейки. На рис. 7.9 приведен внешний вид многогранника Штеффена. Динамическую реализацию изгибания многогранника Штеффена также можно посмотреть в [8].

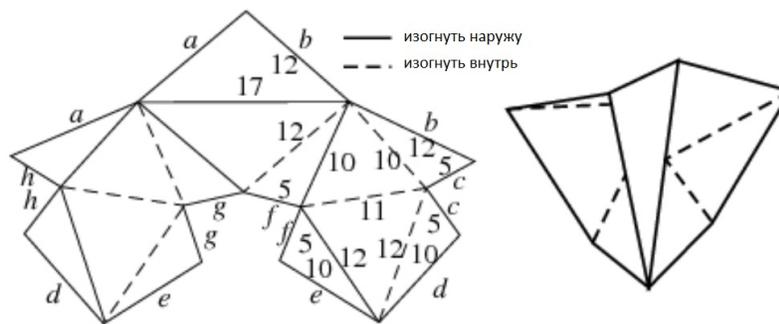


Рис. 7.8: Развертка, схема склейки и эскиз многогранника Штеффена

Существование изгибаемых многогранников без самопересечений может показаться неудивительным, так как каждый из нас наблюдал игру на баяне, мехи которого, изгибаясь, меняют свою форму, уменьшают ограниченный ими объем, за счет чего поток воздуха, вытесняемого из мехов, создает звук.

Другой хорошо известный пример таких “изгибаний” — кузнечные меха, которые используются для раздувания огня в печи.

Однако, оказывается, ни один из этих “наглядных” примеров не может моделировать изгибаемый многогранник в силу теоремы И. Х. Сабитова [12], доказанной в 1996 году и утверждающей, что изгибаемые многогранники “не дышат”. Тем самым, теорема Сабитова дает решение давно стоявшей “гипотезы кузнечных мехов”.

Теорема 7.7 (Сабитов [12]). *При изгибании многогранника без самопересечений его объем не меняется.*

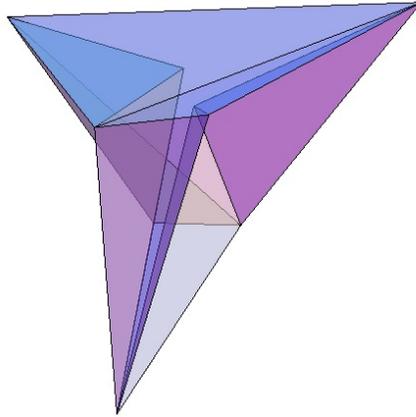


Рис. 7.9: Внешний вид многогранника Штеффена



Рис. 7.10: Баян



Рис. 7.11: Кузнечные меха

Литература к главе 7

- [1] Cauchy A.L. *Recherche sur les polyedres - premier memoire*, Journal de l'Ecole Polytechnique, 1813, N 9, 66–86.
- [2] Александров А.Д. *Выпуклые многогранники*. Москва, Ленинград, Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1950.
- [3] Айнгер М., Циглер Г. *Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней*. М.: Изд-во Мир, 2006.
- [4] Берже М. *Геометрия*. М.: Мир, 1984, т. 1, 2.
- [5] Долбилин Н.П. *Три теоремы о выпуклых многогранниках (продолжение)*. Квант, 2001, N 6, 3–10.
- [6] Долбилин Н.П. *Жемчужины теории многогранников*. К— М.: МЦНМО, 2000.
- [7] Bricard R. *Memoire sur la theorie de l'octaedre articule*. J. Math. Pures Appl., 1897, N 3, pp. 113–150.
- [8] <http://ru.wikipedia.org/>, статья *Изгибаемый многогранник*.
- [9] Connelly R. *The rigidity of polyhedral surfaces*, Math. Mag., 1979, v. 52 , N 5, pp. 275–283.
- [10] Cromwell P. R. *Polyhedra*. New York: Cambridge University Press. 1997.
- [11] Максимов И.Г. *Неизгибаемые многогранники с малым количеством вершин*. Фундам. прикл. матем. 2006, т. 12, N 1, с. 143–165.
- [12] Сабитов И. Х. *Объем многогранника как функция длин его ребер*. Фундам. прикл. матем., 1996, т. 2, N 1, с. 305–307.