Глава 2

Элементы топологии

План. Непрерывная функция на прямой, база окрестностей, непрерывное в точке отображение, непрерывное отображение, открытое множество, окрестность точки, топология, топологическое пространство, база топологического пространства, индуцированная база окрестностей, индуцированная топология, гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, непрерывная кривая, линейно связное топологическое пространство, линейно связная компонента, локально постоянная функция, открытое покрытие топологического пространства, открытое покрытие подмножества топологического пространства, подпокрытие, компактность, замкнутое подмножество, ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$.

В следующей лекции мы обратимся к одной из важнейших теорем о свойствах плоскости — к теореме Жордана. Она утверждает, что непрерывная замкнутая несамопересекающаяся кривая на плоскости разбивает плоскость на две части. Имеется несколько доказательств этого факта, но ни одно нельзя назвать простым. Мы ограничимся подробным рассмотрением случая, когда кривая является ломаной, но даже в этом случае нам придется подготовиться, чтобы дать строгое обоснование. Прежде всего нам нужно познакомиться с основами топологии — раздела математики, изучающего понятие непрерывности. Более детальные курсы топологии можно найти, например, в [1] и [2].

2.1 Топологические пространства и непрерывные отображения

Напомним определение непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ из курса математического анализа. Обозначим через $U_\varepsilon(x)$ интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Напомним, что $U_\varepsilon(x)$ также принято называть *ε-окрестностью точки x*.

Определение 2.1. Функция f называется *непрерывной на* $\mathbb{R}$, если

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ :\ f\big(U_\delta(x)\big)\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big).$$

Часто вместо ε-окрестностей некоторой точки бывает полезно рассматривать произвольные интервалы, содержащие эту точку. Следующее определение эквивалентно приведенному выше.

Определение 2.2. Функция f называется *непрерывной на* $\mathbb{R}$, если

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall(a,b)\ni f(x)\ \exists(c,d)\ni x\ :\ f\big((c,d)\big)\subset(a,b).$$

При доказательстве основных свойств непрерывных функций, например, теорем о непрерывности композиции, суммы (разности) и произведения непрерывных функций, использовались некоторые свойства ε-окрестностей точек. Что это за свойства? Если бы мы могли их выделить и точно сформулировать, можно было бы рассматривать непрерывные функции не только на $\mathbb{R}$ (и не только на отрезках и интервалах).

Оказывается, эти свойства очень простые. Они отражены в следующем определении.

2.1.1 База окрестностей

Определение 2.3. Пусть X — произвольное множество. Семейство множеств β, состоящее из некоторых подмножеств X, называется *базой окрестностей*, если

(1) каждая точка $x\in X$ содержится в некотором $U\in\beta$, и

(2) для любых двух пересекающихся U, $V \in \beta$ и любой точки $x \in U \cap V$ найдется такое $W \in \beta$, что $x \in W \subset U \cap V$.

Пример 2.4. (1) Пусть X — вещественная прямая $\mathbb{R}$. В качестве β рассмотрим семейство всех интервалов (a, b). Тогда каждая точка из $\mathbb{R}$ лежит в некотором интервале, и если $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$, то это пересечение представляет собой интервал $\big(\max\{a, c\}, \min\{b, d\}\big)$, так что β — база окрестностей, см. рис. 2.1, слева.

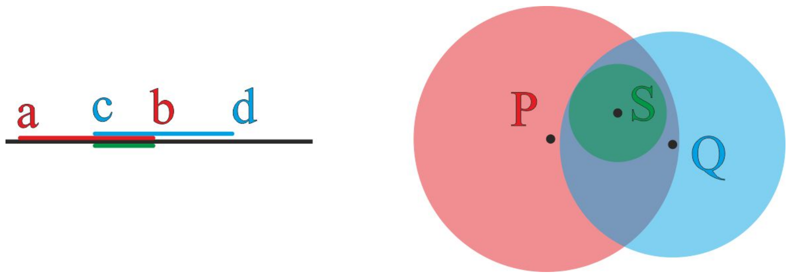

Рис. 2.1: Базы окрестностей на прямой и плоскости.

