

## Глава 13

# Шарнирные механизмы

**План.** Шарнирные механизмы, простейшие шарнирные механизмы, механизм, реализующий параллельный перенос, антипараллелограмм, укрепление параллелограмма и антипараллелограмма, транслятор Кемпе, реверсор Кемпе, сумматор Кемпе, инверсия, основные свойства инверсии, механизмы, реализующие инверсию, инверсор Поселье, инверсор Гарта, подалгебраические множества, рисуемые множества, теорема Кинга, универсальная теорема Кемпе, исторические комментарии, паровая машина и параллелограмм Уатта, лямбда-механизм и стопходящая машина Чебышева, формализация, ромб, укрепление шарнирного механизма, параллелограмм и антипараллелограмм.

В этой главе мы обсудим геометрию шарнирных механизмов, точнее их математической идеализации. Под *шарнирным механизмом* мы будем понимать набор жестких стержней (отрезков), соединенных в некоторых точках шарнирами. Кроме того, некоторые шарниры могут быть жестко закреплены в объемлющем пространстве. Для простоты мы ограничимся плоскими механизмами — такими, у которых все звенья лежат в одной плоскости.

Нас будут интересовать следующие вопросы:

- Какими геометрическими свойствами обладают возможные положения шарнирного механизма?
- Какие геометрические преобразования можно реализовать с помощью шарнирных механизмов?
- Если в одном из шарниров закрепить карандаш, то при деформациях шарнирного механизма он прочертит на плоскости некоторую линию. Какой она может быть? Этот вопрос будет одним из главных в данной лекции.

Мы обсудим формализацию понятия шарнирного механизма и дадим некоторые (но далекие от полных) исторические комментарии. Во всяком случае, мы увидим, что интерес к шарнирным механизмам вырос из важных практических задач.

### 13.1 Простейшие шарнирные механизмы

#### 13.1.1 Шарнирный механизм, реализующий параллельный перенос

Рассмотрим 7 стержней, скрепленных шарнирами в соответствии с рис. 13.1.

Длины стержней удовлетворяют соотношениям  $|AB| = |CD| = |EF|$ ,  $|AC| = |BD|$ ,  $|CE| = |DF|$ . Положения шарниров  $A$  и  $B$  жестко закреплены (но стержни могут вокруг них вращаться). Тогда если точка  $E$  будет прочерчивать некоторую фигуру  $\Phi$ , то точка  $F$  будет пробегать фигуру  $\Phi'$ , полученную из  $\Phi$  параллельным переносом на вектор  $AB$ .

Обратим внимание, что этот механизм может переносить параллельно только такие точки  $E$ , которые лежат в области, определенной неравенством  $||AC| - |CE|| \leq |AE| \leq |AC| + |CE|$ . Эта область является кольцом, если  $|AC| \neq |CE|$ , и кругом, если  $|AC| = |CE|$ .

#### 13.1.2 Важное замечание. Антипараллелограмм

Только что рассмотренный нами механизм при “неаккуратном использовании” может перестать реализовывать параллельный перенос. Это связано с тем, что замкнутая ломаная  $ABCD$ , у которой  $|AB| = |CD|$  и  $|BC| = |AD|$ , не обязательно образует параллелограмм, возможна и такая конфигурация: рис. 13.2.

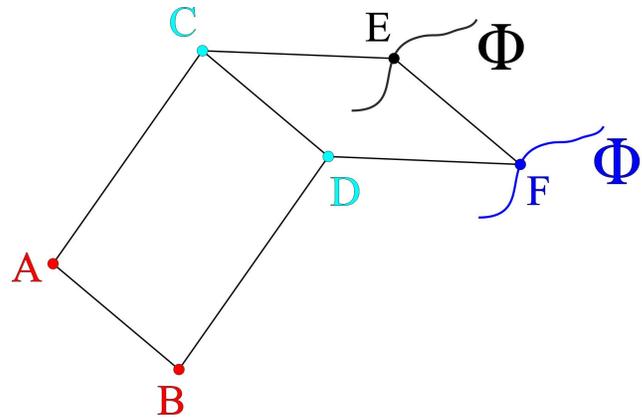


Рис. 13.1: Стержневой механизм, реализующий параллельный перенос.

