Глава 5

Многогранники

План. Многоугольник, ограниченным замкнутой ломаной без самопересечений, внутренность, внешность и граница многоугольника, пространственный многоугольник, плоскость многоугольника, многогранная поверхность, многоугольники, смежные по ребру, цепочка многоугольников, грани, ребра и вершины многогранной поверхности, инцидентные элементы многогранной поверхности, граничные и внутренние ребра многогранной поверхности, теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности, многогранник, ограниченный замкнутой многогранной поверхностью, внутренность, внешность и граница многогранника, граф и двойственный граф многогранной поверхности, выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник, геометрическая реализация графа многогранной поверхности с выпуклыми гранями, планарность графа и двойственного графа выпуклого многогранника, формула Эйлера для выпуклых многогранников, правильный многогранник, платоновы тела, ёж выпуклого многогранника, теорема Минковского о еже, многоугольник на поверхности выпуклого многогранника, внутренность, внешность, граница, угол многоугольника на поверхности выпуклого многогранника.

5.1 Многоугольники

Теорема 3.7 утверждает, что для каждой замкнутой ломаной $L \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений множество $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит из двух компонент. Также в доказательстве этой теоремы мы определили функцию $\eta(P)$ точек множества $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$, которая на одной из компонент равна 0, а на другой 1. Обозначим эти компоненты через Ω_k, $k = 0, 1$, так чтобы на Ω_k функция η принимала значение k. Напомним, что для вычисления $\eta(P)$ мы вводили специальные декартовы координаты x, y, в которых все смежные вершины ломаной L имели разные x-координаты.

Следствие 5.1. *Множество Ω_1 ограничено, а множество Ω_0 неограничено. Функция η не зависит от выбора декартовых координат x, y.*

Доказательство. Так как ломаная L состоит из конечного числа отрезков, она представляет собой ограниченное подмножество плоскости, т.е. существует открытый круг $U_r(P)$ радиуса $r > 0$ с центром в некоторой точке $P \in \mathbb{R}^2$ такой, что $L \subset U_r(P)$, см. рис. 5.1. Выберем точку $Q \in \mathbb{R}^2$ на граничной окружности круга $U_r(P)$ так, чтобы вектор $\overrightarrow{PQ}$ был сонаправлен с осью y. Тогда луч ℓ_Q не имеет с открытым кругом $U_r(P)$ общих точек, а следовательно, не пересекает L, так что $\eta(Q) = 0$ и, значит, $Q \in \Omega_0$. Так как для любой точки $Q' \in \ell_Q$ луч $\ell_{Q'}$ также не пересекает L, множество Ω_0 содержит луч ℓ_Q и поэтому неограничено.

Дополнение к кругу $U_r(P)$ линейной связно (предъявите в явном виде кривую, соединяющую данные произвольные точки дополнения), поэтому оно содержится в Ω_0. Но тогда Ω_1 содержится в $U_r(P)$ и, следовательно, ограничено.

Так как ограниченность и неограниченность множеств Ω_i не зависит от выбора декартовых координат x, y, функция η от выбора этих координат тоже не зависит. $\square$

Определение 5.2. *Многоугольником F, ограниченным замкнутой ломаной $L \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений*, называется объединение L и ограниченной компоненты Ω_1 множества $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$. Принято также говорить, что ломаная L *ограничивает* Ω_1. Ограниченная компонента Ω_1 называется *внутренностью* F и обозначается через $\operatorname{Int} F$, неограниченная Ω_0 — *внешностью* F и обозначается через $\operatorname{Out} F$, а ломаная L — *границей* F и обозначается через ∂F.

Замечание 5.3. Так как ломаная — замкнутое подмножество плоскости, граница ∂F многоугольника F замкнута, поэтому ее дополнение $\Omega_0 \cup \Omega_1$ — открыто, т.е. вместе с каждой точкой содержит и некоторый открытый круг с центром в этой точке. Но круг — линейно связное множество, поэтому он целиком содержится в той

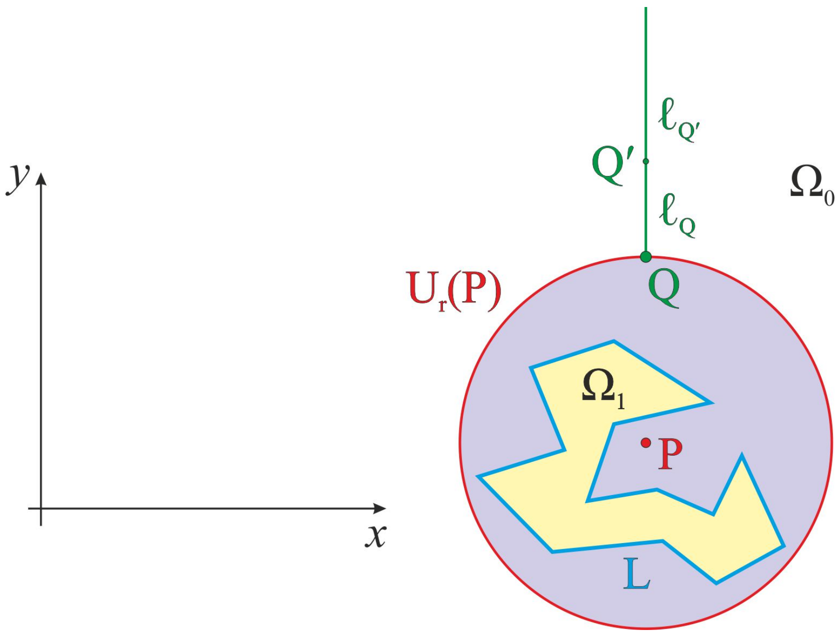

Рис. 5.1: Ломаная разбивает плоскость на ограниченную и неограниченную части.

компоненте Ω_i, которой принадлежит его центр. Таким образом, внутренность $\operatorname{Int} F$ и внешность $\operatorname{Out} F$ многоугольника F также являются открытыми множествами, а сам многоугольник $F = \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Out} F$ — замкнутым множеством.

5.2 Многогранные поверхности. Определение многогранников

Пусть π — (аффинная) плоскость в $\mathbb{R}^3$, т.е. множество точек вида $\xi + v$, где v пробегает некоторое двумерное линейное подпространство $V \subset \mathbb{R}^3$, а ξ — фиксированная точка из $\mathbb{R}^3$. Ясно, что все те объекты и построения, которые мы делали в стандартной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, можно проделать и в плоскости π.