(2) Пусть теперь X — вещественная плоскость $\mathbb{R}^2$. Расстояние между двумя точками $P = (P_1, P_2)$ и $Q = (Q_1, Q_2)$ вычисляется по теореме Пифагора:

$$|PQ| = \sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2}.$$

Будем называть *открытым кругом* $U_r(P)$ множество

$$U_r(P) = \big\{Q \in X : |PQ| < r\big\}.$$

Отметим, что, в отличии от интервалов, пересечение открытых кругов, вообще говоря, не является открытым кругом. Тем не менее, если $S \in U_a(P) \cap U_b(Q)$, то, положив $c = \min\big\{a - |SP|, b - |SQ|\big\}$, получим $S \in U_c(S) \subset U_a(P) \cap U_b(Q)$, см. рис. 2.1, справа. Таким образом, семейство открытых кругов образует базу окрестностей плоскости.

(3) Предыдущий пример естественным образом обобщается на случай, когда X — это n-мерное вещественное пространство $\mathbb{R}^n$. Здесь расстояние определяется с помощью обобщенной теоремы Пифагора: если $P = (P_1, \ldots, P_n)$ и $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, то

$$|PQ| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(P_i - Q_i)^2}.$$

Определение открытого круга, а также рассмотренное в предыдущем примере свойство пересекающихся открытых кругов дословно переносятся на этот случай. Теперь же множества $U_r(P)$ называются *открытыми шарами*. Тем самым, семейство открытых шаров в $\mathbb{R}^n$ образуют базу окрестностей.

(4) Пусть X — это отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство подмножеств X, состоящее из всех интервалов вида $(c, d) \subset [a, b]$, а также полуинтервалов вида $[a, d) \subset [a, b]$ и $(c, b] \subset [a, b]$. Ясно, что каждое непустое пересечение интервала с интервалом или полуинтервалом также является интервалом; пересечение двух полуинтервалов одного типа, скажем $[a, d_1)$и $[a, d_2)$, — также является полуинтервалом; пересечение полуинтервалов разных типов — интервал. И, конечно же, каждая точка из $[a, b]$ лежит в некотором интервале или полуинтервале. Таким образом, определенное только что семейство образует базу окрестностей отрезка.

Введенное понятие базы дает возможность в самом общем виде определить понятия непрерывного отображения и открытого множества.

2.1.2 Непрерывные отображения

Определение 2.5. Пусть β_X и β_Y — некоторые базы на множествах X и Y. Тогда отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если выполняется следующее условие: для любого множества $V \in \beta_Y$, содержащего точку $f(x)$, существует такое множество $U \in \beta_X$, содержащее точку x, что $f(U) \subset V$. Если отображение f непрерывно во всех точках x, то его называют *непрерывным отображением*.

Замечание 2.6. Ясно, что свойство отображения $f\colon X \to Y$ быть непрерывным зависит от того, какие базы рассматриваются. Если нужно подчеркнуть, какие базы выбраны на X и Y, то пишут $f\colon (X, \beta_X) \to (Y, \beta_Y)$.

Замечание 2.7. Базы окрестностей, приведенные в примере 2.4, стандартно используются для описания непрерывных отображений из евклидова пространства или отрезка в другие евклидовы пространства и отрезки.

Замечание 2.8. Рассмотрим отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, сопоставляющее каждому $t \in [a,b]$ некоторую точку $\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n$ и, тем самым, задающее функции $x_i(t)$, которые будем называть *координатными функциями отображения* γ. Непосредственно проверяется следующее несложное, но полезное утверждение.

Предложение 2.9. *Отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все задаваемые им координатные функции.*

Замечание 2.10. Выбрав подходящим образом базы, можно построить довольно неожиданные примеры непрерывных или разрывных (не являющихся непрерывными) функций.

Пример 2.11. Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ и семейство его подмножеств β, состоящее из всевозможных лучей $(a, +\infty)$. Легко проверить, что β — база. Тогда функция $f(x) = 2x$ непрерывна, но функция $g(x) = -x$ непрерывной не является (проверьте), если рассматривать функции f и g как отображения из $(\mathbb{R}, \beta)$ в $(\mathbb{R}, \beta)$.