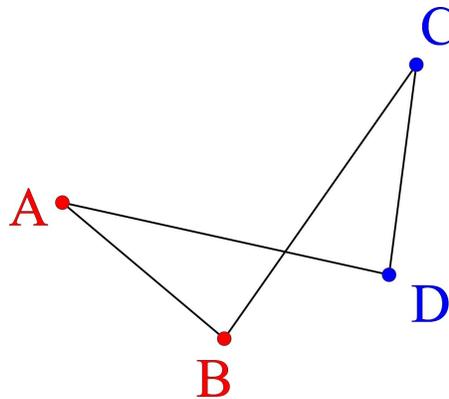


Рис. 13.2: Антипараллелограмм.

Такая конфигурация называется *антипараллелограммом*. Оказывается, любой шарнирный параллелограмм можно продеформировать в антипараллелограмм и наоборот. А именно, для этого нужно развести точки  $A$  и  $C$  на максимальное расстояние  $|AB| + |BC|$ , при этом параллелограмм выродится в отрезок, а затем нужно начать сближать точки  $A$  и  $C$  так, чтобы точки  $B$  и  $D$  оказались в одной полуплоскости относительно прямой  $AC$ .

Если не обращать внимание на этот факт, то он легко может стать источником пробелов и ошибок в рассуждениях.

### 13.1.3 Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма

Рассмотрим шарнирный механизм, состоящий из пяти стержней  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$  и  $EF$ , скрепленных, как показано на рис. 13.3.

Пусть при этом  $|AB| = |DC| = |EF|$ ,  $|AD| = |BC|$ . Шарниры  $E$  и  $F$  расположены на стержнях  $AD$  и  $BC$  так, чтобы  $|AE| = |BF|$  (для простоты можно считать, что  $E$  и  $F$  находятся в серединах соответствующих отрезков).

Как нетрудно проверить, в любых положениях  $ABCD$  является параллелограммом. Этот механизм называется *укрепленным параллелограммом*.

Укрепить антипараллелограмм тоже можно, но это несколько сложнее. Рассмотрим механизм, показанный на рис. 13.4.

Здесь  $ABCD$  — антипараллелограмм. Шарниры  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  расположены в серединах соответствующих отрезков. Стержни  $ZP$ ,  $ZQ$ ,  $ZR$ ,  $ZS$  достаточно длинные, потребуем для их длин выполнения соотношений

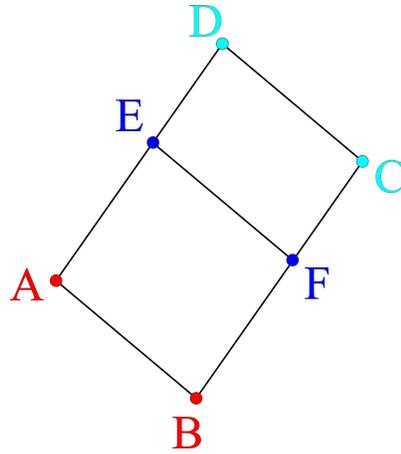


Рис. 13.3: Укрепленный параллелограмм.

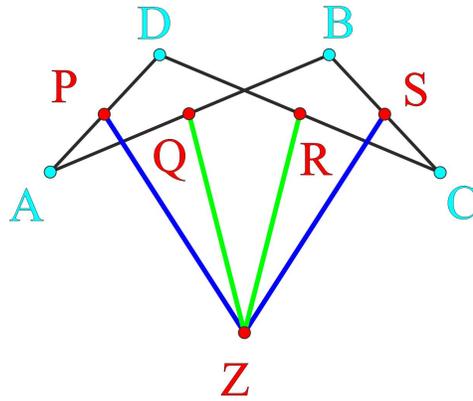


Рис. 13.4: Укрепленный антипараллелограмм.

$$|ZP| = |ZS|, |ZQ| = |ZR| \text{ и}$$

$$\frac{1}{4}(|AB|^2 - |AD|^2) = |ZP|^2 - |ZQ|^2.$$

Проверьте, что тогда  $Z$  лежит на серединном перпендикуляре к  $BD$  (и к  $AC$ , и к  $PS$ , и к  $QR$ ). Убедитесь, что эта конструкция изгибается, но при этом  $ABCD$  остается антипараллелограммом.

В дальнейшем, если не оговорено противное, под (анти)параллелограммом мы будем понимать укрепленный (анти)параллелограмм, но на чертежах дополнительные, укрепляющие, стержни показывать не будем.