Определение 5.4. *Пространственным многоугольником* будем называть многоугольник, построенный в некоторой аффинной плоскости $\pi \subset \mathbb{R}^3$, при этом π назовем *плоскостью многоугольника*.

Замечание 5.5. Аналогичным образом определяется любая плоская фигура, лежащая в пространстве, например, окружность, круг и т.д. Кроме того, говоря про внутренние и внешние точки пространственного многоугольника $F \subset \pi$, мы будем понимать соответствующие точки из $\operatorname{Int} F \subset \pi$ и $\operatorname{Out} F \subset \pi$.

Замечание 5.6. Каждый пространственный многоугольник F, так же, как и его граница ∂F, являются замкнутыми подмножествами не только плоскости, в которой они лежат, но и всего пространства $\mathbb{R}^3$. Однако внутренность $\operatorname{Int} F$ и внешность $\operatorname{Out} F$ открытыми в $\mathbb{R}^3$ не являются (проверьте).

Определение 5.7. *Многогранной поверхностью $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^3$* называется конечное семейство $\{F_i\}$ пространственных многоугольников $F_i \subset \mathbb{R}^3$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для каждой пары различных многоугольников F_i и F_j их пересечение $F_i \cap F_j$ или пусто, или состоит из одной, общей для них вершины, или из одного, общего для них ребра; если F_i и F_j имеют общее ребро e, то они называются *смежными по* e;

(2) для каждого многоугольника F_i и каждого его ребра e существует не более одного многоугольника F_j, смежного с F_i по e;

(3) для каждой пары различных многоугольников F и F' существует последовательность многоугольников $F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}$ такая, что $F_{i_1} = F$, $F_{i_m} = F'$, и при каждом $1 < k \le m$ многоугольники $F_{i_{k-1}}$ и F_{i_k} смежны; такую последовательность будем называть *цепочкой многоугольников, соединяющей F и F'*;

(4) для каждой пары многоугольников F и F', пересекающихся по вершине, существует соединяющая их цепочка, все многоугольники которой также содержат эту вершину;

(5) никакие два смежных многоугольника F_i и F_j не лежат в одной плоскости.

Многоугольники F_i называются *гранями* $\mathcal{F}$, отрезки в $\mathbb{R}^3$, совпадающие с ребрами граней, — *ребрами* $\mathcal{F}$, а точки в $\mathbb{R}^3$, совпадающие с концами ребер, — *вершинами* $\mathcal{F}$.

На рис. 5.2 приведены примеры семейств пространственных многоугольников, которые не образуют многогранные поверхности: в каждом из этих примеров не выполняется одно из условий определения 5.7. Разберем эти примеры более подробно.

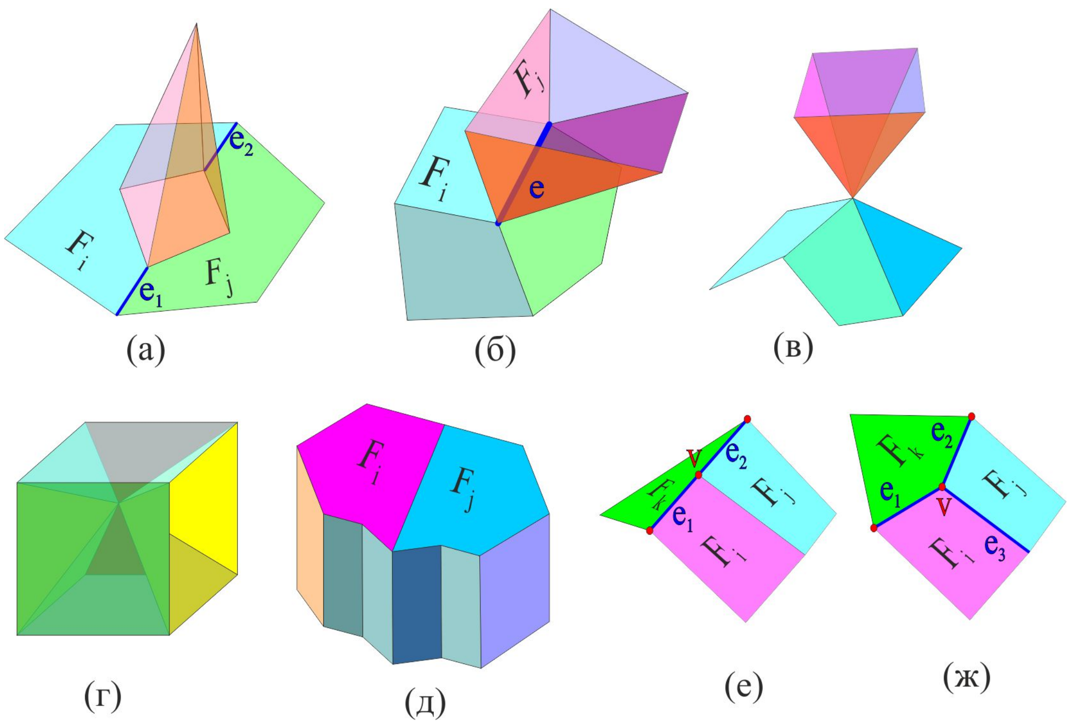

Рис. 5.2: К определению многогранной поверхности.

(1) Пример (а) не является многогранной поверхностью: многоугольники F_i и F_j пересекаются по двум ребрам e_1 и e_2, так что нарушается пункт (1).

(2) Пример (б) не является многогранной поверхностью, так как там общее ребро e для многоугольников F_i и F_j является также общим и для ряда других многоугольников, поэтому нарушается пункт (2).

(3) Пример (в) не является многогранной поверхностью, так как многоугольники из "верхней группы" невозможно соединить с многоугольниками из "нижней группы" цепочкой многоугольников, так что нарушается пункт (3).

(4) Пример (г) не является многогранной поверхностью, так как многоугольник из "левой группы" имеет с многоугольником из "правой группы" общую вершину, но их невозможно соединить цепочкой, в которой все многоугольники содержали бы эту вершину; таким образом, здесь нарушается пункт (4).

(5) Примеры (д)–(ж) не являются многогранными поверхностями, так как в каждом из них смежные грани F_i и F_j лежат в одной плоскости, т.е. нарушается пункт (5).

Обратите внимание, что два соседних ребра одной грани многогранной поверхности могут лежать на одной прямой, см. рис. 5.3.