2.1.3 Открытые множества и непрерывные отображения

Определение 2.12. Пусть дано пространство X с базой β. Будем называть подмножество $U \subset X$ *открытым*, если для любой точки $x \in U$ найдется такое $V \in \beta$, что $x \in V \subset U$. Пустое множество тоже будем считать открытым. Равносильное определение: непустое множество *открыто*, если оно является объединением некоторых элементов базы. Для каждой точки $x \in X$ каждое открытое множество U, содержащее x, будем называть *окрестностью точки* x.

Как нетрудно заметить, мы дали это определение по аналогии с открытым множеством на прямой. В терминах открытых множеств непрерывное отображение можно охарактеризовать следующим образом.

Теорема 2.13. *Пусть на множествах X и Y заданы базы. Тогда отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, если и только если для любого открытого $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(V) \subset X$ также открыт.*

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство аналогичного результата из курса математического анализа.

2.1.4 Топология и топологические пространства

Определение 2.14. Пусть на множестве X задана база β. Тогда семейство всех открытых множеств, порожденных этой базой, называется *топологией с базой* β или *топологией, порожденной базой* β. Множество X, на котором задана топология, называется *топологическим пространством*. При этом β называется также *базой пространства* X.

Замечание 2.15. Несложно проверяется, что каждая топология τ на множестве X удовлетворяет следующим свойствам: в нее всегда входят $\emptyset$ и все X; кроме того, объединение любых элементов из τ, а также пересечение каждого конечного набора элементов из τ, содержится в τ. Отметим, что в стандартных курсах начинают с определения топологии и топологического пространства.

Определение 2.16. Семейство τ подмножеств множества X называется *топологией на* X, если выполняются следующие условия:

(1) $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$;

(2) если $\{U_\alpha\}$ — произвольный набор элементов из τ, то $\cup U_\alpha \in \tau$ (семейство τ замкнуто относительно операции объединения);

(3) если $\{U_i\}_{i=1}^N$ — произвольный **конечный** набор элементов из τ, то $\cap U_i \in \tau$ (семейство τ замкнуто относительно конечных пересечений).

Множество X, вместе с определенной на нем топологией, называется *топологическим пространством*, а элементы из τ — *открытыми множествами.*

Затем дают определение базы топологии.

Определение 2.17. Пусть τ — некоторая топология на множестве X. Тогда $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии* τ, если каждое непустое открытое множество представимо в виде объединения некоторых элементов из β.

Для наших целей будет более удобно поступать так, как мы сделали, а именно, определять топологию через базу, так как при решении конкретных задач, например при доказательстве непрерывности, как правило используется именно база, а не вся топология.

Из теоремы 2.13 вытекает важный результат.

Следствие 2.18. *Пусть β_X и β'_X — базы окрестностей на множестве X, порождающие одну и ту же топологию. Пусть β_Y и β'_Y — базы окрестностей на множестве Y, порождающие одну и ту же топологию. Тогда отображение $f\colon (X, \beta_X) \to (Y, \beta_Y)$ непрерывно, если и только если непрерывно $f\colon (X, \beta'_X) \to (Y, \beta'_Y)$.*

В дальнейшем мы будем работать со стандартными базами в $\mathbb{R}^n$, но определения будем стараться давать для общих топологических пространств.

Следующими общими свойствами непрерывных отображений мы будем часто пользоваться. Их доказательства можно почти дословно заимствовать из математического анализа.