Рассмотрим еще несколько интересных шарнирных механизмов.

#### 13.1.4 Параллельный перенос и сложение векторов: транслятор Кемпе

Пусть заданы вещественные числа  $a > 0$  и  $b > 0$ . Требуется построить шарнирный механизм, который содержит стержень  $OX$  длины  $a$ , а также шарниры  $Y$  и  $Z$  такие, что в каждой конфигурации вектор  $\vec{OZ}$  равен сумме векторов  $\vec{OX}$  и  $\vec{OY}$ :

$$\vec{OZ} = \vec{OX} + \vec{OY},$$

и при этом шарнир  $Y$  относительно шарнира  $O$  может принимать любое положение, удовлетворяющее неравенству  $|OY| \leq b$ .

Заметим, что если  $\vec{OZ} = \vec{OX} + \vec{OY}$ , то точка  $Z$  является концом вектора  $\vec{YZ}$ , равного вектору  $\vec{OX}$ . Это соображение является ключевым для построения соответствующего механизма.

Решается эта задача с помощью механизма очень похожего на механизм, приведенный нами в самом начале лекции — отличие состоит в том, что у нового механизма нет закрепленных шарниров. А именно, рассмотрим два (укрепленных) параллелограмма  $OХNM$  и  $MNZY$ , у которых  $|OX| = |MN| = |YZ| = a$  и  $|ХN| = |OM| = |NZ| = |MY| = R$ , где  $2R = b$ . Этот механизм и есть *транслятор Кемпе*, выполняющий требуемое действие (проверьте это), рис. 13.5.

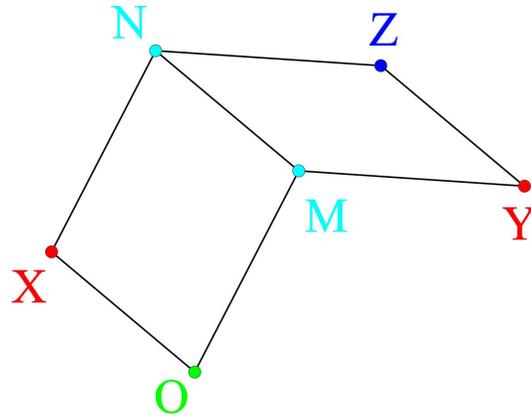


Рис. 13.5: Транслятор Кемпе.

### 13.1.5 Умножение углов на целые числа и деление углов на равные части: реверсор Кемпе

Для заданного целого числа  $k \neq 0$  мы построим такой шарнирный механизм — реверсор Кемпе, в котором имеется три стержня  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ , связанные в каждой конфигурации следующим соотношением: если угол от вектора  $OC$  к вектору  $OA$  равен  $\alpha$ , то угол от вектора  $OC$  к вектору  $OB$  равен  $k\alpha$ . Иными словами, мы построим механизм, который умеет умножать углы на целые ненулевые числа. Обратите внимание, что нас интересуют как положительные  $k$ , так и отрицательные — в дальнейшем это нам понадобится.<sup>1</sup>

Рассмотрим для начала укрепленный антипараллелограмм  $OХPY$  с вершиной  $O$ , закрепленной в начале координат. Добавим к нему два стержня  $OZ$  и  $ZW$ , скрепленных в подвижном шарнире  $Z$ , с шарниром  $W$ , расположенном на стержне  $YP$ . Расстояние  $YW$  и длины стержней  $OZ$  и  $ZW$  выберем такими, чтобы четырехугольник  $OYWZ$  оказался антипараллелограммом, подобным исходному. Укрепим антипараллелограмм  $OYWZ$ . Из соображений подобия вытекает, что углы  $YOX$  и  $ZOY$  равны между собой, а  $|OY|^2 = |OX| \cdot |OZ|$ , рис. 13.6.

Для  $k = 2$  нужно считать, что  $X = C$ ,  $Y = A$ ,  $Z = B$  (рис. 13.6, снизу слева), а для  $k = -1$  — что  $Y = C$ ,  $Z = A$ ,  $X = B$  (рис. 13.6, снизу справа).

Чтобы получить решение в общем случае, нужно повторить проделанную процедуру, добавив к антипараллелограмму  $OYWZ$  еще один подобный ему антипараллелограмм, к последнему также добавить подобный антипараллелограмм и т.д. Построенный механизм Кемпе назвал *реверсором* в силу того, что он умеет умножать углы на отрицательные целые числа.

