

## Глава 6

# Элементы сферической геометрии

**План.** Открытые сферические круги, открытые и замкнутые подмножества сферы, непрерывные кривые на сфере, линейная связность и компоненты подмножества сферы, сферическая прямая или большая окружность, сферический отрезок, сферическая ломаная, замкнутая сферическая ломаная, сферическая ломаная без самопересечений, сферическая теорема Жордана, сферический многоугольник, сферическая ломаная, ограничивающая сферический многоугольник, граница, внутренность и внешность сферического многоугольника, дополнительные сферические многоугольники, длина ребра сферического многоугольника, касательная плоскость к сфере, величина угла в вершине сферического многоугольника, конус над множеством, многогранный угол, соответствующий сферическому многоугольнику, грани и ребра многогранного угла, смежные грани многогранного угла, плоский и двугранный углы многогранного угла, одноугольник, двугульник, выпуклые сферические многоугольники, малый и большой сферический отрезки, длина малого сферического отрезка, дополнительные сферические отрезки, эйлеров многоугольник, его диагонали, расстояние на сфере, окружности на сфере, теоремы о сферических треугольниках: теорема косинусов, теорема Пифагора, неравенство треугольника на длины сторон, теорема синусов, двойственная теорема косинусов, сумма углов.

### 6.1 Сферические фигуры

Пусть  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  — сфера радиуса  $r$  с центром в  $O$  (без ограничения общности, будем считать, что  $O$  — начало координат). Будем рассматривать на  $S^2$  топологию, индуцированную естественной топологией евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , см. раздел 2.1.5. База окрестностей этой топологии состоит из множеств (они называются *открытыми сферическими кругами*), которые получаются при пересечении открытых шаров в  $\mathbb{R}^3$  со сферой  $S^2$ . Тем самым, для сферы  $S^2$  определены ее *открытые* и *замкнутые* подмножества, непрерывные отображения в сферу  $S^2$  или из сферы  $S^2$ , в частности, определены *непрерывные кривые на  $S^2$* ; также можно говорить о *линейной связности* и о *компонентах* подмножества сферы  $S^2$ .

В этой лекции мы обсудим свойства “кусочно–линейных” объектов на  $S^2$ , имея в виду аналогичные объекты на плоскости. Некоторые свойства полностью аналогичны (теорема Жордана), некоторые — похожи (теоремы косинусов и синусов), некоторые — совершенно другие (существуют многоугольники с одной или двумя вершинами).

**Определение 6.1.** Будем называть *сферической прямой* или *большой окружностью* любое сечение сферы  $S^2$  плоскостью, проходящей через ее центр.

**Замечание 6.2.** Нетрудно видеть, что сечения сферы всевозможными плоскостями являются плоскими окружностями, среди которых сферические прямые выделяются тем, что они имеют максимально возможный радиус, и этот радиус равен радиусу сферы.

В сферической геометрии большие окружности играют роль прямых на евклидовой плоскости.

**Определение 6.3.** Евклидов круг, ограниченный большой окружностью, называется *большим кругом*.

**Определение 6.4.** Пусть  $P$  и  $Q$  — точки из  $S^2$ . Дуга сферической прямой, соединяющая точки  $P$  и  $Q$ , называется *сферическим отрезком*.

**Замечание 6.5.** Здесь мы сталкиваемся с одним из отличий геометрии сферы от геометрии плоскости. А именно, если точки  $P$  и  $Q \neq P$  не являются диаметрально противоположными, то через них проходит единственная сферическая прямая, а если являются, то таких прямых бесконечно много. Кроме того, точки  $P$  и  $Q$  делят проходящую через них сферическую прямую на две дуги, каждая из которых является сферическим отрезком с концами в  $P$  и  $Q$ .

*Сферическая ломаная* определяется ровно так же, как и обычная ломаная на плоскости, с заменой отрезков на сферические отрезки. Заметим, однако, что сферическая ломаная **не задается однозначно последовательностью своих вершин**: из всех сферических отрезков, соединяющих последовательные вершины, выбирается какой-то один. Тем не менее, все основные понятия, введенные нами при изучении ломаных в евклидовом пространстве, дословно переносятся на сферу, в частности, мы можем говорить о *замкнутой сферической ломаной* и о *сферической ломаной без самопересечений*.

**Замечание 6.6.** К сферическим ломаным отнесем также сферическую прямую, одна из точек которой выбрана в качестве вершины. Такая ломаная является замкнутой и не имеет самопересечений.

Следующая теорема легко доказывается, если воспользоваться стереографической проекцией.

**Теорема 6.7** (Сферическая теорема Жордана). Пусть  $L \subset S^2$  — сферическая ломаная без самопересечений. Тогда если  $L$  не замкнута, то множество  $S^2 \setminus L$  линейно связно, а если  $L$  замкнута, то  $S^2 \setminus L$  состоит из двух компонент.

Напомним, что для плоской замкнутой ломаной без самопересечений одна из компонент, на которые она разбивает плоскость, ограничена, а другая — нет. Для сферы это утверждение неверно, поэтому многоугольник, ограниченный ломаной, определен неоднозначно.

**Определение 6.8.** Пусть  $L \subset S^2$  — замкнутая сферическая ломаная без самопересечений, а  $\Omega$  и  $\Omega'$  — компоненты множества  $S^2 \setminus L$ . *Сферическим многоугольником, ограниченным сферической ломаной  $L$* , называется любое из множеств  $W = L \cup \Omega$  и  $W' = L \cup \Omega'$ . Для сферического многоугольника  $W$  множество  $L$  называется его *границей* и обозначается через  $\partial W$ , множество  $\Omega$  — его *внутренностью* и обозначается через  $\text{Int } W$ , а множество  $\Omega'$  — его *внешностью* и обозначается через  $\text{Out } W$  (аналогичные определения имеют место и для  $W'$ ). Сферические многоугольники  $W$  и  $W'$  называются *дополнительными друг для друга*.

Как и в случае ломаных на плоскости, верен следующий результат.

**Следствие 6.9.** Граница  $\partial W$  сферического многоугольника  $W \subset S^2$  замкнута, внутренность  $\text{Int } W$  и внешность  $\text{Out } W$  — открыты, так что многоугольники  $W$  и  $W'$  замкнуты. Более того, каждая достаточно малая круговая окрестность произвольной точки  $P \in \partial W$  разбивается ломаной  $\partial W$  на две компоненты, причем одна из них лежит в  $\text{Int } W$ , а другая — в  $\text{Out } W$ .

**Замечание 6.10.** Каждое ребро сферического многоугольника представляет собой дугу некоторой пространственной окружности, поэтому для каждого ребра сферического многоугольника стандартным образом определяется его *длина*.

Теперь определим величину угла сферического многоугольника.

**Определение 6.11.** Пусть  $P \in S^2$  — произвольная точка и  $T_P S^2$  — плоскость, проходящая через  $P$  и перпендикулярная  $OP$ . Тогда  $T_P S^2$  называется *касательной плоскостью к  $S^2$  в точке  $P$* .