Предложение 2.19. (1) *Тождественное отображение топологического пространства в себя непрерывно.*

(2) *Пусть X, Y и Z — топологические пространства, а $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — непрерывные отображения. Тогда отображение $g \circ f\colon X \to Z$ непрерывно.*

(3) *Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, и λ — произвольное вещественное число, то следующие функции также непрерывны: $\lambda f\colon X \to \mathbb{R}$, $f + g\colon X \to \mathbb{R}$, $f g\colon X \to \mathbb{R}$, и если $g(x) \neq 0$ при всех $x \in X$, то и $f/g\colon X \to \mathbb{R}$.*

Следствие 2.20. *Пусть p — произвольная точка в $\mathbb{R}^n$. Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho_p(x) = |px|$. Тогда ρ_p — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Если $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$, то $\rho_p(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2}$, т.е. ρ_p является композицией непрерывных функций, откуда и следует непрерывность ρ_p. □

2.1.5 Индуцированная топология

Пусть X — произвольное топологическое пространство с базой β топологии τ. Имеется естественный способ превратить произвольное подмножество $Y \subset X$ в топологическое пространство. Для этого достаточно заметить, что семейство $\beta_Y = \{Y \cap B : B \in \beta\}$ представляет собой базу окрестностей (проверьте это) и, значит, порождает некоторую топологию τ_Y.

Определение 2.21. Пусть $Y \subset X$ — произвольное подмножество топологического пространства X с базой β топологии τ. Тогда семейство $\beta_Y = \{Y \cap B : B \in \beta\}$ называется базой окрестностей, *индуцированной из* X. Порожденная этой базой топология τ_Y на Y также называется *индуцированной из* X.

Замечание 2.22. Индуцированная топология τ_Y может быть получена непосредственно из топологии τ, а именно, $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$ (проверьте).

Пример 2.23. Будем рассматривать плоскость как модель листа бумаги, тогда каждый рисунок, в частности, каждую букву можно представить как подмножество в $\mathbb{R}^2$. Описанная выше конструкция индуцированной топологии превращает все такие рисунки в топологические пространства. Так же получаются топологические пространства, соответствующие геометрическим фигурам, например ломаной, треугольнику, окружности, кругу и т.д.

Пример 2.24. Рассмотрим, как выглядит база окрестностей β отрезка $[a, b]$, индуцированная из стандартной базы окрестностей прямой $\mathbb{R}$. По определению, элементы из β являются пересечениями интервалов прямой $\mathbb{R}$ с отрезком $[a, b]$. Таким образом, β состоит из всех множеств, описанных в примере 2.4, а также из самого отрезка $[a, b]$, поэтому эта база окрестностей и база окрестностей из примера 2.4 порождают одинаковые топологии.

Пример 2.25. Пусть X — окружность $x^2 + y^2 = 1$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y. Тогда индуцированную базу окрестностей будут составлять всевозможные пересечения окружности с открытыми кругами, т.е. открытые дуги окружности, и сама окружность.

2.2 Гомеоморфизм

Определение 2.26. Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если f взаимно однозначно, а оба отображения f и f^{-1} непрерывны. Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y$.

Из теоремы 2.13 вытекает, что если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, то множество $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $f(U) \subset Y$. Таким образом, на гомеоморфизм f можно смотреть как на "переименование точек" в пространстве Y: если $f(x) = y$, то x можно воспринимать как новое имя точки y. При таком взгляде становится очевидно, что все топологические свойства гомеоморфных топологических пространств одинаковы. Поэтому топологические пространства принято рассматривать с точностью до гомеоморфизма.

Замечание 2.27. Из предложения 2.19 вытекает, что каждое пространство гомеоморфно само себе, и что если X гомеоморфно Y, а Y гомеоморфно Z, то и X гомеоморфно Z.

Обычно гомеоморфность двух пространств проще всего устанавливается явным предъявлением подходящего гомеоморфизма.

Пример 2.28. Покажем, что прямая $\mathbb{R}$ и интервал (a, b) гомеоморфны. Действительно, в частном случае, когда $(a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$, гомеоморфизм устанавливается функцией $y = \operatorname{arctg} x$, так как она и обратная к ней, равная ограничению функции $x = \operatorname{tg} y$ на $(-\pi/2, \pi/2)$, являются непрерывными функциями, см. рис. 2.2.