Нетрудно сообразить, что механизм, который умеет умножать угол на ненулевое целое  $k$ , можно использовать и для деления угла на  $k$  — см. рис. 13.7, а также рис. 13.6, снизу в середине, случай деления на  $k = 2$ : (в некотором смысле, мы меняем местами “вход” и “выход” механизма).

**Замечание 13.1.** Обратите внимание, что с помощью реверсора Кемпе для  $k = 3$  можно решить задачу трисекции угла — задачу на построение, которая не разрешима только циркулем и линейкой.

### 13.1.6 Сложения углов: сумматор Кемпе

Используя реверсор Кемпе, можно построить сумматор углов.

<sup>1</sup> Мы говорим, что *угол от ненулевого вектора  $v$  с направлением  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  к ненулевому вектору  $w$  равен  $\beta \in \mathbb{R}$ , если направление вектора  $w$  равно  $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ .*

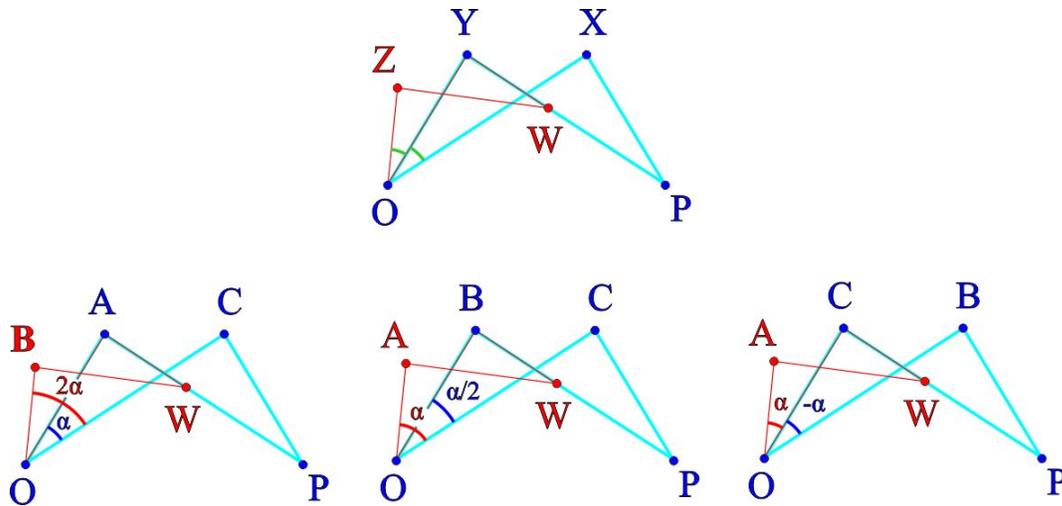


Рис. 13.6: Реверсор Кемпе.

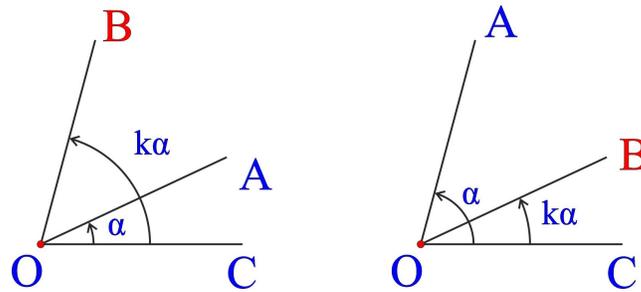


Рис. 13.7: Деление углов.

А именно, требуется построить такой шарнирный механизм, в котором имеются четыре стержня  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  и  $OD$ , причем углы между ними в каждой конфигурации связаны следующим соотношением: если угол от вектора  $\vec{OD}$  к вектору  $\vec{OA}$  равен  $\alpha$ , а угол от вектора  $\vec{OD}$  к вектору  $\vec{OB}$  равен  $\beta$ , то угол от вектора  $\vec{OD}$  к вектору  $\vec{OC}$  равен  $\alpha + \beta$ .

Этот механизм состоит всего из двух дополнительных реверсоров, нужным образом связанных со стержнями, данными в условии.

Первый реверсор делит угол  $AOB$  пополам, пусть при этом  $OY$  — стержень этого реверсора, который идет вдоль “биссектрисы” угла  $AOB$ . Легко проверить, что тогда угол от  $OD$  к  $OY$  равен  $(\alpha + \beta)/2$ .