**Конструкция 6.12.** Пусть на сфере задан многоугольник  $W$ , ограниченный замкнутой ломаной  $L$  с последовательными вершинами  $A_1, A_2 \dots A_n$ . Пусть  $P$  — одна из его вершин. Рассмотрим окрестность  $U_P$  точки  $P$  (она определяется так же, как и для плоскости:  $U_P$  является пересечением сферы  $S^2$  и открытого шара в  $\mathbb{R}^3$  с центром в точке  $P$  и радиусом меньшим  $r$ , при этом  $U_P$  не должна содержать других вершин ломаной и точек ребер, не выходящих из  $P$ ). Рассмотрим центральную проекцию  $W \cap U_P$  на касательную плоскость  $T_P S^2$  из центра сферы. Легко видеть, что при такой проекции  $W \cap U_P$  отображается на сектор открытого круга: в самом деле,  $U_P$  проецируется на открытый круг с центром в  $P$ , а пересечения с  $U_P$  ребер многоугольника  $W$ , выходящих из  $P$ , проецируются в радиусы этого круга.

**Определение 6.13.** Величина плоского угла, соответствующего построенному сектору, называется *величиной угла в вершине  $P$  сферического многоугольника  $W$* .

Свойства сферических многоугольников тесно связаны со свойствами многогранных углов. Дадим определение многогранного угла.

**Определение 6.14.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^3$  — произвольное множество, и  $P \in \mathbb{R}^3 \setminus X$  — произвольная точка. *Конусом  $PX$  с вершиной  $P$  над множеством  $X$*  называется объединение лучей  $PQ$  по всем  $Q \in X$ .

Из сферической теоремы Жордана легко получается следующий результат.

**Следствие 6.15.** Пусть  $L \subset S^2$  — замкнутая сферическая ломаная без самопересечений,  $\Omega$  и  $\Omega'$  — компоненты множества  $S^2 \setminus L$ , а  $O$  — центр сферы  $S^2$ . Тогда множество  $\mathbb{R}^3 \setminus OL$  состоит из двух компонент  $O\Omega$  и  $O\Omega'$ , где  $OL$ ,  $O\Omega$  и  $O\Omega'$  — конусы над  $L$ ,  $\Omega$  и  $\Omega'$  соответственно.

**Определение 6.16.** Каждое из множеств  $OL \cup O\Omega = OW$  и  $OL \cup O\Omega' = OW'$  называется *многогранным углом*, где  $W = L \cup \Omega$  и  $W' \cup \Omega'$  — соответствующие сферические многоугольники. Если  $I$  — сферический отрезок, являющийся ребром ломаной  $L$ , то конус  $OI$  является пространственным углом и называется *гранью* рассматриваемого многогранного угла. Конус над вершиной ломаной  $L$  называется *ребром* многогранного угла, а точка  $O$  — *вершиной* многогранного угла. Грани многогранного угла *смежны*, если они пересекаются по лучу. Кроме того, говорят, что сферический многоугольник  $W$  и многогранный угол  $OW$  (а также  $W'$  и  $OW'$ ) *соответствуют* друг другу.

**Замечание 6.17.** Определение многогранного угла можно дать по аналогии с многогранниками. Для этого нужно вместо пространственных многоугольников рассматривать плоские углы (в пространстве) и потребовать существование в точности одной вершины.

**Замечание 6.18.** Если, как и выше,  $r$  обозначает радиус сферы  $S^2$ , то величина пространственного угла  $OI$  равна  $|I|/r$ , где  $|I|$  — длина сферического отрезка  $I$  (как дуги окружности). Величина этого пространственного угла называется соответствующим *плоским углом* многогранного угла. Кроме того, для каждой пары смежных граней определен *двугранный угол* между ними (определение такое же, как дается в школе при изучении трехгранных углов).

**Пример 6.19** (Одноугольник). Сферическая ломаная, имеющая ровно одну вершину, является сферической прямой. Она разбивает сферу на две полусферы. Таким образом, каждый сферический одноугольник — полусфера.

**Пример 6.20** (Двуугольник). Выясним, как могут выглядеть замкнутые сферические ломаные без самопересечений, имеющие ровно две вершины  $P$  и  $Q$ . Если  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то они соединяются ровно двумя сферическими отрезками: это те отрезки, на которые  $P$  и  $Q$  делят единственную сферическую прямую, проходящую через  $P$  и  $Q$ . В этом случае двуугольник — полусфера. Если же  $P$  и  $Q$  диаметрально противоположны, то они соединяются бесконечным числом сферических отрезков, любую пару которых можно выбрать в качестве ребер двуугольника. Пусть  $e_1$  и  $e_2$  такие сферические отрезки. Тогда  $Oe_i$  — полуплоскости, проходящие через общую прямую  $\ell \supset \{P, Q\}$ . Эти полуплоскости делят  $\mathbb{R}^3$  на две компоненты. Выбираем одну из этих компонент и дополняем ограничивающими ее полуплоскостями — получаем замкнутую компоненту. Тогда двуугольник — это пересечение сферы и одной из таких замкнутых компонент.

## 6.2 Выпуклые сферические многоугольники

**Определение 6.21.** Сферический многоугольник  $W \subset S^2$  называется *выпуклым*, если конус  $OW$  — выпуклый.

**Предложение 6.22.** Сферический многоугольник *выпуклый*, если и только если соответствующий ему многогранный угол равен пересечению полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.

*Доказательство.* Пусть  $W \subset S^2$  — выпуклый сферический многоугольник. По определению, это означает выпуклость соответствующего многогранного угла  $OW$ . Дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5.21, заключаем, что выпуклость многогранного угла  $OW$  равносильна возможности представить этот угол в виде пересечения полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.  $\square$

**Следствие 6.23.** Сферический многоугольник *выпуклый*, если и только если он равен пересечению полусфер, ограниченных сферическими прямыми, проходящими через его ребра.

**Следствие 6.24.** Выпуклый сферический многоугольник  $W$  содержит диаметрально противоположные точки, если и только если  $W$  — или подразбитый одноугольник, или выпуклый подразбитый двуугольник.

*Доказательство.* Если  $W$  содержит диаметрально противоположные точки, скажем  $P$  и  $Q$ , то соответствующий ему многогранный угол  $OW$  содержит прямую  $(PQ)$ , проходящую через  $O$ . В силу предложения 6.22,

многогранный угол  $OW$  равен пересечению конечного числа содержащих его полупространств  $\Pi_i$ , ограниченных плоскостями  $\pi_i$ , проходящими через его грани. Но тогда все  $\Pi_i$ , а, значит, и все  $\pi_i$ , содержат  $(PQ)$  (если прямая содержится в полупространстве и проходит через точку полупространства, лежащую на ограничивающей это полупространство плоскости, то такая прямая обязана лежать в этой плоскости). Отсюда вытекает, что  $OW$  — двугранный угол. Если его величина равна  $\pi$ , то  $OW \cap S^2$  — полусфера. Если же его величина меньше  $\pi$ , то  $OW \cap S^2$  — выпуклый двуугольник.