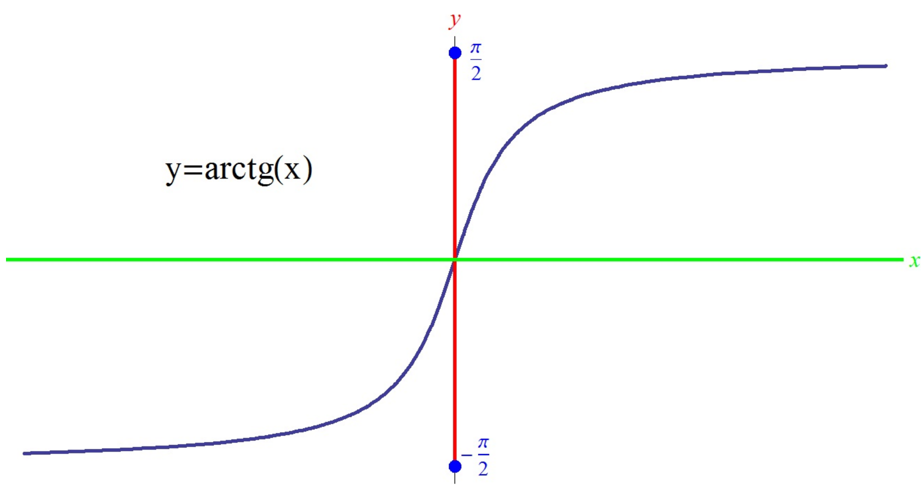

Рис. 2.2: Интервал гомеоморфен прямой.

В общем случае, интервал (a, b) сначала переводится гомеоморфно на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ с помощью отображения вида $y = kx + c$, где k и c — некоторые вещественные числа (найдите явные выражения для k и c); затем можно воспользоваться замечанием 2.27.

Пример 2.29. Рассмотрим на плоскости с координатами x, y окружность $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, и пусть $X = S^1 \cap \{(x, y) : y \geq 0\}$ — замкнутая полуокружность. Тогда X гомеоморфно отрезку $[-1, 1]$. Для проверки достаточно представить отрезок $[-1, 1]$ как подмножество оси x, рассмотреть взаимно однозначное отображение $f\colon X \to [-1, 1]$, положив $f\colon (x, y) \mapsto x$, и показать, что f — гомеоморфизм (сделайте это).

Пример 2.30. Если в примере 2.29 рассмотреть открытую полуокружность $X = S^1 \cap \{(x, y) : y > 0\}$, то аналогичное построение покажет, что X гомеоморфно интервалу $(-1, 1)$, а, значит, в силу примера 2.28 и замечания 2.27, открытая полуокружность гомеоморфна прямой.

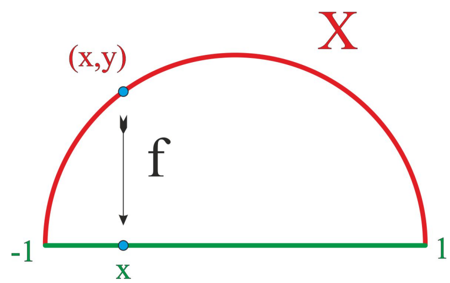

Рис. 2.3: Замкнутый полукруг гомеоморфен отрезку.

Пример 2.31. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y рассмотрим кольцо $X = \{(x,y) : a \le \sqrt{x^2+y^2} \le b\}$, где $0 < a < b < \infty$. Также в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x,y,z) рассмотрим цилиндр $Y = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1,\ a \le z \le b\}$. Тогда X и Y гомеоморфны. Для доказательства достаточно показать, что отображение $f\colon X \to Y$, заданное так:

$$f\colon (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\right),$$

является гомеоморфизмом (сделайте это).

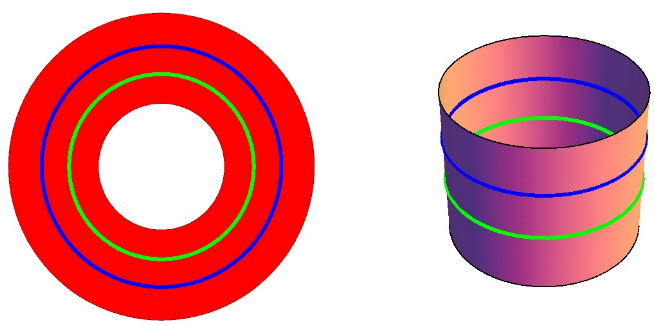

Рис. 2.4: Кольцо гомеоморфно цилиндру.

