

Глава 4

Приложения теоремы Жордана. Плоские графы

План. Лемма о четырех точках на замкнутой ломаной, геометрический граф в топологическом пространстве, геометрический граф без самопересечений, комбинаторный граф, отображение графов, изоморфизм графов, изоморфные графы, реализация комбинаторного графа в топологическом пространстве, комбинаторная структура геометрического графа, отображение реализации, плоские графы, планарные графы, непланарные графы, полный двудольный граф, грань плоского графа, подграф, связная компонента графа, формула Эйлера для плоских графов, подразбиение ребра графа, гомеоморфные графы, теорема Понтрягина–Куратовского (критерий планарности графа).

Приведем ряд результатов, получающихся с помощью техники, развитой при доказательстве теоремы Жордана для ломаных. Напомним, что в прошлой лекции (см. раздел 3.3.1) мы для каждой точки P ломаной $L \subset \mathbb{R}^2$ обозначили через ε_P произвольное положительное число, меньшее, чем расстояние от P до объединения всех вершин ломаной L (если P — вершина, то расстояния рассматриваем только до вершин, отличных от P), и меньше, чем расстояния от P до всех ребер ломаной L , не содержащих P . Затем мы положили $U_P = U_{\varepsilon_P}(P)$, рис. 3.5. Напомним, что ε_P можно брать сколь угодно малым, ограничение на это число установлено только сверху.

Затем мы доказали следующее утверждение.

Лемма (3.18). *Рассмотрим произвольную ломаную $L \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений. Пусть P — внутренняя точка ребра e ломаной L , а S — одна из вершин ребра e . Тогда каждую точку $Q \in U_P \setminus L$ можно соединить с некоторой точкой $T \in U_S \setminus L$ ломаной, не пересекающей L . Обратно, каждую точку $T \in U_S \setminus L$ можно соединить с некоторой точкой $Q \in U_P \setminus L$ ломаной, не пересекающей L . Более того, эту соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в $U_\varepsilon(e)$, где $\varepsilon = \max(\varepsilon_P, \varepsilon_S)$.*

Лемма 4.1. *Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая ломаная без самопересечений, P — произвольная точка из L , и U_P — круг, определенный выше. Тогда $U_P \setminus L$ состоит из двух компонент, причем эти компоненты лежат в разных компонентах множества $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$.*

Доказательство. Покажем, что компоненты множества $U_P \setminus L$ не могут попасть в одну компоненту множества Ω . Для этого достаточно показать, что в $U_P \setminus L$ имеется две точки из разных компонент множества Ω . Для этого мы воспользуемся локально постоянной функцией η , см. раздела 3.3.4. А именно, введем на плоскости декартовы координаты Oxy , в которых разные вершины ломаной имеют разные x -координаты; возьмем внутреннюю точку одного из радиусов $U_P \cap L$ и сместим ее в направлении оси y и в противоположном направлении настолько мало, чтобы при перемещении не пересечь ломаную и остаться внутри U_P ; получим точки Q_1 и Q_2 , для которых $\eta(Q_1) \neq \eta(Q_2)$, что и завершает доказательство. \square

Лемма 4.2 (О четырех точках на замкнутой ломаной). *Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая ломаная без самопересечений и $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$. Пусть P, Q, R, S — различные последовательные точки из L . Соединим точки P и R ломаной L_1 , а точки Q и S — ломаной L_2 . Предположим, что*

- (1) обе L_i — ломаные без самопересечений;
- (2) обе L_i лежат, за исключением своих концевых точек, в одной и той же компоненте множества Ω .

Тогда L_1 и L_2 пересекаются.

Пример 4.3. Покажем, что эта лемма также нетривиальна, как и теорема Жордана. Для этого рассмотрим пример, приведенный на рис. 4.1. Ломаная L на торе и на листе Мёбиуса, изображенная условно в виде красной кривой, разбивает каждую из этих поверхностей на две компоненты. Ломаные L_1 и L_2 , изображенные условно черной и зеленой кривыми, удовлетворяют условию леммы 4.2, однако они не пересекаются.