Обратно, каждый подразбитый одноугольник или двуугольник содержит диаметрально противоположные точки.  $\square$

**Следствие 6.25.** Пусть  $W$  — выпуклый сферический  $n$ -угольник. Предположим, что  $n \geq 3$  и что все углы  $W$  меньше  $\pi$ . Тогда  $W$  не содержит диаметрально противоположных точек.

*Доказательство.* Действительно, если  $W$  содержит диаметрально противоположные точки, то, по следствию 6.24, он является или подразбитым одноугольником, или подразбитым двуугольником. Однако в каждом из этих случаев  $W$  содержит не более двух углов величины меньшей, чем  $\pi$ . Последнее противоречит условию  $n \geq 3$ .  $\square$

**Определение 6.26.** Пусть  $\ell$  — сферическая прямая, а  $P$  и  $Q \neq P$  — точки на  $\ell$ . Если  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то более короткую из дуг окружности  $\ell$  между точками  $P$  и  $Q$  назовем *малым сферическим отрезком*, а большую — *большим сферическим отрезком*. Такие малый и большой сферический отрезки будем называть взаимно *дополнительными*. Для диаметрально противоположных  $P$  и  $Q$  каждую из дуг между  $P$  и  $Q$  будем называть *малым сферическим отрезком*.

**Замечание 6.27.** Если точки  $P$  и  $Q \neq P$  сферы  $S^2$  не являются диаметрально противоположными, то малый сферический отрезок с концами  $P$ ,  $Q$  определен однозначно. В дальнейшем, *малый сферический отрезок, соединяющий не диаметрально противоположные точки  $P$  и  $Q$* , будем обозначать через  $PQ$ . Кроме того, для любых точек  $P, Q \in S^2$  длину малого сферического отрезка, соединяющего  $P$  и  $Q$ , обозначим через  $|PQ|$ . Отметим, что последнее определение корректно, так как для диаметрально противоположных точек  $P$  и  $Q$  все соединяющие их сферические отрезки имеют одинаковую длину. Величину  $|PQ|$  также называют *сферическим расстоянием между точками  $P$  и  $Q$* .

**Предложение 6.28.** Пусть  $P$  и  $Q$  — произвольные точки сферы  $S^2$ , а  $e$  — некоторый сферический отрезок, соединяющий  $P$  и  $Q$ . Как всегда, через  $[P, Q]$  будем обозначать евклидов отрезок с концами в  $P$  и  $Q$ . Тогда  $Oe = O[P, Q]$ , если и только если точки  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, а  $e$  — малый сферический отрезок.

*Доказательство.* Пусть  $Oe = O[P, Q]$ . Тогда  $P$  и  $Q$  не могут быть диаметрально противоположными. Действительно, если  $P$  и  $Q$  — диаметрально противоположны, то  $O[P, Q] \cap S^2 = \{P, Q\} \neq e = Oe \cap S^2$ .

Далее,  $e$  не может быть большим сферическим отрезком, так как  $e = O[P, Q] \cap S^2$ , а  $O[P, Q]$  является углом равнобедренного треугольника  $OPQ$  и, значит, этот угол меньше  $\pi$ .

Обратно, если  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то  $O$  не лежит на прямой, проходящей через  $P$  и  $Q$ , поэтому  $O[P, Q]$  — угол величины, меньшей  $\pi$ , так что  $O[P, Q] \cap S^2$  — малый сферический отрезок.  $\square$

**Следствие 6.29.** Пусть  $W \subset S^2$  — выпуклый многоугольник, а  $P$  и  $Q \neq P$  — некоторые точки из  $W$ , не являющиеся диаметрально противоположными. Тогда  $PQ \subset W$ .

*Доказательство.* Действительно, выпуклость  $W$  влечет выпуклость  $OW$ , поэтому  $[P, Q] \subset OW$ . Так как  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то, по предложению 6.28, имеем  $PQ = OPQ \cap S^2 = O[P, Q] \cap S^2 \subset OW \cap S^2 = W$ .  $\square$

**Предложение 6.30.** Пусть  $W$  — выпуклый сферический  $n$ -угольник, у которого  $n \geq 3$  и все углы которого меньше  $\pi$ . Пусть  $\ell$  — сферическая прямая, проходящая через его вершины  $A_i$  и  $A_j \neq A_i$  (эти точки не являются диаметрально противоположными в силу следствия 6.25, поэтому  $\ell$  однозначно определена и, кроме того, определен малый сферический отрезок  $A_i A_j$ ). Тогда  $\ell \cap W = A_i A_j$ .

*Доказательство.* По следствию 6.29,  $A_i A_j \subset W$ , поэтому  $A_i A_j \subset \ell \cap W$ .

Предположим теперь, что  $\ell \cap W$  содержит некоторую точку  $P$ , не лежащую на  $A_i A_j$ . Тогда, для некоторой внутренней точки  $Q$  из  $A_i A_j$ , точки  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, поэтому малый сферический отрезок  $PQ \subset \ell$  содержится в  $W$ . Таким образом, одна из точек  $A_i$  или  $A_j$  является внутренней точкой  $PQ$ . Однако это противоречит тому, что угол многоугольника  $W$  в каждой его вершине меньше  $\pi$ .  $\square$

**Предложение 6.31.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — точки на сфере  $S^2$ . Предположим, что для некоторой сферической прямой  $\ell$  все точки  $A_i$  лежат в одной из замкнутых полусфер, ограниченных  $\ell$ , причем все  $A_i$ , попавшие на  $\ell$ , расположены на дуге  $\sigma \subset \ell$ , величина которой меньше, чем половина длины  $\ell$ . Тогда существует открытая полусфера, содержащая все  $A_i$ .

*Доказательство.* Без ограничения общности, будем считать, что на  $\sigma$  попали точки  $A_1, \dots, A_k$ , а остальные точки  $A_i$ ,  $i > k$ , на  $\sigma$  не попали. Обозначим через  $\Sigma^2$  ту ограниченную  $\ell$  замкнутую полусферу, в которой лежат все  $A_i$ .

Пусть, как всегда,  $O$  — центр сферы  $S^2$ , тогда конус  $O\Sigma^2$  — это полупространство, содержащее  $\Sigma^2$ , а конус  $O\ell$  — плоскость, ограничивающая полупространство  $O\Sigma^2$ .

Пусть  $N$  — ненулевой вектор, перпендикулярный к  $O\ell$  и направленный в полупространство, дополнительное к  $O\Sigma^2$ . Тогда при всех  $i \leq k$  имеем  $\langle N, OA_i \rangle = 0$ , а при всех  $i \geq k+1$  выполняется  $\langle N, OA_i \rangle < 0$ .