Пример 2.32. Вырежем из бумаги прямоугольную ленту и склеим две противоположных стороны, предварительно перекрутив ленту на 360°, см. рис. 2.5. Тогда полученное топологическое пространство будет гомеоморфно обычному цилиндру (попробуйте это показать).

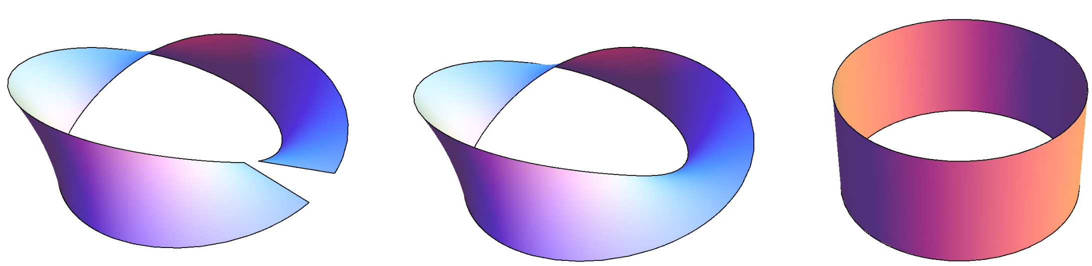

Рис. 2.5: Дважды перекрученная полоска гомеоморфна цилиндру.

Проверка того, что данное отображение не является гомеоморфизмом, тоже обычно несложно. Следующий пример демонстрирует, что для гомеоморфности отображения может оказаться недостаточно его взаимной однозначности и непрерывности.

Пример 2.33. Отображение f из полуинтервала $[0, 2\pi)$ в окружность $\{x^2+y^2=1\}$, заданное формулой $h\colon t\mapsto (\cos t, \sin t)$, взаимно однозначно и непрерывно (проверьте!), но обратное к нему непрерывным не является, поэтому отображение f — не гомеоморфизм.

А вот доказать, что гомеоморфизма не существует вообще — это довольно непростая задача. Основной способ — сравнивать какие-то свойства или характеристики, которые у гомеоморфных пространств должны быть одинаковыми. Если какая-то из таких характеристик у двух данных пространств различается, то пространства не гомеоморфны. Если же эти характеристики совпадают, то ничего определенного сказать нельзя.

Пример 2.34. Приведем идею доказательства того, что буквы T и $\mathsf{\Gamma}$ не гомеоморфны (детали станут понятны позже, после того, как мы обсудим понятие линейной связности). Действительно, если бы существовал гомеоморфизм $f\colon \mathsf{T}\to\mathsf{\Gamma}$, то для любой точки $x\in\mathsf{T}$ ограничение f на $\mathsf{T}\setminus\{x\}$ было бы гомеоморфизмом с $\mathsf{\Gamma}\setminus\big\{f(x)\big\}$. Однако если из T выкинуть точку крепления горизонтальной перекладины, то T распадется на три куска. Буква $\mathsf{\Gamma}$, после выкидывания любой точки, распадается не более чем на два куска. "Количество кусков", из которых состоит топологическое пространство, является топологическим свойством, которое, тем самым, сохраняется при гомеоморфизмах. Тем самым, буквы T и $\mathsf{\Gamma}$ не гомеоморфны.

В следующих параграфах мы обсудим упоминавшееся уже понятие линейной связности, а также еще одну топологическую характеристику — компактность.

2.3 Линейная связность

Определение 2.35. *Непрерывной кривой* в топологическом пространстве X называется любое непрерывное отображение γ отрезка $[a,b]$ в X. При этом говорят, что эта непрерывная кривая *соединяет точки* $\gamma(a)$ *и* $\gamma(b)$.