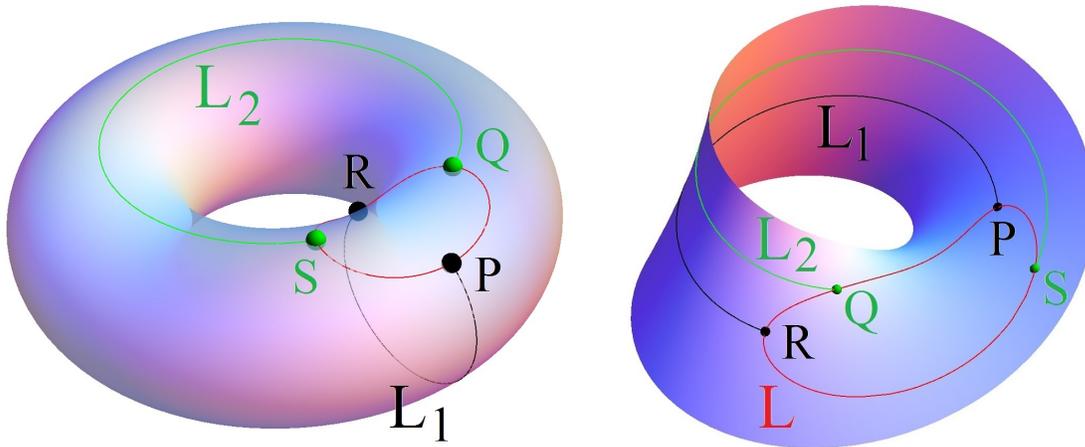


Рис. 4.1: На листе Мёбиуса лемма 4.2 неверна.

Проследите, какая часть приводимого ниже доказательства леммы 4.2 не проходит в описанном только что примере.

Доказательство леммы 4.2. Обозначим через L' и L'' — ломаные, на которые L разбивается точками P и R . Без ограничения общности, будем считать, что $Q \in L'$, а $S \in L''$, см. рис. 4.2.

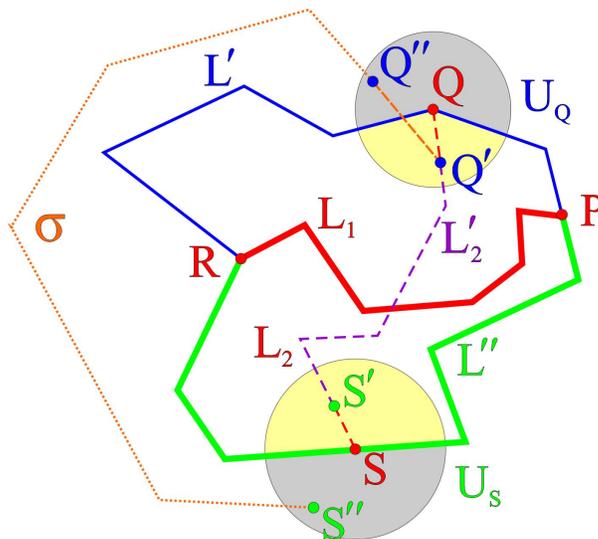


Рис. 4.2: Доказательство леммы о четырех точках.

Пусть $\delta_Q > 0$ — произвольное число, меньшее

- расстояния от Q до ребер ломаной L , не содержащих Q ;
- расстояния от Q до ребер ломаной L_2 , не содержащих Q ;
- расстояния от Q до ломаной L_1 ,

- величины $|QS|/2$.

Определим $\delta_S > 0$ дословно, заменив в предыдущем определении Q на S . Пусть U_Q и U_S — открытые круги с центрами в точках Q и S и радиусами δ_Q и δ_S соответственно. Тогда

- круги U_Q и U_S не пересекают друг друга;
- круг U_Q пересекает $L' \cup L_2$ по трем своим радиусам и не пересекает $L'' \cup L_1$;
- круг U_S пересекает $L'' \cup L_2$ по трем своим радиусам и не пересекает $L' \cup L_1$.