Обозначим через  $M$  середину дуги  $\sigma$ , и пусть  $\xi = N + \varepsilon MO$ , где  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Тогда при всех  $i \leq k$  имеем

$$\langle \xi, OA_i \rangle = \varepsilon \langle MO, OA_i \rangle < 0,$$

так как угол между  $OM$  и  $OA_i$  меньше  $90^\circ$ , поэтому угол между векторами  $MO$  и  $OA_i$  больше  $90^\circ$ .

Далее, выберем  $\varepsilon > 0$  таким, чтобы при каждом  $i \geq k+1$ , для которого  $\langle MO, OA_i \rangle \neq 0$ , выполнялось  $\varepsilon < -\langle N, OA_i \rangle / |\langle MO, OA_i \rangle|$ . Тогда при каждом  $i \geq k+1$  имеем

$$\langle \xi, OA_i \rangle = \langle N, OA_i \rangle + \varepsilon \langle MO, OA_i \rangle < 0.$$

Пусть  $\pi$  — плоскость, проходящая через  $O$  и перпендикулярная  $\xi$ . Обозначим через  $H$  то полупространство относительно  $\pi$ , в которое направлен вектор  $\xi$ , а через  $H'$  — открытое полупространство  $H \setminus \pi$ . В силу выбора вектора  $\xi$ , имеем  $A_i \in H'$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . Таким образом, в качестве искомой открытой полусферы можно взять  $H' \cap S^2$ .  $\square$

**Следствие 6.32.** Пусть  $W$  — выпуклый сферический  $n$ -угольник. Предположим, что  $n \geq 3$  и что все углы  $W$  меньше  $\pi$ . Тогда существует открытая полусфера, содержащая  $W$ .

*Доказательство.* Пусть  $W = A_1 \cdots A_n$ . Обозначим через  $\ell$  сферическую прямую, проходящую через  $A_1 A_2$ , и положим  $\sigma = A_1 A_2$ . По предложению 6.30,  $\ell \cap W = A_1 A_2$ , поэтому  $\sigma$  удовлетворяет условию предложения 6.31. Кроме того, по следствию 6.23,  $W$  содержится в одной из замкнутых полусфер, ограниченных  $\ell$ . Таким образом, применимо предложение 6.31, в соответствии с которым существует открытая полусфера  $S'$ , содержащая все точки  $A_i$ .

Покажем, что  $W \subset S'$ . Заметим сначала, что, в силу выпуклости  $S'$ , каждый малый сферический отрезок  $A_i A_j$  лежит в  $S'$ . Таким образом,  $\partial W \subset S'$ . Далее, предположим, что некоторая точка  $P \in \text{Int } W$  содержится в  $S^2 \setminus S'$ . Так как  $S^2 \setminus S'$  — замкнутая полусфера, каждая ее точка соединяется с  $P$  некоторым сферическим отрезком, лежащим в  $S^2 \setminus S'$ . Так как  $\partial W \subset S'$ , такие сферические отрезки не пересекают  $\partial W$ , поэтому  $S^2 \setminus S' \subset \text{Int } W$ . Но тогда  $W$  содержит диаметрально противоположные точки, что противоречит следствию 6.25.  $\square$

**Конструкция 6.33.** Пусть  $W$  — сферический многоугольник, целиком лежащий в открытой полусфере  $S' \subset S^2$ . Пусть  $H'$  — открытое полупространство, для которого  $S' = S^2 \cap H'$ , и  $\pi'$  — плоскость, ограничивающая  $H'$ . Пусть  $N$  — ненулевой вектор, перпендикулярный  $\pi'$  и направленный в  $H'$ , а  $\pi''$  — плоскость, параллельная  $\pi'$  и проходящая через  $O + N$ . Обозначим через  $\nu$  радиальную проекцию из  $O$  на  $\pi''$ , ограниченную на  $S' = H' \cap S^2$ , и заметим, что  $\nu$  — гомеоморфизм. По построению,  $\nu(\partial W)$  — евклидова ломаная, ограничивающая некоторый плоский многоугольник. Так как  $\nu(\text{Int } W)$  — ограниченная компонента для  $\pi'' \setminus \nu(\partial W)$ , множество  $\nu(\text{Int } W)$  — внутренность этого многоугольника. Таким образом,  $\nu(\partial W)$  ограничивает многоугольник  $\nu(W)$ .

## 6.3 Эйлеровы многоугольники

**Определение 6.34.** Выпуклый сферический  $n$ -угольник при  $n \geq 3$  назовем *эйлеровым*, если никакие три его вершины не лежат на одной сферической прямой.

**Замечание 6.35.** Все углы эйлерова многоугольника меньше  $\pi$ , иначе вершина угла величины  $\pi$  и две смежные с ней вершины лежат на одной сферической прямой.

**Предложение 6.36.** Сферический  $n$ -угольник,  $n \geq 3$ , является эйлеровым, если и только если он — выпуклый и все его углы меньше  $\pi$ .

*Доказательство.* Действительно, эйлеров многоугольник является выпуклым по определению, и все его углы меньше  $\pi$  по замечанию 6.35. Обратное вытекает из предложения 6.30, которое гарантирует, что каждая сферическая прямая, проходящая через пару вершин рассматриваемого сферического многоугольника, не содержит ни одной из оставшихся вершин.  $\square$

Таким образом, доказанные выше утверждения для выпуклых  $n$ -угольников, у которых  $n \geq 3$  и все углы меньше  $\pi$ , являются свойствами эйлеровых многоугольников. Соберем вместе полученные результаты.

**Следствие 6.37.** Пусть  $W$  — эйлеров многоугольник. Тогда

- (1)  $W$  не содержит диаметрально противоположных точек;
- (2) для любых  $A$  и  $B \neq A$  из  $W$  имеем  $AB \subset W$ ;
- (3) если  $\ell$  — сферическая прямая, проходящая вершины  $A_i$  и  $A_j \neq A_i$  многоугольника  $W$ , то  $\ell \cap W = A_i A_j$ ;
- (4)  $W$  содержится в некоторой открытой полусфере.

**Следствие 6.38.** Пусть  $W$  — эйлеров многоугольник, и пусть  $A$  и  $B$  — различные точки из  $W$ . Тогда если  $A$  и  $B$  не лежат на одном ребре  $W$ , то каждая внутренняя точка из  $AB$  лежит в  $\text{Int } W$ .

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. некоторая внутренняя точка  $P$  из  $AB$  не лежит в  $\text{Int } W$ . По предложению 6.29,  $AB \subset W$ , поэтому такая  $P$  лежит на  $\partial W$  и, значит,  $P$  принадлежит некоторому ребру  $e$  многоугольника  $W$ .