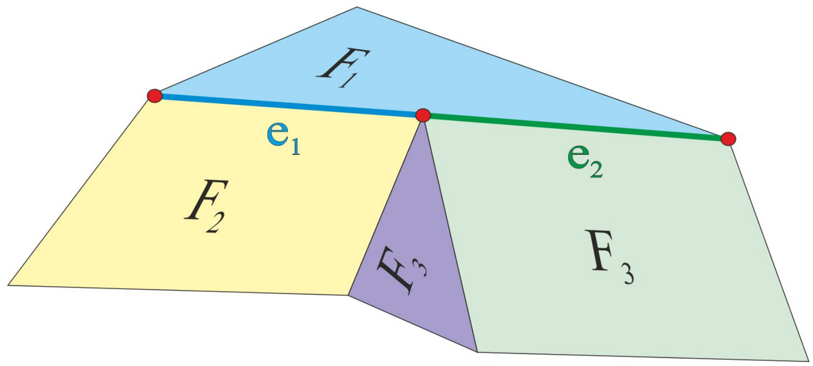

Рис. 5.3: Ребра e_1 и e_2 грани F_1 многогранной поверхности лежат на одной прямой.

Замечание 5.8. Мы дали столь "жесткое" определение многогранной поверхности, чтобы избежать сложной комбинаторики. Тем не менее, в более общей теории многие из требований определения 5.7 опускают или заменяют на более слабые. Так, например, иногда рассматривают многогранные поверхности с самопересечениями, или, скажем, отказываются от условия того, что смежные грани не лежат в одной плоскости (в теории изгибаний это используется в доказательстве теоремы, объясняющей, почему игра на аккордеоне невозможна, если сделать жесткими все грани его меха). Однако такие ослабления требований приводят к усложнению теории, например, отказываясь от условия (5), мы приходим к неоднозначности представления в виде многогранной поверхности: теперь каждую грань можно разбить на еще более мелкие грани.

Определение 5.9. Пусть $\mathcal{F}$ — многогранная поверхность. Если вершина (или ребро) $\mathcal{F}$ принадлежит грани, такие вершина и грань (ребро и грань) называются *инцидентными*. Ребро $\mathcal{F}$, инцидентное только одной грани, называется *граничным*, а инцидентное двум граням — *внутренним* (заметим, что других ребер в многогранной поверхности нет в силу пункта (2) из определения 5.7). Многогранная поверхность без граничных ребер называется *замкнутой*.

Замечание 5.10. Мы будем иногда отождествлять многогранную поверхность $\mathcal{F}$ с подмножеством $\mathbb{R}^3$, равным объединению всех граней из $\mathcal{F}$. Именно в этом смысле будем понимать фразу "пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ — многогранная поверхность". Отметим, что каждая многогранная поверхность, рассматриваемая как подмножество, имеет единственное представление в виде многогранной поверхности — точнее, если две многогранные поверхности задают одно и то же подмножество в $\mathbb{R}^3$, то они совпадают в том смысле, что состоят из одних и тех же многоугольников (докажите это).

Приведем без доказательства следующий важный результат.

Теорема 5.11 (теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности)**.** *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая многогранная поверхность. Тогда $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$ состоит из двух компонент. Одна из этих компонент является ограниченным подмножеством $\mathbb{R}^3$, а другая — нет.*

Определение 5.12. Пусть $\mathcal{F}$ — замкнутая многогранная поверхность, а Ω — ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$. Тогда $W = \mathcal{F} \cup \Omega$ называется *многогранником, ограниченным* $\mathcal{F}$, или *многогранником с границей* $\mathcal{F}$ (границу $\mathcal{F}$ многогранника W будем также обозначать через ∂W). Кроме того, $\mathcal{F} = \partial W$ называют также *поверхностью многогранника* W. Ограниченная компонента Ω называется *внутренностью многогранника* и обозначается через $\operatorname{Int} W$. Оставшаяся, неограниченная компонента множества $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$ называется *внешностью многогранника* W и обозначается через $\operatorname{Out} W$.

Замечание 5.13. По замечанию 5.6, каждый пространственный многоугольник является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^3$. Следовательно, граница ∂W многогранника W — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^3$ и, значит, по аналогии с рассуждениями из замечания 5.3, заключаем, что внутренность $\operatorname{Int} W$ и внешность $\operatorname{Out} W$ многогранника W — открытые подмножества $\mathbb{R}^3$, а сам многогранник $W = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Out} W$ — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^3$. Кроме того, для многогранника W имеет место аналог леммы 4.1: у каждой точки $P \in \partial W$ существует такая шаровая окрестность $U_\varepsilon(P)$, что множество $U_\varepsilon(P) \setminus \partial W$ состоит из двух компонент, одна из которых лежит во внутренности $\operatorname{Int} W$, а другая — во внешности $\operatorname{Out} W$ многогранника W.

5.3 Графы, связанные с многогранными поверхностями

Пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ — многогранная поверхность. Пусть V обозначает множество вершин $\mathcal{F}$, а E — множество ребер $\mathcal{F}$. Так как каждое ребро $\mathcal{F}$ соединяет некоторые вершины $\mathcal{F}$, пара (V, E) является геометрическим графом.

Определение 5.14. *Графом G многогранной поверхности $\mathcal{F}$* называется построенный выше геометрический граф (V, E); таким же образом мы называем соответствующий ему комбинаторный граф, см. рис. 5.4.

Обозначим через E' множество внутренних ребер многогранной поверхности $\mathcal{F}$. Будем рассматривать $\mathcal{F}$ как множество граней. Напомним, что через $\mathcal{F}_2$ мы обозначали множество 2-элементных подмножеств $\mathcal{F}$. Определим отображение $\partial\colon E' \to \mathcal{F}_2$ следующим образом: если ребро $e \in E'$ является пересечением граней F_i и F_j, то положим $\partial(e) = \{F_i, F_j\} \in \mathcal{F}_2$.

Определение 5.15. *Двойственным графом G_d многогранной поверхности $\mathcal{F}$* называется построенный только что комбинаторный граф $(\mathcal{F}, E', \partial)$, см. рис. 5.4.