Отметим, что U_Q и U_S соответствуют так же обозначенным кругам, определенным в разделе 3.3.1 по отношению как к L , так и к $L'' \cup L_1$, — замкнутым ломаным без самопересечений. Поэтому, в силу леммы 4.1, множество $U_Q \setminus L$ разбито на две компоненты, которые лежат в разных компонентах множества Ω ; множество $U_S \setminus L$ также разбито на две компоненты, и эти две компоненты лежат как в разных компонентах множества Ω , так и в разных компонентах множества $\Omega'' = \mathbb{R}^2 \setminus (L'' \cup L_1)$, см. рис. 4.2.

Выберем произвольные точки $Q' \in U_Q \cap L_2$, $Q' \neq Q$, и $S' \in U_S \cap L_2$, $S' \neq S$. Тогда Q' и S' лежат в одной компоненте множества Ω , так как соединяются частью L'_2 ломаной L_2 , не пересекающей L .

Выберем произвольные точки Q'' и S'' в тех компонентах множеств $U_Q \setminus L$ и $U_S \setminus L$, которые не содержат Q' и S' соответственно. По теореме 3.7, множество Ω состоит из двух компонент, поэтому точки Q'' и S'' лежат в одной компоненте — той, которая не содержит Q' и S' . Раз так, точки Q'' и S'' можно соединить ломаной σ , не пересекающей L .

Так как L_1 и L_2 лежат в той же компоненте, что и точки S' и Q' , ломаная σ не пересекает L_1 и L_2 и, значит, не пересекает ломаную $L'' \cup L_1$. Так как U_Q не пересекает $L'' \cup L_1$, отрезок $[Q', Q'']$ также не пересекает ломаную $L'' \cup L_1$, поэтому ломаная $[Q', Q''] \cup \sigma$ не пересекает $L'' \cup L_1$. Поэтому Q' и S'' лежат в одной компоненте множества Ω'' .

Но S'' и S' , как было отмечено выше, лежат в разных компонентах множества Ω'' , значит точки Q' и S' также лежат в разных компонентах множества Ω'' . Следовательно, L'_2 пересекает $L'' \cup L_1$. Но, по условию, L'_2 не пересекает L , а, значит, и L'' . Поэтому L'_2 , а с ней и L_2 , пересекает L_1 , что и требовалось. \square

4.1 Геометрические графы

В данном разделе мы введем новое понятие: геометрические графы.

Напомним, что *графом* G называется тройка $G = (V, E, \partial)$, состоящая из множеств V , E и отображения $\partial: E \rightarrow V_1 \cup V_2$, где V_k — семейство k -элементных подмножеств V .

Определение 4.4. *Геометрическим графом* $G = (V, E)$ в топологическом пространстве X называется некоторое множество V попарно различных точек в X и некоторое множество E непрерывных несамопересекающихся кривых в X , начинающихся и заканчивающихся в точках множества V . Точки множества V называются *вершинами*, а кривые из множества E — *ребрами* G . Геометрический граф будем называть *графом без самопересечений*, если каждые два его ребра могут пересекаться только по своим концевым точкам.

Чтобы отличать геометрические графы от обычных, мы будем иногда последние называть *комбинаторными графами*.

Определение 4.5. *Комбинаторной структурой геометрического графа* $G = (V, E)$ будем называть (комбинаторный) граф (V, E, ∂) , у которого множество вершин совпадает с множеством точек V , множество ребер совпадает с множеством кривых E , а граничное отображение ∂ ставит в соответствие кривой (элементу из E) ее концы (элемент $V_1 \cup V_2$).

Вся терминология, касающаяся комбинаторных графов, естественным образом переносится на геометрические графы: можно говорить об инцидентности, о циклах, о деревьях и т.п.