По предложению 6.28,  $O(AB) = O[A, B]$ , поэтому существует  $P' \in (A, B)$ , для которой  $P' \in OP$ , где  $(A, B)$  обозначает евклидов интервал с концами в  $A$  и  $B$ . По предложению 6.22,  $OW$  содержится в полупространстве  $\Pi_e$ , ограниченном плоскостью  $\pi_e$ , проходящей через  $Oe$ , поэтому  $[A, B] \subset \Pi_e$ . Так как  $P' \in OP \subset Oe \subset \pi_e$ , имеем  $[A, B] \subset \pi_e$ . Пусть  $\ell_e = S^2 \cap \pi_e$  — сферическая прямая, проходящая через ребро  $e$ , тогда  $AB = S^2 \cap O[A, B] \subset \ell_e$ , но, по предложению 6.30,  $\ell_e \cap W = e$ , так что  $AB \subset e$ , поэтому  $A$  и  $B$  лежат на одном ребре многоугольника  $W$ , противоречие.  $\square$

**Определение 6.39.** Пусть  $W$  — эйлеров многоугольник. Для каждой пары  $A$  и  $B$  несмежных вершин  $W$  малый сферический отрезок  $AB$  называется *диагональю*  $W$ .

**Следствие 6.40.** Каждая диагональ делит эйлеров многоугольник на два эйлеровых многоугольника, один из которых лежит в одной полусфере относительно сферической прямой, проходящей через эту диагональ, а другой — в противоположной полусфере.

*Доказательство.* По следствию 6.37, рассматриваемый эйлеров многоугольник  $W$  содержится в некоторой открытой полусфере  $S'$ . Теперь, в обозначениях конструкции 6.33, спроецируем многоугольник  $W$  на плоскость  $\pi''$  в выпуклый многоугольник  $\nu(W)$ . Так как у  $W$  все углы меньше  $\pi$ , то же самое имеет место и для  $\nu(W)$ . Теперь утверждение следствия вытекает из соответствующего факта школьной геометрии: диагональ выпуклого плоского многоугольника делит его на два выпуклых многоугольника.  $\square$

**Замечание 6.41.** Отметим, что следствие 6.40 нельзя обобщить на все выпуклые многоугольники. В качестве примера рассмотрим произвольный подразбитый одноугольник, в котором нет диаметрально противоположных вершин. Тогда каждая его диагональ лежит на его границе и, значит, не делит многоугольник.

**Следствие 6.42.** Пусть  $W$  — эйлеров многоугольник, а  $W'$  — дополнительный к нему сферический многоугольник. Тогда  $W'$  эйлеровым не является.

*Доказательство.* По следствию 6.37,  $W$  содержится в открытой полусфере, поэтому  $W'$  содержит дополнение к этой открытой полусфере, т.е. содержит замкнутую полусферу и, значит, диаметрально противоположные точки. Противоречие с тем же следствием 6.37.  $\square$

**Замечание 6.43.** Из следствия 6.37 вытекает, что все ребра эйлерова многоугольника — малые сферические отрезки, отличные от сферической полупрямой. Тем самым, каждая пара последовательных вершин эйлерова многоугольника однозначно определяет ребро этого многоугольника, соединяющее эти вершины. Следствие 6.42 влечет, что граница эйлерова многоугольника однозначно определяет тот из двух многоугольников, который и является эйлеровыми. Итак, последовательность вершин эйлерова многоугольника однозначно его определяет, поэтому в дальнейшем мы будем обозначать эйлеров многоугольник с последовательными вершинами  $A_1, \dots, A_n$  просто как  $A_1 \cdots A_n$ .

**Замечание 6.44.** Замечание 6.43 можно обобщить и на сферические многоугольники, не содержащие диаметрально противоположных точек и такие, что их границы целиком лежат в некоторых открытых полусферах. Действительно, последовательные вершины таких многоугольников соединяются однозначно определенными малыми сферическими отрезками, а дополнительный многоугольник содержит замкнутую полусферу и, поэтому, диаметрально противоположные точки. Такие многоугольники с последовательными вершинами  $A_1, \dots, A_n$  мы также будем обозначать через  $A_1 \cdots A_n$ .

**Следствие 6.45.** Пусть  $W_1$  и  $W_2$  — эйлеровы многоугольники. Предположим, что

- (1) многоугольники  $W_1$  и  $W_2$  пересекаются по их общему ребру  $e$ ;
- (2) в каждой концевой точке ребра  $e$  суммарный угол этих многоугольников не превосходит  $\pi$ ;
- (3) объединение  $W_1 \cup W_2$  содержится в открытой полусфере.

Тогда  $W_1 \cup W_2$  — эйлеров многоугольник, если в качестве его вершин рассматривать вершины  $W_1$  и  $W_2$ , не содержащиеся в  $e$ , а также те концевые точки ребра  $e$ , в которых суммарный угол многоугольников  $W_1$  и  $W_2$  меньше  $\pi$ .

*Доказательство.* Пусть  $S'$  — открытая полусфера, содержащая  $W_1 \cup W_2$ . Воспользуемся конструкцией 6.33 и спроецируем  $S'$  радиальной проекцией  $\nu$  на плоскость  $\pi''$ . Тогда  $\nu(W_1)$  и  $\nu(W_2)$  — плоские выпуклые многоугольники, для которых выполняются аналогичные условия. Непосредственно проверяется, что  $\nu(W_1) \cup \nu(W_2)$  — выпуклый многоугольник. Если угол в образе концевой вершины ребра  $e$  равен  $\pi$ , то выкинем этот образ из множества вершин многоугольника  $\nu(W_1) \cup \nu(W_2)$ . В результате получим выпуклый многоугольник  $W''$ , все углы которого меньше  $\pi$ . Но тогда  $\nu^{-1}(W'')$  — эйлеров многоугольник, совпадающий как множество с  $W_1 \cup W_2$ .  $\square$

**Замечание 6.46.** Условие (3) из следствия 6.45 существенно: каждый двуугольник  $W$  с углом, меньшим  $\pi$ , разбивается сферическим отрезком, соединяющим внутренние точки сторон из  $W$ , на два эйлеровых треугольника  $W_1$  и  $W_2$ , удовлетворяющих пунктам (1) и (2). Однако двуугольник  $W$  не является эйлеровым.

## 6.4 Сферические треугольники

Выясним, какие тройки точек сферы являются вершинами эйлеровых треугольников, и сколько эйлеровых треугольников может иметь один и тот же набор вершин.

**Предложение 6.47.** Три точки сферы  $S^2$  являются вершинами эйлерова треугольника тогда и только тогда, когда они не лежат на одной сферической прямой. Более того, для любой такой тройки точек эйлеров треугольник определен однозначно.

*Доказательство.* Если  $W$  — эйлеров треугольник, то его вершины не лежат на одной сферической прямой по определению.

Обратно, рассмотрим три произвольные точки  $A_1, A_2$  и  $A_3$  на сфере  $S^2$ , не лежащие на одной сферической прямой. Проведем через  $A_1$  и  $A_2$  сферическую прямую  $\ell$ , тогда  $A_3$  не лежит на  $\ell$ , и  $A_1A_2 \subset \ell$  имеет длину меньше половины длины  $\ell$ . Поэтому, в силу предложения 6.31, точки  $A_i$  лежат в некоторой открытой полусфере  $S'$ . Применим конструкцию 6.33 и спроецируем полусферу  $S'$  на плоскость  $\pi''$  радиальной проекцией  $\nu$  из центра  $O$  сферы  $S^2$ . Точки  $\nu(A_i)$  не лежат на одной прямой, так как вершины  $A_i$  не лежат на одной сферической прямой. Поэтому точки  $\nu(A_i)$  являются вершинами некоторого невырожденного треугольника  $T'' \subset \pi''$ . Но тогда  $OT''$  — выпуклый трехгранный угол, поэтому  $\nu^{-1}(T'')$  — выпуклый сферический треугольник с вершинами  $A_i$ . Так как его вершины не лежат на одной сферической прямой, он — эйлеров.