Второй реверсор удваивает угол  $DOY$ , более точно, он так прикреплен к стержням  $OD$ ,  $OY$  и  $OC$ , что угол от  $OD$  к  $OC$  в два раза больше угла от  $OD$  к  $OY$ .

Тем самым, построенный механизм, называемый *сумматором Кемпе*, реализует поставленную задачу, рис. 13.8.

## 13.2 Инверсия

### 13.2.1 Определение и основные свойства инверсии

Инверсия — это одно из замечательных геометрических преобразований.

Пусть на плоскости  $\Pi$  выбрана точка  $O$  (*центр или полюс инверсии*) и задано число  $a > 0$  (*радиус или степень инверсии*). Каждой точке  $P \in \Pi$ , отличной от  $O$ , инверсия ставит в соответствие точку  $Q$  на луче  $[OP)$  такую, что  $|OP| \cdot |OQ| = a^2$ . Мы будем обозначать инверсию через  $I$ , а в тех случаях, когда нужно уточнить центр и радиус инверсии, — через  $I_{O,a}$ .

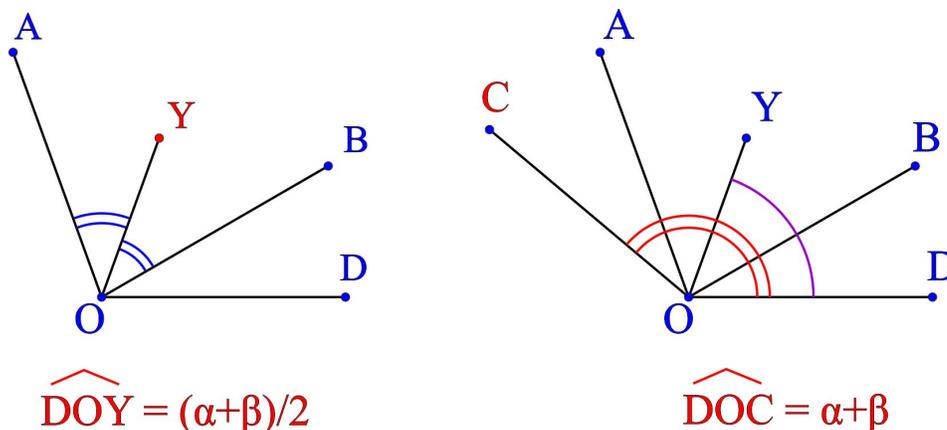


Рис. 13.8: Сумматор Кемпе.

Легко видеть, что неподвижными точками инверсии служат точки окружности инверсии, и причем только они. Инверсия является взаимно однозначным отображением  $\mathbb{P} \setminus \{O\}$  на себя, при этом обратным отображением к инверсии служит она же сама:  $(I)^{-1} = I$  или  $I^2 = \text{id}_{\mathbb{P} \setminus \{O\}}$ .

Инверсия обладает рядом важных свойств, которые нам понадобятся в этой лекции. А именно, нам нужно выяснить, как инверсия действует на окружности и прямые.

**Теорема 13.2.** Пусть  $I$  — инверсия с центром в  $O$  и радиусом  $a$ . Тогда

- (1) Если прямая  $\ell$  проходит через центр инверсии  $O$ , то образом  $\ell \setminus \{O\}$  под действием инверсии  $I$  является  $\ell \setminus \{O\}$ . Иными словами прямая, проходящая через  $O$ , под действием инверсии  $I$  переходит в себя (но нужно помнить, что в точке  $O$  инверсия не определена, и что  $O$  не является образом ни для какой точки плоскости).
- (2) Если прямая не проходит через центр инверсии  $O$ , то ее образом служит некоторая окружность, проходящая через точку  $O$ , за исключением самой точки  $O$ . И обратно, образом окружности, проходящей через  $O$  и рассматриваемой без точки  $O$ , служит некоторая прямая, не проходящая через  $O$ .
- (3) образом окружности, не проходящей через точку  $O$ , служит окружность, также не проходящая через  $O$ . Окружность переходит в себя, если она имеет с окружностью инверсии две общие точки, и в каждой из них эти окружности пересекаются под прямым углом.