Геометрические графы естественно возникают во многих геометрических задачах, например, когда мы изучаем транспортную сеть, составленную из дорог, соединяющих различные города, или телефонную сеть, или сеть трубопроводов и т.д. Однако не каждый граф имеет естественное геометрическое содержание. Например, граф рукопожатий. Тем не менее, даже в случае таких не геометрических графов их изображение на листе бумаги в виде точек и соединяющих эти точки линий, т.е. в виде геометрического графа, дает наглядное представление о комбинаторной структуре графа.

Определение 4.6. Пусть $G = (V, E, \partial)$ и $G' = (V', E', \partial')$ — два (комбинаторных) графа. *Образжением* $f: G \rightarrow G'$ из графа G в граф G' называется отображение $f: V \sqcup E \rightarrow V' \sqcup E'$ такое, что $f(V) \subset V'$, $f(E) \subset E'$ и для каждого $e \in E$ выполняется $f(\partial(e)) = \partial'(f(e))$. Здесь той же буквой f обозначено отображение, определенное на подмножествах V : если $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$, то $f(\{v_1, \dots, v_k\}) = \{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$. Взаимно однозначное f называется *изоморфизмом графов* G и G' . Графы называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

Замечание 4.7. Обозначение $X = Y \sqcup Z$ (дизъюнктное объединение множеств Y и Z) означает одновременно, что $X = Y \cup Z$ и $Y \cap Z = \emptyset$.

Замечание 4.8. В теории графов изоморфные графы естественно считать одинаковыми, так как они обладают одинаковыми комбинаторными свойствами.

Определение 4.9. Геометрический граф G в топологическом пространстве X будем называть *реализацией комбинаторного графа* G' , если задан изоморфизм графа G' и комбинаторной структуры геометрического графа G .

4.2 Плоские и планарные графы

Нас будет особенно интересовать случай, когда $X = \mathbb{R}^2$.

Определение 4.10. Геометрический граф без самопересечений, лежащий на плоскости \mathbb{R}^2 , называется *плоским*. Комбинаторный граф, для которого существует реализация в виде плоского геометрического графа, называется *планарным*, и *непланарным*, если такой реализации не существует.

Замечание 4.11. На самом деле, у каждого планарного графа существует реализация в виде плоского графа, ребра которого — ломаные (такие реализации иногда называют *кусочно-линейными*). Это утверждение составляет содержание задачи 4.8 семинарского занятия. В дальнейшем, разбирая примеры непланарных графов, мы будем показывать именно то, что эти графы не имеют кусочно-линейных реализаций.

Пример 4.12. Обозначим через $K_{p,q}$ простой граф (V, E) , в котором множество V представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств V' и V'' таких, что V' состоит из p вершин, V'' — из q вершин, а $vw \in E$ тогда и только тогда, когда одна из вершин v, w лежит в V' , а другая — в V'' . Каждый такой граф называется *полным двудольным графом*.

Один из них — $K_{3,3}$ — хорошо известен по математическим кружкам и олимпиадам под названием “домики и колодцы”.

Следствие 4.13. *Граф $K_{3,3}$ — непланарный.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует реализация графа $K_{3,3}$ в виде плоского графа $G \subset \mathbb{R}^2$. Доказательство проведем в случае, когда ребра графа G — ломаные. Пусть x_1, \dots, x_6 — вершины графа $K_{3,3}$, занумерованные так, как показано на рис. 4.3, а также их образы в реализации G .