Однозначная определенность эйлерова треугольника следует из замечания 6.43.  $\square$

**Следствие 6.48.** Пусть  $T$  — эйлеров треугольник, а  $B_1, B_2$  и  $B_3$  — точки из  $T$ , не лежащие на одной сферической прямой. Тогда единственный эйлеров треугольник  $B_1B_2B_3$  содержится в  $T$ .

*Доказательство.* Рассмотрим ту же проекцию  $\nu$  для треугольника  $T$ . Тогда точки  $\nu(B_i)$  лежат в треугольнике  $T'' = \nu(T)$ . Поэтому эти точки являются вершинами невырожденного треугольника  $T''_1$ , поэтому единственный эйлеров треугольник с вершинами  $B_i$  — это  $\nu^{-1}(T''_1) \subset \nu^{-1}(T'') = T$ .  $\square$

## 6.5 Расстояние на сфере

Расстояние между двумя точками на плоскости — это длина отрезка прямой, соединяющего эти две точки. Естественно поэтому определить расстояние между точками на сфере как длину соответствующего отрезка сферической прямой. Однако, на сфере такой отрезок не один.

**Определение 6.49.** *Расстоянием между двумя точками на сфере* называется длина кратчайшего сферического отрезка, соединяющего эти две точки.

**Замечание 6.50.** Возможны два разных случая.

- (1) Рассматриваемые точки не являются диаметрально противоположными. Тогда они соединяются ровно двумя сферическими отрезками, причем длины этих отрезков различны. Расстояние в этом случае — это длина более короткого сферического отрезка.
- (2) Рассматриваемые точки диаметрально противоположны. Тогда их соединяет бесконечно много сферических отрезков, и все они имеют одинаковую длину  $\pi r$  — это и есть расстояние между рассматриваемыми точками.

Выпишем явную формулу для расстояния между двумя точками на сфере. Пусть  $\xi, \eta$  — радиус-векторы этих точек; расстояние — это длина дуги окружности радиуса  $r$ , заключенной между этими векторами. Таким образом, расстояние  $\rho$  находится по формуле  $\rho = r\alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\xi$  и  $\eta$ . Вспоминая, что  $\langle \xi, \eta \rangle = |\xi| \cdot |\eta| \cos \alpha$  и  $|\xi| = |\eta| = r$ , получим для расстояния формулу  $r^2 \cos(\rho/r) = \langle \xi, \eta \rangle$ .

## 6.6 Окружности на сфере

Дадим метрическое определение сферической окружности по аналогии с тем, как это делается на евклидовой плоскости.

**Определение 6.51.** *Окружностью с центром в точке  $P$  радиуса  $a$  на сфере* называется множество точек сферы, находящихся от  $P$  на расстоянии  $a$ .

Очевидно, окружностями на сфере являются обычные евклидовы окружности, т.е. пересечения сферы с плоскостями. Центр такой окружности лежит на пересечении сферы с прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно плоскости окружности (см. рис. 6.1). Отметим, что у каждой окружности на сфере имеется два центра и два радиуса. Кроме того, большая окружность на сфере — это одновременно и окружность и прямая; у таких окружностей оба радиуса совпадают и равны  $\pi r/2$ .

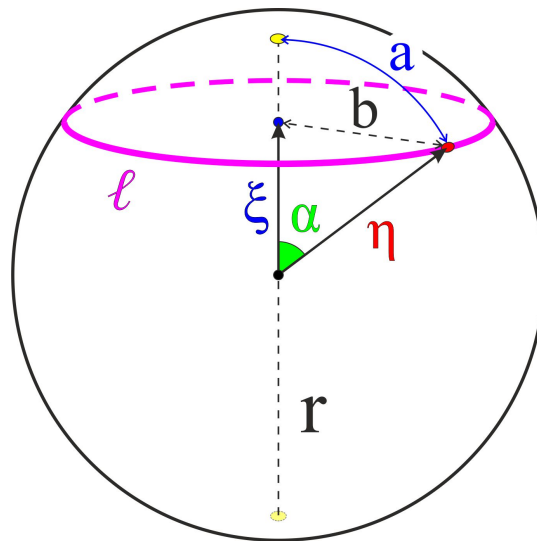


Рис. 6.1: Окружности на сфере.



Получим общую формулу, выражающую длину окружности через ее радиус (напомним, что на плоскости отношение длины окружности к радиусу равно  $2\pi$ ). Пусть  $\xi$  — радиус-вектор евклидова центра окружности,  $\eta$  — радиус-вектор произвольной точки, лежащей на окружности, а  $b$  — евклидов радиус окружности, см. рис. 6.1. Тогда длина окружности равна  $2\pi b$ , причем  $b = r \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\xi$  и  $\eta$ . Кроме того, сферический радиус  $a$  окружности равен  $r \alpha$ . Исключая из этих равенств  $\alpha$  и  $b$ , получим формулу, связывающую длину  $\ell(a)$  сферической окружности с ее радиусом:  $\ell(a) = 2\pi r \sin(a/r)$ .

Заметим, что, если  $a/r$  очень мало, то  $\sin(a/r)$  близко к  $a/r$  и в пределе получаем евклидову формулу, так как

$$\lim_{(a/r) \rightarrow 0} \frac{\ell(a)}{a} = 2\pi.$$

## 6.7 Теоремы о сферических треугольниках

Всюду ниже в этом параграфе  $A, B, C$  обозначают вершины некоторого эйлерова треугольника,  $\alpha, \beta, \gamma$  — величины его углов при этих вершинах,  $a, b, c$  — длины его противоположных сторон, см. рис. 6.2.

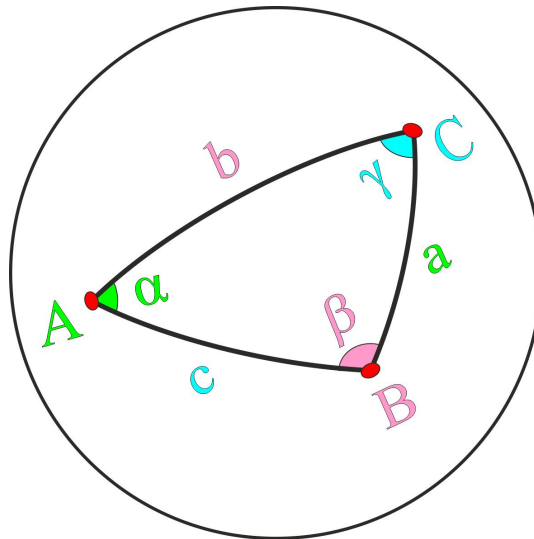


Рис. 6.2: Сферический треугольник.