*Доказательство.* (1) Очевидно из определения инверсии (но не забудьте проверить, что любая точка на  $\ell \setminus \{O\}$  принадлежит образу  $I(\ell \setminus \{O\})$ ).

(2) Опустим из точки  $O$  на прямую  $\ell$  перпендикуляр  $OA$ . Пусть  $A' = I(A)$  — образ точки  $A$  при инверсии. Окружность, построенную на  $OA'$  как на диаметре, обозначим через  $S$ , см. рис. 13.9.

Докажем, что  $S \setminus \{O\} = I(\ell)$ .

Сначала проверим, что  $S \setminus \{O\} \supseteq I(\ell)$ . Пусть  $B$  — некоторая точка прямой  $\ell$ , отличная от  $A$ , а  $B'$  — ее образ при инверсии. По определению инверсии  $|OB'| \cdot |OB| = |OA'| \cdot |OA| = a^2$ , следовательно,  $\frac{|OB'|}{|OA'|} = \frac{|OA|}{|OB|}$ . Теперь заметим, что в треугольниках  $\triangle OAB$  и  $\triangle OB'A'$  угол  $O$  общий, поэтому они подобны. Тем самым, в треугольнике  $\triangle OB'A'$  угол  $B'$  прямой, поэтому  $B' \in S$ . Осталось заметить, что  $B'$  не может совпадать с  $O$ .

Теперь докажем обратное включение  $S \setminus \{O\} \subseteq I(\ell)$ . Иными словами, для любой точки  $B' \in S \setminus \{O, A'\}$  нужно показать, что ее прообраз при инверсии, т.е. такая точка  $B$ , что  $I(B) = B'$ , принадлежит  $\ell$ . Рассуждая аналогично, мы увидим, что  $\triangle OAB$  и  $\triangle OB'A'$  подобны, поэтому в  $\triangle OAB$  угол  $B$  прямой, откуда  $B \in \ell$ .

Обратное утверждение доказывается аналогично.

(3) Пусть окружность  $S$  не проходит через точку  $O$ . Рассмотрим ее диаметр  $AB$ , на котором (или на его продолжении) лежит центр инверсии. Пусть  $A' = I(A)$ ,  $B' = I(B)$ , и  $S'$  — окружность, построенная на  $A'B'$  как на диаметре, см. рис. 13.10.

Докажем, что  $S' = I(S)$ .

Пусть точка  $C \in S$  не лежит на прямой  $AB$ , и  $C' = I(C)$ . Так же, как и в предыдущем пункте доказывается, что треугольники  $\triangle OC'A'$  и  $\triangle OAC$  подобны, поэтому равны углы  $\angle C'A'B'$  и  $\angle HCA$ , где  $H$  — некоторая

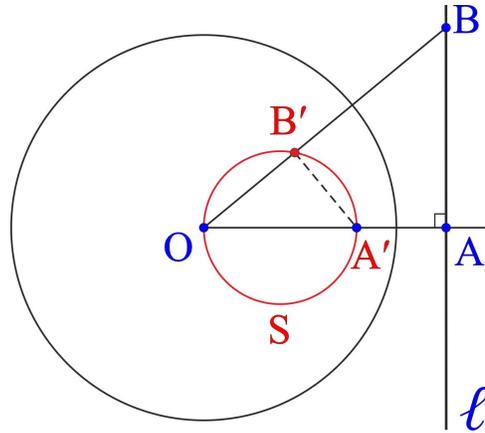


Рис. 13.9: При инверсии прямая  $\ell$  и окружность  $S$  без точки  $O$  меняются местами.

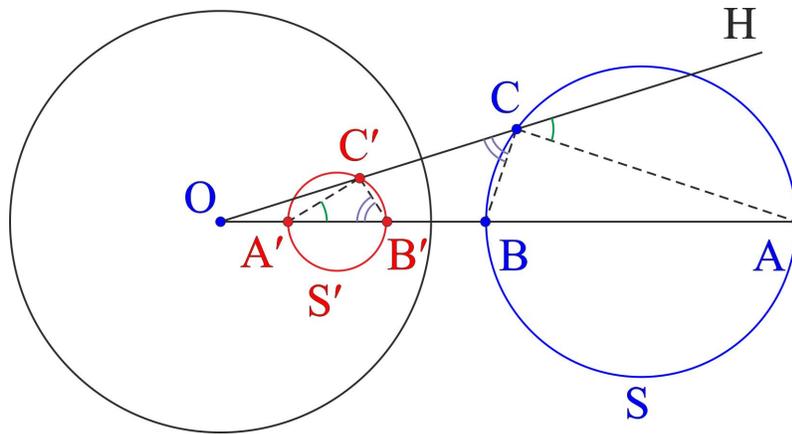


Рис. 13.10: При инверсии окружность  $S$  и окружность  $S'$  меняются местами.