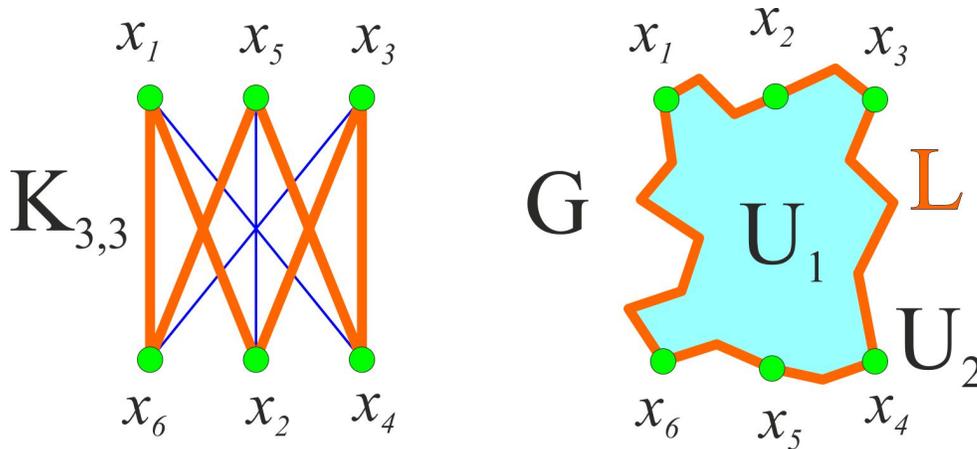
Обозначим через $L \subset \mathbb{R}^2$ замкнутую ломаную, являющуюся реализацией цикла $x_1 \cdots x_6 x_1$. Тогда L не имеет самопересечений и, по теореме 3.7, множество $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит из двух компонент. Кроме этой ломаной, имеется еще три ребра-ломаные, два из которых, за исключением своих концевых точек, обязаны лежать в одной и той же компоненте множества Ω . Однако, у любых двух из этих трех ребер вершины чередуются на L , поэтому такие ребра обязаны пересекаться в силу леммы 4.2. \square

4.3 Формула Эйлера для плоских графов

Для геометрического графа G без самопересечений в топологическом пространстве X мы часто будем писать $G \subset X$, понимая в этом случае под G подмножество X , являющееся объединением множества всех вершин и образов всех ребер этого графа.

Определение 4.14. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — плоский (геометрический) граф. Компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus G$ называются *гранями графа* G .

Определение 4.15. Граф без циклов называется *лесом*.

Рис. 4.3: Доказательство непланарности графа $K_{3,3}$.

Определение 4.16. Пусть $G = (V, E, \partial)$ — произвольный граф. Каждый граф $H = (V', E', \partial')$ такой, что $V' \subset V$, $E' \subset E$ и ∂' — ограничение ∂ на E' , называется *подграфом* в G . Условие того, что H — подграф в G будем записывать так: $H \subset G$.

Определение 4.17. Связный подграф графа G , не содержащийся в другом, отличном от него связном подграфе графа G , называется *связной компонентой графа* G .

Замечание 4.18. По аналогии с рассмотрением линейно связных компонент топологического пространства, несложно понять, что каждый граф представим в виде объединения попарно непересекающихся своих связных компонент, и семейство его связных компонент определено однозначно.

Замечание 4.19. По определению, каждая связная компонента леса является связным графом без циклов, т.е. деревом. Таким образом, каждый лес представляет собой дизъюнктивное объединение деревьев.

Предложение 4.20. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — плоский лес. Тогда $\mathbb{R}^2 \setminus G$ линейно связно, т.е. G имеет ровно одну грань.

Доказательство. Доказательство проведем для G , ребра которого — ломаные. Мы докажем, что любые две точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus G$ можно соединить ломаной, не пересекающей G .

Построим новый граф X , который на плоскости будет задавать то же подмножество, что и исходный граф. А именно, множество вершин графа X состоит из вершин графа G и всех внутренних вершин ломаных, являющихся ребрами G . Множество ребер графа X состоит из всех ребер ломаных (т.е. обычных отрезков), которые являются ребрами графа G . Ясно, что полученный геометрический граф X не содержит циклов, т.е. является лесом. Кроме того, X не имеет самопересечений.