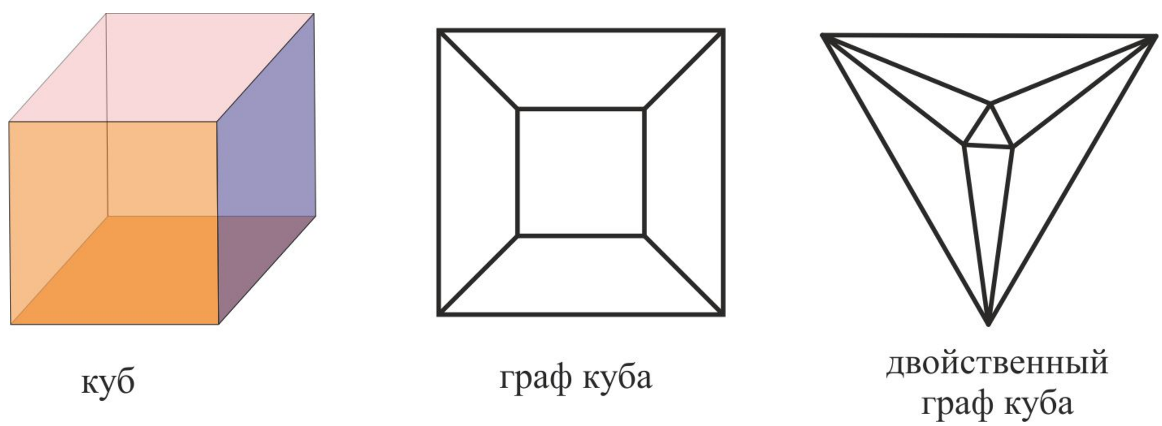

Рис. 5.4: Граф и двойственный граф многогранной поверхности.

Замечание 5.16. Опишем некоторые свойства графа G многогранной поверхности $\mathcal{F}$.

(1) *Граф G является простым и связным.*

(2) *Степени вершин графа G не меньше* 2. Действительно, каждая вершина $\mathcal{F}$ является вершиной некоторой грани — многоугольника, поэтому из нее выходит не менее двух ребер.

(3) *Вершина v графа G имеет степень* 2*, если и только если оба выходящих из нее ребра e_1 и e_2 — граничные. В частности, степени вершин графа замкнутой многогранной поверхности не меньше* 3. Действительно, никакая пара граней многогранной поверхности не может пересекаться более чем по одному ребру. Поэтому если хотя бы одно из инцидентных v ребер, скажем e_1, — внутреннее, то к e_1 примыкает еще одна грань, в которой имеется ребро e_3, инцидентное v и отличное от e_1 и e_2 в силу пункта 1 определения 5.7, так что $\deg v \geq 3$.

Замечание 5.17. Опишем некоторые свойства двойственного графа G_d многогранной поверхности $\mathcal{F}$.

(1) *Граф G_d является простым и связным.* Действительно, различные вершины графа G_d, соединенные ребром, — это смежные грани. Так как смежные грани имеют ровно одно общее ребро, то граф G_d не содержит кратных ребер. Связность равносильна условию 3 из определения 5.7.

(2) *Степени вершин графа G_d, соответствующего замкнутой многогранной поверхности, не меньше* 3. Действительно, каждая грань $\mathcal{F}$ содержит не менее 3 ребер.

5.4 Выпуклые многогранники

Определение 5.18. Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с каждой парой своих точек оно содержит отрезок, соединяющий эти точки.

Пример 5.19. Точка, прямая, плоскость, полупространство, открытый шар, замкнутый шар являются, очевидно, выпуклыми подмножествами пространства. Также любое непустое пересечение выпуклых множеств — выпукло (проверьте).

Определение 5.20. Многоугольник и многогранник называются *выпуклыми*, если они представляют собой выпуклые подмножества пространства.

Теорема 5.21. *Многогранник $W \subset \mathbb{R}^3$ выпуклый, если и только если он равен пересечению замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.*

Доказательство. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — грани многогранника W. Обозначим через π_k плоскость, проходящую через F_k. Предположим сначала, что многогранник совпадает с пересечением замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани, т.е. для каждого k существует такое полупространство Π_k, ограниченное плоскостью π_k, что $W = \cap_{k=1}^m \Pi_k$. Так как все полупространства выпуклы, а пересечение выпуклых множеств тоже выпукло, многогранник W — выпуклый.

Пусть теперь W — выпуклый многогранник. Докажем, что он совпадает с пересечением полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани. Рассмотрим произвольную плоскость π_k и точку $A \in \operatorname{Int} W$. Так как $\operatorname{Int} W$ открыто, существует $U_\varepsilon(A) \subset \operatorname{Int} W$. Так как $U_\varepsilon(A) \not\subset \pi_k$, существует точка $B \in U_\varepsilon(A)$, не принадлежащая π_k. Обозначим через Π_k то полупространство, ограниченное π_k, которое содержит точку B.

Покажем, что $W \subset \Pi_k$. Предположим противное, т.е. что существует $C \in W$, для которой $C \notin \Pi_k$. Пусть D — внутренняя точка многоугольника F_k, тогда в плоскости π_k существует круг K с центром в D, содержащийся в F_k. Рассмотрим конусы BK и CK с основаниями K и вершинами B и C соответственно. Эти конусы составлены из отрезков, соединяющих вершины с основаниями, поэтому они содержатся в W. Так как C и B лежат в разных полупространствах относительно $\pi_k \supset K$, существует шар $U_\varepsilon(D)$, лежащий в $BK \cup CK$, поэтому $U_\varepsilon(D) \subset W$. Однако, в силу замечания 5.13, каждый шар с центром в произвольной точке из ∂W содержит как точки из $\operatorname{Int} W$, так и точки из $\operatorname{Out} W$. Это противоречие и доказывает, что $W \subset \Pi_k$.

Итак, $W \subset \cap_{k=1}^m \Pi_k$. Докажем теперь, что $W = \cap_{k=1}^m \Pi_k$. Предположим противное, т.е. существует точка $P \in \cap_{k=1}^m \Pi_k$ такая, что $P \notin W$. Пусть Q — произвольная точка из $\operatorname{Int} W$. Тогда точки P и Q лежат в разных компонентах множества $\mathbb{R}^3 \setminus \partial W$, поэтому $[P, Q]$ пересекает некоторую грань F_k. Пусть R — некоторая точка из этого пересечения. Так как $Q \in \operatorname{Int} W \subset \Pi_k$, то Q — внутренняя точка полупространства Π_k, т.е $Q \notin \pi_k$. С другой стороны, $R \in \pi_k$, т.е. лежит на границе Π_k. Следовательно, точка P должна лежать в противоположном Π_k полупространстве, ограниченном плоскостью π_k, так что $P \notin \Pi_k$, противоречие. $\square$

Следствие 5.22. *Каждая грань выпуклого многогранника W равна пересечению содержащей ее плоскости и W.*

Доказательство. Пусть F — произвольная грань W и π — проходящая через нее плоскость. Так как $F \subset W$ и $F \subset \pi$, то $F \subset W \cap \pi$. Для завершения доказательства покажем, что $W \cap \pi$ не содержит точек из $\operatorname{Out} F$. Предположим противное, т.е. пусть существует $Q \in \operatorname{Out} F$, которая также лежит в $W \cap \pi$.