Определение 2.36. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

Так как композиция непрерывных отображений — тоже непрерывное отображение, мгновенно получаем следующий результат.

Предложение 2.37. *Образ при непрерывном отображении линейно связного пространства — линейно связен.*

Лемма 2.38. *Пусть в топологическом пространстве X даны две непрерывные кривые $\gamma_1\colon[a,b]\to X$ и $\gamma_2\colon[b,c]\to X$, причем $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$. Тогда отображение $\gamma\colon[a,c]\to X$, которое на $[a,b]$ совпадает с γ_1, а на $[b,c]$ с γ_2, тоже является непрерывной кривой.*

Доказательство. Пусть β_X — какая-нибудь база топологии пространства X. Нам достаточно показать, что отображение γ непрерывно в точке b, т.е. для любого $B\in\beta_X$, содержащего $\gamma(b)$, существует такой интервал $(b-\delta,b+\delta)\subset[a,c]$, что его γ-образ содержится в B. Так как γ_i непрерывны в b, существуют полуинтервалы $(b-\delta_1,b]$ и $[b,b+\delta_2)$, которые отображаются γ_1 и γ_2 соответственно в B. Но тогда достаточно положить $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. □

Теорема 2.39. *Зафиксируем в топологическом пространстве X некоторую точку x_0. Тогда X линейно связно, если и только если любую точку можно соединить непрерывной кривой с x_0.*

Доказательство. Если X линейно связно, то утверждение теоремы мгновенно следует из определения линейной связности. Обратно, пусть y_1 и y_2 — произвольные точки из X, и пусть $\gamma_i\colon[a_i,b_i]\to X$, $\gamma_i(a_i)=y_i$, $\gamma(b_i)=x_0$, $i=1,\,2,$ — непрерывные кривые, соединяющие y_1 и y_2 с точкой x_0. Рассмотрим кривую $\gamma_2'(t)=\gamma_2(b_1+b_2-t)$. Тогда γ_2' определена на $[b_1,b_1+b_2-a_2]$ и непрерывна как композиция непрерывных отображений. Кроме того, γ_2' по-прежнему соединяет x_0 и y_2. Применяя лемму 2.38 к γ_1 и γ_2', получаем непрерывную кривую, соединяющую y_1 и y_2. Таким образом, пространство X — линейно связно. □

Определение 2.40. Линейно связное подмножество топологического пространства X, не содержащееся в отличном от него самого линейно связном подмножестве X, называется *линейно связной компонентой* X. Так как других компонент мы не используем[1], в дальнейшем, для краткости, мы будем называть линейно связные компоненты просто *компонентами*.

Определение 2.41. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, заданная на топологическом пространстве, называется *локально постоянной*, если для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U, что f постоянна на U.

Предложение 2.42. *Локально постоянная функция непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — локально постоянная функция, и β — некоторая база топологии на X. Тогда для каждой $x \in X$ существует окрестность $B \in \beta$ точки x, на которой f постоянна и, значит, равна $f(x)$. Но это означает, что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое B, что $f(B) \subset \big(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon\big)$, поэтому f непрерывна. $\square$

Хотя приводимое ниже следствие имеет место для произвольной локально постоянной функции, мы сформулируем и докажем его при дополнительном предположении о ее множестве значений — это упростит доказательство.

Следствие 2.43. *Пусть локально постоянная функция принимает не более чем счетное число значений. Тогда она постоянна на каждой компоненте.*

Доказательство. Пусть x и y — произвольные точки из компоненты, т.е. существует непрерывная кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$, для которой $x = \gamma(a)$ и $y = \gamma(b)$. Так как локально постоянная функция непрерывна по предложению 2.42, и композиция непрерывных отображении непрерывна, функция $g(t) = f\big(\gamma(t)\big)$ также непрерывна. Однако, если $g(a) \ne g(b)$, то g принимает все промежуточные значения, которых континуум, противоречие. $\square$

Обоснования следующих примеров будут даны на семинаре.

Пример 2.44. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием оси x. Тогда X состоит из двух компонент — открытых полуплоскостей $\big\{(x,y) : y < 0\big\}$ и $\big\{(x,y) : y > 0\big\}$.