Пусть m — количество ребер графа X . Положим $X_m = X$. Предположим, что $m > 0$. По упражнению 1.5, каждое дерево, являющееся связной компонентой леса X и содержащее хотя бы одно ребро, имеет висячую вершину. Выберем такую компоненту Y_m и обозначим висячую вершину через B_m . Пусть $[A_m, B_m]$ — ребро дерева X_m , инцидентное B_m . Выкинем ребро $[A_m, B_m]$ из леса X_m . Оставшийся лес обозначим через X_{m-1} . Ясно, что $X_m = X_{m-1} \cup [A_m, B_m]$. Кроме того, если $[A_m, B_m]$ — единственное ребро дерева Y_m , то $X_{m-1} \cap [A_m, B_m] = \emptyset$ (мы выкидываем ребро $[A_m, B_m]$ вместе с обеими его вершинами). Иначе, $X_{m-1} \cap [A_m, B_m] = \{A_m\}$ (в этом случае мы выкидываем ребро $[A_m, B_m]$ вместе с висячей вершиной B_m).

Если $m - 1 > 0$, проделаем те же построения с лесом X_{m-1} . В результате получим ребро $[A_{m-1}, B_{m-1}]$ леса X_{m-1} и новый лес X_{m-2} такой, что $X_{m-1} = X_{m-2} \cup [A_{m-1}, B_{m-1}]$. Снова имеем две возможности: $X_{m-2} \cap [A_{m-1}, B_{m-1}] = \emptyset$ или $X_{m-2} \cap [A_{m-1}, B_{m-1}] = \{A_{m-1}\}$.

Продолжая этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем все ребра леса X_m , мы представим X_m в виде объединения последовательности отрезков $[A_1, B_1], \dots, [A_m, B_m]$, удовлетворяющей условию упражнения 3.12 (одноточечные деревья леса G задаются вырожденными отрезками), поэтому, в силу этого упражнения, любые две точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus X_m = \mathbb{R}^2 \setminus G$ можно соединить ломаной, не пересекающей G , следовательно, это множество линейно связно. \square

Теорема 4.21 (Формула Эйлера). Пусть G — произвольный плоский граф, v , e , f и k — количества его вершин, ребер, граней и связных компонент. Тогда

$$v - e + f = 1 + k.$$

Доказательство. Мы докажем формулу Эйлера в предположении, что все ребра графа G — ломаные. Так же, как и в доказательстве предложения 4.20, заменим граф на такой, у которого все ребра — прямолинейные отрезки. Отметим, что при такой замене не меняется число граней и связных компонент, а количества ребер и вершин увеличиваются на одно и то же число, поэтому формула Эйлера верна или нет одновременно для исходного и результирующего графов. Кроме того, полученный граф является простым, так как его ребра — прямолинейные отрезки, а они не могут образовывать ни петель, ни кратных ребер. Новый граф по-прежнему будем обозначать через G .

Пусть в графе G имеется цикл $v_0v_1v_2\dots$, где v_p — последовательно проходимые вершины. Рассмотрим первую вершину v_i , которая совпадает с некоторой “предыдущей” вершиной v_j , $j < i$. Положим $C = v_jv_{j+1}\dots v_i$, тогда C — замкнутая ломаная без самопересечений. Посмотрим, что произойдет при выбрасывании из графа G одного из ребер этой ломаной, для определенности рассмотрим ребро $e = v_jv_{j+1}$. Количество связных компонент графа при этом не меняется, количество вершин не меняется, количество ребер уменьшается на единицу. Если мы докажем, что количество граней (компонент линейной связности дополнения к графу в плоскости) тоже уменьшается на единицу, то формула Эйлера для этих двух графов выполняется или не выполняется одновременно.

По теореме 3.7, ломаная C разбивает плоскость на две компоненты. Пусть e — произвольное ребро цикла C , и P — внутренняя точка ребра e . Пусть G' — граф, полученный из G выбрасыванием ребра e . Так как P не содержится в G' , а G' равен объединению конечного числа отрезков, расстояние $\rho(P, G')$ от точки P до графа G' положительно.