Обозначим через $e_1, \ldots, e_k$ ребра грани F, а через F_i — грань W, смежную с F по ребру e_i. Пусть π_i — плоскость, содержащая F_i, а Π_i — то полупространство, ограниченное π_i, которое, по теореме 5.21, содержит W. Так как смежные грани не лежат в одной плоскости, π_i не совпадает с π.

Выберем произвольную точку $P \in \operatorname{Int} F$. Тогда $[P, Q]$ пересекает ∂F. Пусть R — точка из этого пересечения, тогда R принадлежит некоторому ребру $e_i \subset \pi_i$. Так как $P \in W$, то $P \in \Pi_i$.

Покажем, что $P \notin \pi_i$. Действительно, предположим, что это не так. Обозначим через $H_i \subset \pi$ полуплоскость $\Pi_i \cap \pi$. Так как $W \subset \Pi_i$, то $F \subset H_i$. Пусть ℓ_i — прямая, ограничивающая полуплоскость H_i, т.е. $\ell_i = \pi_i \cap \pi$. Но тогда, если $P \in \pi_i$, то $P \in \ell_i$. Однако каждая круговая окрестность точки $P \in \pi$ пересекает как H_i, так и его дополнение в π, т.е. содержит точки, не лежащие в F. Последнее противоречит тому, что множество $\operatorname{Int} F$, в котором содержится P, открыто в π, так что некоторая круговая окрестность P должна содержаться в $\operatorname{Int} F \subset F$.

Итак, мы доказали, что P лежит внутри полупространства Π_i, поэтому точки луча PQ, следующие за точкой R, не содержатся в Π_i и, значит, не лежат в W. В частности, $Q \notin W$, противоречие. $\square$

Так как пересечение выпуклых множеств выпукло, следствие 5.22 мгновенно приводит с следующему результату.

Следствие 5.23. *Каждая грань выпуклого многогранника — выпуклый пространственный многоугольник.*

Замечание 5.24. Если бы мы в определении многогранников не требовали, чтобы смежные грани не лежали в одной плоскости, то следствия 5.22 и 5.23 оказались бы не верными: каждую грань можно было бы разбивать произвольным образом на более мелкие грани, но такие подразбиения не нарушают выпуклость многогранника, хотя могут приводить к невыпуклым граням.

Следствие 5.25. *Пусть $W \subset \mathbb{R}^3$ — произвольный выпуклый многогранник, $F_1, \ldots, F_m$ — его грани, π_i — плоскость, содержащая F_i. Обозначим через Π_i замкнутое полупространство, ограниченное π_i и содержащее W, и пусть $\Pi'_i = \Pi_i \setminus \pi_i$ — множество всех внутренних точек Π_i. Пусть P — некоторая точка из W. Тогда*

(1) *P — вершина W, общая для граней $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$, если и только если $P \in \pi_i$ при $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, и $P \in \Pi'_i$ при всех остальных i;*

(2) *P — внутренняя точка ребра W, общего для граней F_{i_1} и F_{i_2}, если и только если $P \in \pi_i$ при $i \in \{i_1, i_2\}$, и $P \in \Pi'_i$ при всех остальных i;*

(3) *P — внутренняя точка грани F_{i_1}, т.е. $P \in \operatorname{Int} F_i$, если и только если $P \in \pi_{i_1}$ и $P \in \Pi'_i$ при $i \neq i_1$;*

(4) *P — внутренняя точка многогранника W, если и только если $P \in \Pi'_i$ при всех i.*

Доказательство. По следствию 5.22, точка $P \in W$ лежит в грани F_i тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости π_i. Поэтому $\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}\}$ — полный набор граней, содержащих точку $P \in W$, если и только если P содержится в плоскостях $\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_k}$, а для всех остальных i — не содержится в полуплоскостях π_i, и, значит, содержится в открытых полупространствах Π'_i. Это соображение доказывает все пункты следствия. □

Следующая конструкция заимствована нами из [2].

Конструкция 5.26. В обозначениях следствия 5.25, выберем в произвольной грани F_i ее внутреннюю точку P. По этому же следствию, $P \in \Pi'_j$ для всех $j \neq i$, поэтому шаровая окрестность U_P, радиус которой меньше расстояния от P до всех π_j, $j \neq i$, также лежит в каждом таком Π'_j. Пусть Q — произвольная точка из U_P, не лежащая в Π_i, в частности, $Q \notin \pi_i$. Обозначим через $\nu\colon \Pi_i \to \pi_i$ радиальную проекцию из точки Q: каждой точке $S \in \Pi_i$ ставится точка $R = \nu(S) \in \pi_i$ пересечения луча QS с π_i, см. рис. 5.5.

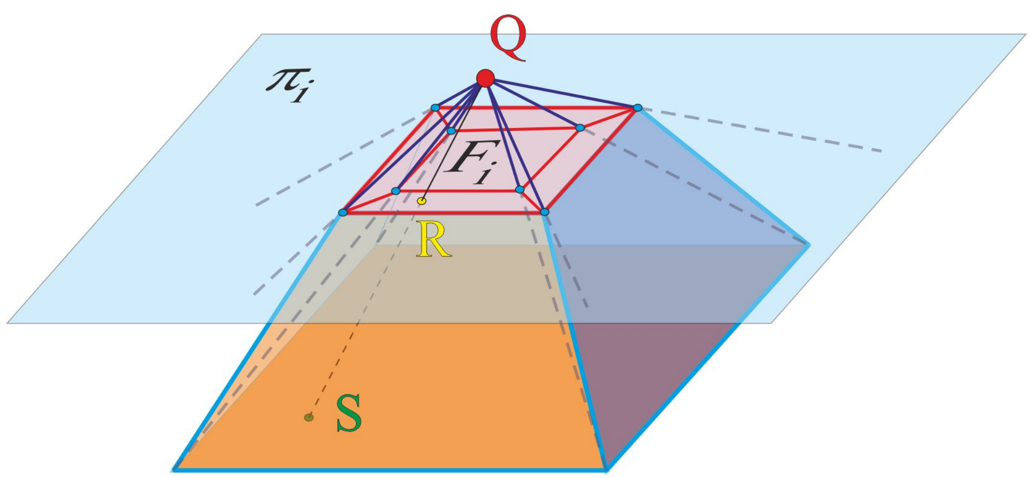

Рис. 5.5: Радиальная проекция границы выпуклого многогранника без грани на плоскость этой грани.