В сферической геометрии действуют другие формулы “решения треугольников”, чем в евклидовой; сейчас мы получим эти формулы.

Выразим длину стороны  $a$  через длины сторон  $b, c$  и угол  $\alpha$  между этими сторонами.

**Предложение 6.52** (Теорема косинусов). *Имеет место формула*

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \alpha.$$

*Доказательство.* Пусть  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — радиус-векторы вершин  $A, B, C$  треугольника соответственно. Тогда, в силу эйлеровости треугольника  $ABC$ , векторы  $\xi_i$  линейно независимы.

Пусть  $\eta, \zeta$  — какие-нибудь касательные векторы к сторонам  $b, c$  треугольника в точке  $A$ , тогда

$$\cos \alpha = \frac{\langle \eta, \zeta \rangle}{|\eta| \cdot |\zeta|}$$

вне зависимости от длин этих векторов (мы воспользуемся этим ниже и выберем эти векторы удобными для вычислений).

Вектор  $\eta$  касается большого круга, проходящего через центр сферы (совпадающий, как мы условились, с началом координат) и точки  $A, C$ , поэтому можно положить  $\eta = \xi_3 - \lambda \xi_1$ , где  $\lambda$  — некоторое число (выбранный

вектор  $\eta$  отличен от нуля в силу линейной независимости  $\xi_1$  и  $\xi_3$ ). Чтобы найти  $\lambda$ , умножим предыдущее равенство скалярно на  $\xi_1$ ; получим

$$\langle \xi_1, \eta \rangle = \langle \xi_1, \xi_3 \rangle - \lambda \langle \xi_1, \xi_1 \rangle.$$

Левая часть равенства равна нулю, так как вектор  $\xi_1$  — радиус сферы, проведенный в точку  $A$ , а  $\eta$  касается сферы в этой точке. Так как угол между  $\xi_1$  и  $\xi_3$  равен  $b/r$ , имеем  $\langle \xi_1, \xi_3 \rangle = r^2 \cos(b/r)$ ; наконец  $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = r^2$ . Отсюда находим  $\lambda$  и  $\eta$ :

$$\lambda = \cos \frac{b}{r}, \quad \eta = \xi_3 - \xi_1 \cos \frac{b}{r}.$$

Аналогично получаем

$$\zeta = \xi_2 - \xi_1 \cos \frac{c}{r},$$

Вычислим скалярные произведения этих векторов и подставим в формулу для косинуса  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \langle \eta, \zeta \rangle &= r^2 \left( \cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} \right), \\ \langle \eta, \eta \rangle &= r^2 \left( 1 - \cos^2 \frac{b}{r} \right) = r^2 \sin^2 \frac{b}{r}, \quad \langle \zeta, \zeta \rangle = r^2 \left( 1 - \cos^2 \frac{c}{r} \right) = r^2 \sin^2 \frac{c}{r}, \end{aligned}$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{\cos(a/r) - \cos(b/r) \cos(c/r)}{\sin(b/r) \sin(c/r)},$$

что немедленно влечет требуемое равенство.  $\square$

**Следствие 6.53** (Сферическая теорема Пифагора). Пусть треугольник  $ABC$  прямоугольный, т.е.  $\alpha = \pi/2$ . Тогда

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}.$$

*Доказательство.* Каждый прямоугольный треугольник является эйлеровым, поэтому достаточно применить предложение 6.52.  $\square$

**Следствие 6.54** (Строгое неравенство треугольника для длин сторон эйлерова треугольника). Имеет место неравенство  $c < a + b$ .

*Доказательство.* Так как при сжатии/растяжении пространства длины сторон треугольника умножаются на одно и то же число и, значит, неравенство треугольника сохраняется, можно считать, что радиус сферы равен 1. Так как треугольник — эйлеров, длины его сторон и величины его углов лежат на интервале  $(0, \pi)$ . Из предложения 6.52, положительности  $\sin b$  и  $\sin c$ , а также неравенства  $\cos \alpha < 1$ , вытекает, что

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha < \cos b \cos c + \sin b \sin c = \cos(c - b).$$

Пусть  $c \geq b$ , тогда  $0 \leq c - b < \pi$ , так что из строгой монотонности косинуса на  $[0, \pi)$  вытекает справедливость неравенства  $a > c - b$ , поэтому  $c < a + b$ . Если же  $c < b$ , то и подавно  $c < a + b$ .  $\square$

**Задача 6.55.** Докажите, что при  $r \rightarrow \infty$  и фиксированных длинах сторон сферическая теорема косинусов переходит в евклидову, а именно

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha_0 + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

где  $\alpha_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha$ .

**Предложение 6.56** (Сферическая теорема синусов). Имеет место равенство

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(a/r)} = \frac{\sin \beta}{\sin(b/r)} = \frac{\sin \gamma}{\sin(c/r)}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим выражение  $\sin \alpha / \sin(a/r)$ , выразим  $\sin \alpha$  из теоремы косинусов, а синусы выразим через косинусы. Получим

$$\frac{\sin \alpha}{\sin\left(\frac{a}{r}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{a}{r}\right) - \cos^2\left(\frac{b}{r}\right) - \cos^2\left(\frac{c}{r}\right) + 2 \cos\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{b}{r}\right) \cos\left(\frac{c}{r}\right)}}{\sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right)}.$$

Это выражение симметрично по  $a, b, c$ .  $\square$

**Замечание 6.57.** При  $r \rightarrow \infty$  равенство из предложения 6.56 переходит в евклидову теорему синусов.

Приведенные выше формулы были естественными аналогами соответствующих формул евклидовой геометрии (хотя и отличались от них “количественно”). Однако в сферической геометрии существуют утверждения, не имеющие аналогов в евклидовом случае. Одно из важнейших — выражение для стороны треугольника через его углы.

**Предложение 6.58** (Двойственная сферическая теорема косинусов). *Имеет место равенство*

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \frac{a}{r}.$$

*Доказательство.* Это предложение можно получить из теоремы косинусов чисто алгебраическими выкладками. Однако мы приведем другое доказательство, использующее еще одно специфическое для сферы понятие полярных треугольников.