Пусть ε_P — произвольное положительное число, меньшее $\rho(P, G')$. Положим $U_P = U_{\varepsilon_P}(P)$. Тогда круг U_P не пересекает G' , поэтому $U_P \cap G = U_P \cap e$ представляет собой диаметр круга U_P . Кроме того, U_P подходит под определение одноименного круга из леммы 4.1, в соответствии с которой точки из компонент множества $U_P \setminus C = U_P \setminus e$ лежат в разных гранях графа G (каждая ломаная, их соединяющая, обязана пересекать C). Таким образом, выбрасывание из G ребра e приводит к уменьшению числа граней (точки тех двух граней F_1 и F_2 , в которых лежат компоненты $U_P \setminus C$, до выбрасывания ребра e нельзя было соединить ломаной, не пересекая G , а после выбрасывания — можно).

Покажем, что при выбрасывании ребра e из графа G остальные грани не изменятся. Пусть точки A и B до выбрасывания ребра e нельзя было соединить друг с другом ломаной, а после выбрасывания — можно. Пусть L — такая ломаная. Легко видеть, что L пересекает ребро e по некоторым внутренним точкам. Рассмотрим участок L' ломаной L от точки A до первого пересечения R с ребром e . Выберем окрестность U_R точно так же, как мы выбрали выше окрестность U_P . Затем выберем произвольную, отличную от R , точку $S \in U_R \cap L'$. Ясно, что точки A и S лежат в одной грани графа G .

Рассмотрим отрезок $[P, R]$. В силу того, что $[P, R] \cap G' = \emptyset$, имеем $\rho([P, R], G') > 0$. Выберем положительное δ , меньше $\rho([P, R], G')$, ε_P и ε_R . Сместим отрезок $[P, R]$ перпендикулярно ребру e на расстояние $\delta/2$. В результате получим отрезок $[P', R']$. Направление смещения выберем так, чтобы R' и S оказались в одной компоненте множества $U_R \setminus G = U_R \setminus e$. В силу выбора величины δ , точка P' лежит в $U_P \setminus G$. Но тогда ломаная $SR'P'$ не пересекает G , так что S , а вместе с ней и точка A лежат в той же грани, что и P' , т.е. в одной из граней F_1 и F_2 . Аналогичным образом рассматривается точка B .

Итак, мы показали, что при выбрасывании ребра e количество граней графа G уменьшается на единицу. Продолжая эти рассуждения и последовательно разрушая циклы графа G , мы получим граф H , в котором столько же компонент связности, сколько их в графе G , причем в графе H нет циклов, и для него формула Эйлера верна или неверна одновременно с графом G . Компоненты связности графа H являются деревьями, т.е. H — лес.

По предложению 4.20, граф H имеет ровно одну грань. Кроме того, по решению упражнения 1.6, каждое дерево содержит на одно ребро меньше, чем число его вершин, поэтому если e_1, \dots, e_k — число ребер в деревьях леса H , а v_1, \dots, v_k — количества вершин в этих деревьях, то $v_i - e_i = 1$, поэтому

$$v - e + f = \sum_{i=1}^k v_i - \sum_{i=1}^k e_i + 1 = k + 1.$$

□

Напомним, что простой граф с n вершинами, у которого каждая пара вершин соединяется ребром, называется *полным* и обозначается через K_n .

Следствие 4.22. *Граф K_5 непланарный.*

Доказательство. Предположим, что граф K_5 планарный, и пусть G — некоторая его реализация в виде плоского графа. Тогда, по формуле Эйлера, $5 - 10 + f = 1 + 1$, т.е. $f = 7$. С другой стороны, каждый цикл в простом графе имеет не менее 3 ребер, поэтому, если e_i — число ребер i -ой грани, то $\sum_{i=1}^f e_i \geq 3f = 21$. Однако, так как каждое ребро входит не более чем в две грани, предыдущая сумма не превосходит $2e = 20$, противоречие. \square

4.4 Планарные графы. Критерий Понтрягина–Куратовского

При исследовании планарности графов вершины степени 2 не играют никакой роли. Действительно, если G — плоский граф, то разбиение любого его ребра на части добавлением к множеству вершин некоторых точек этого ребра не меняет граф как подмножество плоскости. Обратное, если есть два ребра, которые имеют общую вершину степени 2, то эту вершину можно выкинуть из множества вершин, а ребра — склеить в одно, большее ребро. Графы, которые отличаются лишь вершинами степени 2, называются гомеоморфными. Дадим формальное определение.