Пример 2.45. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Тогда X состоит из двух компонент.

Пример 2.46. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга выбрасыванием произвольного его радиуса. Тогда X — линейно связное пространство.

Пример 2.47. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга выбрасыванием двух различных его радиусов. Тогда X состоит из двух компонент.

2.4 Компактность

Определение 2.48. *Открытым покрытием топологического пространства* X называется такое семейство $\{U_\alpha\}$ открытых в X множеств, что $X = \cup_\alpha U_\alpha$. *Открытым покрытием подмножества* Y *топологического пространства* X называется такое семейство $\{U_\alpha\}$ открытых в X множеств, что $Y \subset \cup_\alpha U_\alpha$. *Подпокрытием* называется произвольное подсемейство покрытия, само являющееся покрытием.

Определение 2.49. Топологическое пространство X (подмножество Y топологического пространства X) называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Пример 2.50. Как показывается в математическом анализе, отрезок $[a,b]$ компактен.

Определение 2.51. Подмножество Y топологического пространства X называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus Y$ — открыто в X.

Пример 2.52. Отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ — замкнутое подмножество прямой. Действительно, положим $U = \mathbb{R} \setminus [a,b]$. Выберем произвольную точку $x \in U$ и пусть $\varepsilon = \min\big\{|xa|, |xb|\big\}$, тогда интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ не пересекает $[a,b]$ и, значит, лежит в U, так что U — открыто.

[1] В топологии рассматривается и другое понятие, называемое *связностью*, а также *связные компоненты*, см. [1] или [2].

Пример 2.53. Полуинтервал $[a, b)$ не является замкнутым. Действительно, точка b лежит в дополнении $\mathbb{R} \setminus [a, b)$, но для каждого $\varepsilon > 0$ интервал $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ пересекает $[a, b)$.

Определение 2.54. Подмножество $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если оно лежит в некотором шаре $U_r(P)$.

Следующее важное утверждение, являющееся критерием компактности подмножества евклидова пространства, будет доказано в курсе математического анализа.

Теорема 2.55. *Подмножество Y в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Предложение 2.56. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Предположим, что X компактно. Тогда $f(X)$ — компактное подмножество Y.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие множества $f(Y)$, тогда $\left\{f^{-1}(U_\alpha)\right\}$ — открытое покрытие компакта X, поэтому в нем существует некоторое конечное подпокрытие. Но тогда те U_β, для которых множества $f^{-1}(U_\beta)$ образуют это конечное подпокрытие, сами образуют конечное подпокрытие в $\{U_\alpha\}$. □

Следствие 2.57. *Образ непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$ компактен и, значит, замкнут и ограничен.*

Доказательство. Это следует из компактности отрезка (пример 2.50), предложения 2.56 и теоремы 2.55. □

Следствие 2.58. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на компактном топологическом пространстве. Тогда функция f ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения.*

Доказательство. Действительно, в силу предложения 2.56, множество $f(X) \subset \mathbb{R}$ компактно, следовательно, по теореме 2.55, оно замкнуто и ограничено. Ограниченность множества $f(X)$ означает ограниченность функции f. Замкнутость множества $f(X)$ означает, что $\inf f(X)$ и $\sup f(X)$ лежат в $f(X)$, т.е. функция достигает своего наименьшего и наибольшего значений. □

Следствие 2.59. *Пусть $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная кривая, и $P \in \mathbb{R}^n$ — точка, не лежащая на этой кривой, т.е. не принадлежащая образу отображения γ. Тогда функция $f(t) = |P\gamma(t)|$ расстояния от P то точек кривой $\gamma(t)$ достигает своего минимума, и этот минимум положителен.*

Доказательство. Действительно, функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому, в силу следствия 2.58, функция f достигает своего наименьшего значения в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$. Но тогда $f(t_0) = |P\gamma(t_0)| > 0$, так как P не лежит на γ. □

Литература к главе 2

[1] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1979.

[2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Факториал Пресс, 2000.