Лемма 5.27. *Ограничение радиальной проекции ν на $\partial W \setminus \operatorname{Int} F_i$ является гомеоморфизмом с образом.*

Доказательство. Пусть R — произвольная точка плоскости π_i. Рассмотрим луч QR и выясним, как устроено пересечение $QR \cap \partial W$.

Пусть $R \in \operatorname{Out} F_i$, тогда, по следствию 5.22, $R \notin W$ и, значит, для некоторого $j \neq i$ выполняется $R \notin \Pi_j$, поэтому интервал (Q, R) пересекает плоскость π_j по некоторой точке T. Но тогда открытый луч TR содержится в $R^3 \setminus \Pi_j$, поэтому $TR \cap W = \emptyset$. Кроме того, $[Q, R) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$, поэтому $[Q, R) \cap W = \emptyset$, так что в этом случае луч QR не пересекает W.

Пусть $R \in \partial F_i$. По следствию 5.25, точка R лежит в некоторой плоскости π_j, $j \neq i$, поэтому все точки луча QR, следующие за точкой R, лежат в $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi_j$, следовательно, все они не принадлежат W. Кроме того, $[Q, R) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$, поэтому $[Q, R) \cap W = \emptyset$, так что $QR \cap W$ состоит ровно из одной точки, а именно, точки R.

Наконец, пусть $R \in \operatorname{Int} F_i$. Выберем шаровую окрестность U_R точки R так же, как мы выбирали U_P. Тогда точки из $QR \cap U_R$, следующие на луче QR за точкой R, лежат во всех Π'_j, поэтому все они принадлежат внутренности W. Обозначим через S последнюю точку луча QR, лежащую в W, рис. 5.5. В силу сказанного выше, $S \neq R$. Покажем, что интервал (R, S) состоит из внутренних точек для W. Действительно, если на нем имеется некоторая точка $T \in \partial W$, то T содержится в некоторой плоскости π_j, но тогда все точки открытого луча TS не содержатся в Π_j и, в частности, в W, поэтому $T \notin W$. Итак, мы доказали, что $QR \cap \partial W$ состоит в рассматриваемом случае из двух точек: R и S. Отсюда и из разобранных выше случаев вытекает, что ограничение ν на $\partial W \setminus \operatorname{Int} F_i$ — взаимно однозначно с образом. Непрерывность этого ограничения и отображения, обратного к нему, следует из непрерывности радиальной проекции и вспомогательных утверждений, доказанных при решении задач 2.10 и 2.11. □

Следствие 5.28. *Граф выпуклого многогранника планарен.*

Доказательство. По лемме 5.27, границу ∂W выпуклого многогранника, из которой выкинута внутренность некоторой грани F, можно гомеоморфно отобразить на некоторое подмножество плоскости π, проходящей через F. При таком отображении граф многогранника W отображается на некоторый плоский граф, так что граф многогранника планарен. □

Конструкция 5.29. Построим *геометрическую реализацию двойственного графа G_d* многогранной поверхности $\mathcal{F}$, все грани которой — выпуклые многоугольники, в частности, границы $\mathcal{F}$ выпуклого многогранника. Для этого возьмем в каждой грани F_i многогранной поверхности $\mathcal{F}$ по внутренней точке P_i и примем эти точки за вершины геометрического графа. Соединим каждую точку P_i с серединами тех сторон содержащей ее грани, которые соответствуют внутренним ребрам многогранной поверхности. Получим набор отрезков, пересекающихся только по P_i. Точки P_i из смежных граней соединены двузвенными ломаными. Эти ломаные возьмем в качестве ребер геометрического графа. Ясно, что комбинаторная структура полученного графа изоморфна G_d, так что он является геометрической реализацией G_d, см. рис. 5.6.

Замечание 5.30. Несколько более сложно определяется *геометрическая реализация двойственного графа произвольной многогранной поверхности* (дайте соответствующее определение).

Предложение 5.31. *Двойственный граф выпуклого многогранника W планарен.*

Доказательство. Приведем еще одну конструкцию из [2]. В обозначениях следствия 5.25, выберем произвольную точку $P \in \operatorname{Int} W$. По замечанию 5.13, существует шар $U_\varepsilon(P)$, содержащийся в $\operatorname{Int} W$. Уменьшая ε, если необходимо, добьемся того, чтобы сфера $S^2_\varepsilon(P)$, ограничивающая этот шар, также лежала в $\operatorname{Int} W$.

Пусть $\mu\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{P\} \to S^2_\varepsilon(P)$ — радиальная проекция на $S^2_\varepsilon(P)$ с центром в P:

$$\mu(Q) = P + \varepsilon\,\overrightarrow{PQ}/\|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Покажем, что μ отображает ∂W взаимно однозначно на $S^2_\varepsilon(P)$.

Действительно, если Q — произвольная точка из $S^2_\varepsilon(P)$, то луч PQ содержит некоторую точку $R \in \operatorname{Out} W$, так как W — ограниченное множество. Но тогда $[P, R]$ пересекает ∂W. Пусть S — некоторая точка из этого пересечения, тогда $\mu(S) = Q$. Таким образом, ограничение μ на ∂W сюръективно.

Покажем теперь, что это ограничение инъективно. Предположим, что S_1 и S_2 — различные точки из ∂W, для которых $Q = \mu(S_1) = \mu(S_2)$. Без ограничения общности, будем считать, что $S_1 \in (Q, S_2)$. Так как $S_1 \in \partial W$, то S_1 лежит в некоторой грани F_i многогранника W. Но тогда, в обозначениях следствия 5.25, $S_1 \in \pi_i$ и $P \in \Pi'_i$, поэтому S_2 лежит вне полупространства Π_i, так что $S_2 \notin W$.