Определение 4.23. Пусть $G = (V, E, \partial)$ — произвольный граф и $e \in E$ — некоторое его ребро. Пусть w не содержится в V , а e_1 и e_2 не содержатся в E . Рассмотрим граф $G' = (V', E', \partial')$, положив $V' = V \cup \{w\}$ и $E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\}$. Отображение ∂' положим равным ∂ на $E \setminus \{e\}$, а на e_1 и e_2 зададим его так:

- (1) если $\partial(e) = \{v\}$, то $\partial'(e_1) = \partial'(e_2) = \{v, w\}$;
- (2) если же $\partial(e) = \{u, v\}$, то $\partial'(e_1) = \{u, w\}$, $\partial'(e_2) = \{v, w\}$.

Будем говорить, что граф G' получен из графа G *подразбиением его ребра e* . Графы G и H называются *гомеоморфными*, если из них многократными подразделениями ребер можно получить изоморфные графы.

На рис. 4.4 показаны два плоских графа. Синими кругами обозначены их вершины. Хотя, как подмножества плоскости, эти графы гомеоморфны, тем не менее, их комбинаторные структуры разные: они отличаются расположением вершин степени 2. Красными кругами обозначены добавленные вершины степени 2 (некоторые ребра подразбиты). В результате получаем изоморфные графы.

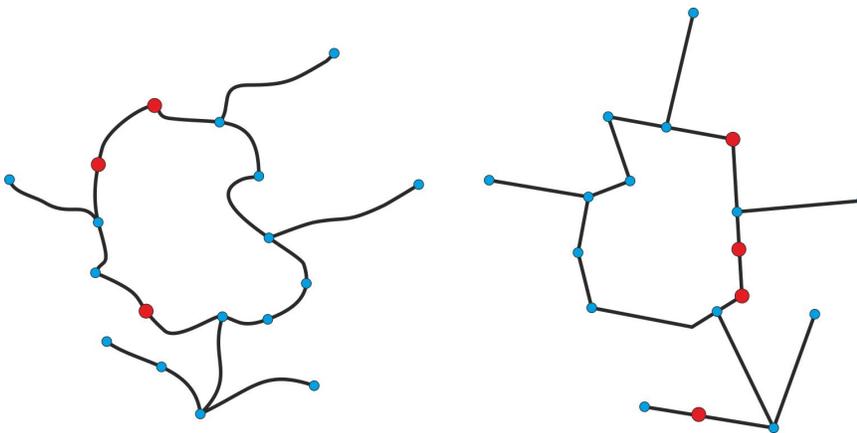


Рис. 4.4: Подразбиение ребер и гомеоморфность графов.

Теорема 4.24 (Понтрягин–Куратовский). *Граф G является планарным тогда и только тогда, когда никакой его подграф не гомеоморфен $K_{3,3}$ или K_5 .*

Доказательство в одну сторону — а именно, доказательство непланарности графа, содержащего подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5 , очевидно после того, как мы доказали непланарность $K_{3,3}$ и K_5 , см. следствия 4.13 и 4.22.

Доказательство в другую сторону намного сложнее.

Приведем некоторые следствия.

Следствие 4.25. *Полный граф K_n планарен тогда и только тогда, когда $n = 1, 2, 3$ или 4 .*

Доказательство. Действительно, при $n \leq 4$ легко построить соответствующую реализацию на плоскости. При $n > 4$ граф K_n содержит подграф, изоморфный K_5 . \square

Следствие 4.26. *Граф $K_{p,q}$ является планарным тогда и только тогда, когда $\min(p, q) \leq 2$.*

Доказательство. Действительно, при $\min(p, q) \leq 2$ легко построить соответствующие реализации на плоскости. При $\min(p, q) \geq 3$ граф $K_{p,q}$ содержит подграф, изоморфный $K_{3,3}$. \square

Литература к главе 4

- [1] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, 2004, изд-во МЦНМО.
- [2] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.