Рассмотрим треугольник  $ABC$  и построим по нему другой треугольник  $A'B'C'$  следующим образом. Проведем через вершины  $B, C$  и центр сферы плоскость  $\mu$  и через  $A'$  обозначим ту точку пересечения сферы с прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно  $\mu$ , которая лежит в той же полусфере, отсекаемой этой плоскостью, что и  $A$ . Аналогично построим вершины  $B', C'$ . Если через  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  обозначить радиус-векторы вершин  $A, B, C$ , а через  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$  — радиус-векторы вершин  $A', B', C'$ , то полярный треугольник определяется равенствами

$$\langle \xi_i, \xi'_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad \langle \xi_i, \xi'_i \rangle > 0$$

Отсюда немедленно следует, что соотношение полярности взаимно (т.е. треугольник  $ABC$  полярен к  $A'B'C'$ ). Обозначим через  $a', b', c'$  длины сторон треугольника  $A'B'C'$ , противоположных одноименным вершинам, и покажем, что углы треугольника  $ABC$  и стороны треугольника  $A'B'C'$  связаны равенствами

$$\alpha + \frac{a'}{r} = \beta + \frac{b'}{r} = \gamma + \frac{c'}{r} = \pi.$$

Действительно, так как угол между векторами  $\xi'_2$  и  $\xi'_3$  равен  $a'/r$ , а  $\alpha$  — это угол между ортогональными этим векторам плоскостями  $(O, \xi_1, \xi_3)$  и  $(O, \xi_1, \xi_2)$ , то углы  $a'/r$  и  $\alpha$  либо совпадают, либо дополняют друг друга до  $\pi$ . В действительности верно второе; чтобы в этом убедиться, достаточно посмотреть на всю конструкцию из точки, лежащей на луче  $OA$  (см. рис. 6.3).

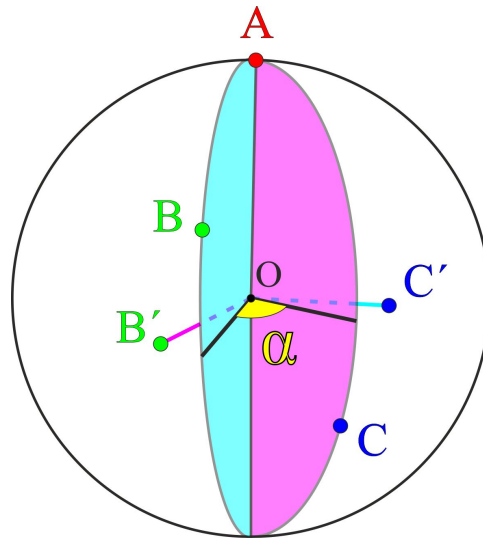


Рис. 6.3: Соотношения в полярных треугольниках.

Из приведенного равенства и теоремы косинусов, записанной для полярного треугольника  $A'B'C'$ , немедленно следует двойственная теорема косинусов.  $\square$

**Замечание 6.59** (Признаки равенства треугольников). Назовем два сферических треугольника *равными*, если у них равны углы и стороны. Подобно евклидовой теории, из теоремы косинусов следуют признаки равенства треугольников “по трем сторонам”, по “двум сторонам и углу между ними” и “по стороне и двум прилежащим к ней углам” (докажите!). Однако, в отличие от евклидовой, в сферической геометрии есть еще один признак — “признак равенства (эйлеровых) треугольников по трем углам” (он сразу же вытекает из двойственной теоремы косинусов или из соотношения между сторонами и углами полярных треугольников). Таким образом, углы сферического треугольника полностью его определяют.

**Задача 6.60.** Выясните, в какую формулу евклидовой геометрии переходит двойственная теорема косинусов в пределе при  $r \rightarrow \infty$ .

На сфере не верна евклидова теорема о сумме углов треугольника: например, треугольник, с вершинами в точках  $(0, 0, r)$ ,  $(0, r, 0)$ ,  $(r, 0, 0)$  имеет три прямых угла! Оказывается, сумма углов треугольника на сфере всегда больше  $\pi$ ; более того, разность этих двух чисел пропорциональна площади треугольника.

**Предложение 6.61** (Сумма углов сферического треугольника). Обозначим через  $S$  площадь треугольника  $ABC$ . Тогда

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{r^2}.$$

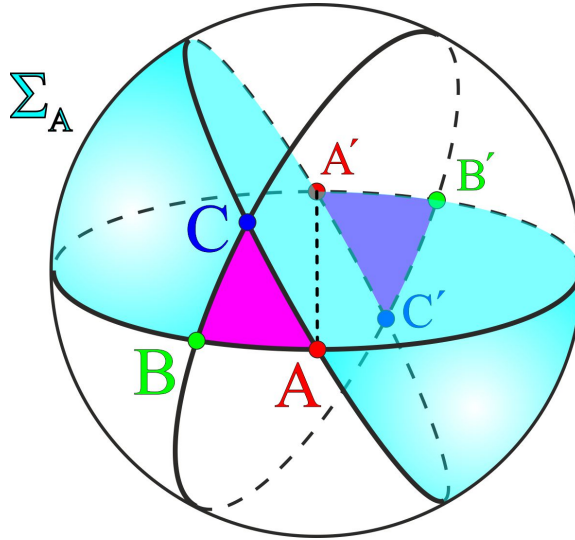


Рис. 6.4: Сумма углов сферического треугольника.

*Доказательство.* Продолжим стороны  $AB$  и  $AC$  нашего треугольника до больших кругов. Эти круги разбивают сферу на четыре части, причем только одна из этих частей содержит треугольник  $ABC$ . Рассмотрим эту последнюю часть, объединенную с ее центрально симметричной копией (относительно центра сферы), и обозначим через  $\Sigma_A$  площадь полученной фигуры (см.рис. 6.4). Ясно, что  $\Sigma_A$  пропорциональна углу  $\alpha$ ; кроме того, если  $\alpha = \pi$ , то  $\Sigma_A$  — это площадь сферы, т.е.  $4\pi r^2$ . Отсюда получаем, что  $\Sigma_A = 4r^2\alpha$ . Аналогично определяем и находим  $\Sigma_B = 4r^2\beta$  и  $\Sigma_C = 4r^2\gamma$ . Заметим теперь, что вместе эти три фигуры покрывают всю сферу, но при этом трижды (вместо одного раза) считается площадь треугольника  $ABC$  и центрально симметричного равному ему треугольника  $A'B'C'$ . Таким образом,

$$4r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi r^2 + 4S,$$

откуда, после деления на  $4r^2$ , следует требуемое равенство.  $\square$

**Замечание 6.62.** При доказательстве (и даже формулировке) последнего утверждения мы обошли вопрос о том, что такое площадь сферической области. Этот вопрос (для произвольной поверхности) детально обсуждается в курсе анализа; мы фактически использовали только три свойства площади: аддитивность (площадь

объединения фигур, пересекающихся лишь по кривым, равна сумме их площадей), инвариантность (площади частей сферы, отличающиеся на движение, например на поворот, равны) и нормировку (площадь всей сферы равна  $4\pi r^2$ ). Легко понять, что последняя теорема останется справедливой, если в качестве  $S$  взять любую положительную функцию от сферической фигуры, обладающую этими тремя свойствами (она может быть определена не для всех фигур, но, по крайней мере, должна быть определена для треугольников и их конечных объединений) — в действительности, конечно, такая функция ровно одна.

## Литература к главе 6

- [1] Степанов Н.Н. *Сферическая тригонометрия*. М.—Л.: ОГИЗ, 1948.
- [2] Вентцель М.К. *Сферическая тригонометрия*. 2 изд, ИГКЛ, 1948.