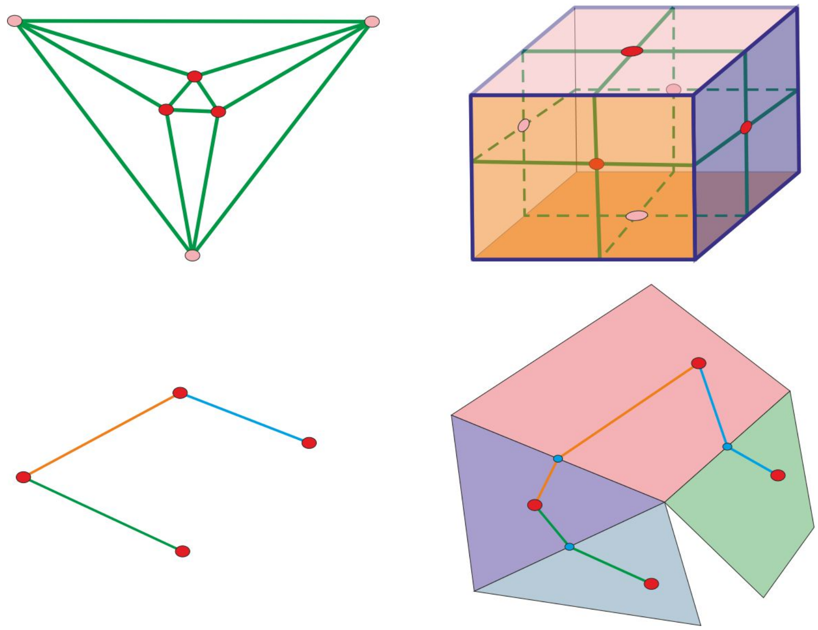

Рис. 5.6: Двойственный граф многогранной поверхности, его геометрическая реализация.

Итак, мы доказали, что μ отображает ∂W взаимно однозначно на S^2. Из непрерывности радиальной проекции и вспомогательных утверждений, доказанных при решении задач 2.10 и 2.11, вытекает, что это отображение — гомеоморфизм.

Рассмотрим геометрическую реализацию G двойственного графа многогранника W, описанную в конструкции 5.29. Выберем произвольную точку T из ∂W, не принадлежащую G. По задаче 2.10, существует гомеоморфизм η между $S^2_\varepsilon(P) \setminus \{\mu(T)\}$ и плоскостью $\mathbb{R}^2$, поэтому $\eta \circ \mu(G)$ — геометрическая реализация двойственного графа многогранника W, являющаяся плоским графом. □

5.5 Формула Эйлера для многогранников

В данном разделе будем рассматривать выпуклые многогранники W. По следствию 5.28, графы G таких многогранников планарны. Пусть ν — отображение, построенное в конструкции 5.26, тогда $\nu(G)$ — связный плоский граф, имеющий столько же вершин, ребер и граней, сколько и многогранник W, откуда, используя формулу Эйлера из теоремы 4.21, получаем следующий результат.

Теорема 5.32 (Формула Эйлера для выпуклых многогранников)**.** *Если f, e и v обозначают количества граней, ребер и вершин выпуклого многогранника, то $v - e + f = 2$.*

5.6 Правильные многогранники

Определение 5.33. Выпуклый многогранник назовем *правильным*, если все его грани — равные правильные пространственные многоугольники, стыкующиеся в вершинах в одном и том же количестве и образующие равные двугранные углы при всех ребрах.

Пусть W — правильный многогранник, G — его граф, и ν, как и выше, — отображение, построенное в конструкции 5.26. Положим $G_\nu = \nu(G)$. Тогда, как уже было отмечено, граф G_ν имеет столько же вершин, ребер и граней, сколько и многогранник W. Из определения правильного многогранника вытекает, что

(1) G_ν — плоский простой связный граф;

(2) степени вершин графа G_ν одинаковы и не меньше 3;

(3) каждая грань графа G_ν ограничена один и тем же числом ребер, также не меньшим 3;

(4) каждое ребро графа G_ν лежит ровно в двух гранях.

Такие графы мы описали в задаче 4.6. Приведем ответ.

Пусть (v, e, f) — вектор, компоненты которого равны соответственно количествам вершин, ребер и граней графа G_ν, а, значит, и правильного многогранника W. Тогда эти векторы могут быть только следующих пяти типов: $(4, 6, 4)$, $(6, 12, 8)$, $(8, 12, 6)$, $(12, 30, 20)$ и $(20, 30, 12)$. Оказывается, правильные многогранники каждого из этих пяти типов существуют, см. рис. 5.7. Они называются *платоновыми телами*.

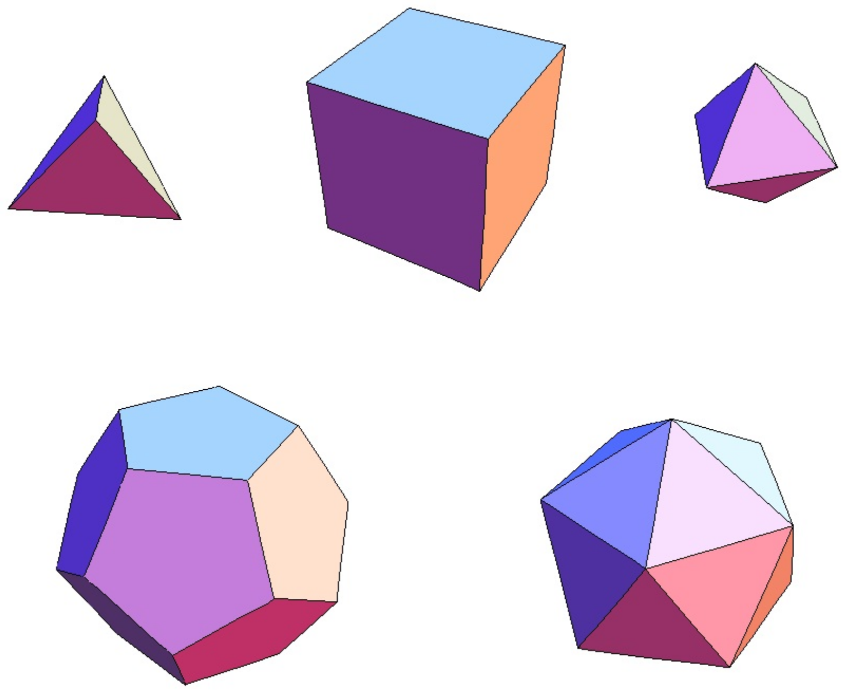

Рис. 5.7: Платоновы тела: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

На рис. 5.8 приведены графы платоновых тел.

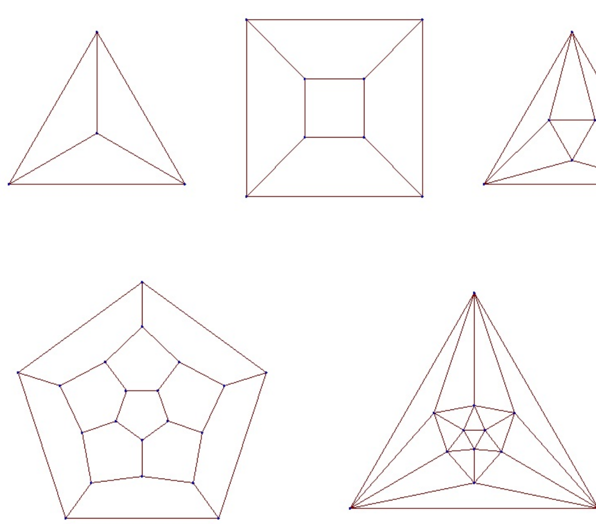

Рис. 5.8: Графы платоновых тел.

Доказательство существования каждого из этих платоновых тел можно найти, например, в [2].

5.7 Теорема о “еже” выпуклого многогранника

Пусть $W \subset \mathbb{R}^3$ — произвольный выпуклый многогранник. Обозначим через $F_1, \ldots, F_m$ все его грани, через N_i — единичный вектор, перпендикулярный грани F_i и направленный наружу многогранника W, а через S_i — площадь грани F_i. Положим $\xi_i = S_i\, N_i$. Семейство векторов $\{\xi_i\}$ назовем *ежом многогранника* W. Мы хотим понять, какими свойствами обладают ежи многогранников и сколь однозначно они определяют многогранник. Подробности см. в [4].

Теорема 5.34. *Пусть* $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ *— ёж выпуклого многогранника* W. *Тогда векторы* ξ_i *некомпланарны и выполняется* $\sum_{i=1}^m \xi_i = 0$.

Доказательство. Если бы векторы ξ_i лежали в одной плоскости π, то, по теореме 5.21, многогранник W был бы равен пересечению полупространств Π_i, ограниченных плоскостями π_i, параллельными прямой, перпендикулярной π, так что W не был бы ограниченным. Докажем теперь вторую часть теоремы.

Отметим сначала, что величина $\xi = \sum_i \xi_i$ не меняется при сдвигах многогранника W. Это дает нам возможность считать, не ограничивая общности, что начало координат O лежит во внутренности многогранника W.

Пусть P — произвольная точка из $\operatorname{Int} W$, а P_i — точка, лежащая в грани F_i. Тогда расстояние h_i от точки P до плоскости, проходящей через грань F_i, равно $\langle N_i, P_i - P\rangle$, где $\langle a, b\rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение векторов a и b.

Обозначим через V_i пирамиду с основанием F_i и вершиной P, через v_i — объем этой пирамиды, а через v — объем многогранника W. Тогда $v = \sum_i v_i$. С другой стороны,

$$v_i = \frac{1}{3}\, h_i\, S_i = \frac{1}{3}\, \langle N_i, P_i - P\rangle\, S_i = \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i - P\rangle,$$

поэтому

$$v = \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i - P\rangle = \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i\rangle - \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P\rangle = \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i\rangle - \frac{1}{3} \Big\langle \sum_i \xi_i, P \Big\rangle = \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i\rangle - \frac{1}{3}\, \langle \xi, P\rangle.$$

Заметим, что вектор ξ, величина v и величина $\sum_i \frac{1}{3}\langle \xi_i, P_i\rangle$ не зависят от выбора точки P, поэтому от выбора P не зависит также и величина $\langle \xi, P\rangle$. Так как начало координат O лежит в $\operatorname{Int} W$, то некоторая шаровая окрестность $U_\varepsilon(O)$ точки O также лежит в $\operatorname{Int} W$. Значит, для любой точки P из $U_\varepsilon(O)$ величина $\langle \xi, P\rangle$ постоянна и равна $\langle \xi, O\rangle = 0$. Покажем, как отсюда вытекает, что $\xi = 0$. Предположим противное, т.е. что $\xi \neq 0$. Положим $\lambda = \varepsilon/\big(2\|\xi\|\big)$, тогда $\lambda\,\xi \in U_\varepsilon(O)$, поэтому $\langle \xi, \lambda\,\xi\rangle = 0$, откуда, так как $\lambda \neq 0$, имеем $\langle \xi, \xi\rangle = 0$, следовательно $\xi = 0$. □

Оказывается, имеет место и обратный результат, доказательство которого сложнее и опирается на теоремы, которые вы будете изучать на следующих курсах.

Теорема 5.35 (Г. Минковский [5])**.** *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_m$ *— ненулевые некомпланарные векторы в* $\mathbb{R}^3$, *никакие два из которых не сонаправлены, причем* $\sum_i \xi_i = 0$. *Тогда существует единственный, с точностью до параллельного переноса, выпуклый многогранник, ёж которого равен* $\{\xi_i\}$.

Замечание 5.36. В теореме 5.35 мы потребовали, чтобы никакие два вектора ξ_i не были сонаправленными. Это связано с тем, что на многогранную поверхность мы накладываем следующее условие: никакие две ее смежных грани не лежат в одной плоскости. Если же отказаться от этого условия, то требование несонаправленности векторов ξ_i можно будет опустить.

У теоремы 5.35 имеются обобщения как на многомерный случай, так и на невыпуклые многогранники (см. например [6]).

Литература к главе 5

[1] Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.Л. *Многогранники, графы, оптимизация.* М.: Наука, 1981.

[2] Берже М. *Геометрия*, тт. 1-2, М.: Мир, 1984.

[3] Долбилин Н.П. *Три теоремы о выпуклых многогранниках.* Квант, 2001, N 5, 7—12.

[4] Долбилин Н.П. *Теорема Минковского о многогранниках.* Квант, 2006, N 4, 3—8.

[5] Минковский Г. *Общие теоремы о выпуклых многогранниках.* Успехи мат. наук, 1936, вып. 2, 55—71.

[6] Alexandrov V. *Minkowski-type and Alexandrov-type theorems for polyhedral herissons*, 2002, http://arXiv:math/0211286v1.