точка на продолжении луча  $[OC)$  за точки  $C$  и  $C'$ . Аналогичным образом, из подобия треугольников  $\triangle OC'B'$  и  $\triangle OBC$  следует, что  $\angle OB'C'$  равен  $\angle OCB$ . Отсюда получаем, что  $\angle ACB = \angle A'C'B'$ .

Тем самым, угол  $\angle ACB$  прямой, т.е.  $C \in S$ , тогда и только тогда, когда прямым является угол  $\angle A'C'B'$ , т.е.  $C' \in S'$ .  $\square$

**Замечание 13.3.** Теорема 13.2 может быть доказана с помощью комплексных чисел. Для этого нужно заметить, что инверсия относительно окружности радиуса  $a$  с центром в начале координат задается формулой  $z \mapsto \frac{a^2}{\bar{z}}$ . Кроме того, понадобятся следующие два факта.

- (1) Уравнение окружности с центром в точке  $z_0$  и радиусом  $r$  с помощью комплексных чисел записывается в виде  $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$ .
- (2) Уравнение  $Ax + By = 1$  прямой, не проходящей через  $0$ , может быть записано с помощью комплексных чисел в виде  $z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 = 1$ , где  $z = x + iy$  и  $z_0 = \frac{1}{2}(A + Bi)$ .

Детали оставляем читателю в качестве упражнения.

**Замечание 13.4.** С помощью инверсии можно доказать, что любое построение, осуществимое с помощью циркуля и линейки, можно проделать одним циркулем.

### 13.2.2 Механизмы, реализующие инверсию

#### Инверсор Поселье

Рассмотрим шарнирный механизм, состоящий из шести стержней: четырех стержней длины  $f$ , составленных в виде ромба  $ABCD$  с шарнирами во всех углах ромба, и еще двух стержней  $OB$  и  $OD$  длины  $d$ , где  $d > f$ . Шарнир  $O$  будем считать неподвижным. Ромб  $ABCD$  будем считать укрепленным, см. рис. 13.11.

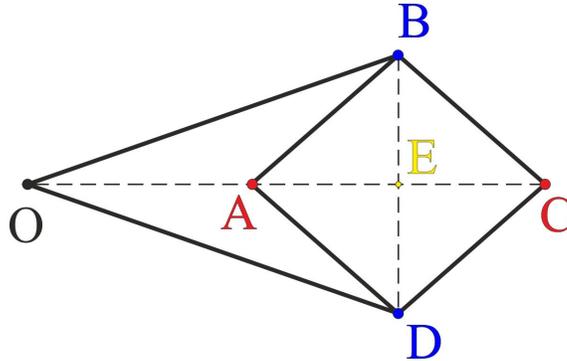


Рис. 13.11: Точки  $A$  и  $C$  связаны инверсией относительно точки  $O$ .

**Предложение 13.5.** Точки  $A$  и  $C$  связаны инверсией относительно точки  $O$  с радиусом инверсии  $a$ , для которого  $a^2 = d^2 - f^2$ .

*Доказательство.* Треугольники  $\triangle OBD$ ,  $\triangle ABD$  и  $\triangle CBD$  равнобедренные с общим основанием  $BD$ . Поэтому точки  $O$ ,  $A$  и  $C$  лежат на одной прямой — серединном перпендикуляре к отрезку  $BD$ . Пусть  $E$  — середина отрезка  $BD$ . Тогда

$$\begin{aligned} |OA| \cdot |OC| &= (|OE| - |AE|)(|OE| + |AE|) = |OE|^2 - |AE|^2 = \\ &= (|OB|^2 - |BE|^2) - (|AB|^2 - |BE|^2) = |OB|^2 - |AB|^2 = d^2 - f^2 = a^2, \end{aligned}$$

а это и означает, что точки  $A$  и  $C$  связаны указанной инверсией.  $\square$

Легко заметить, что инверсор Поселье может строить образы точек при инверсии не для всех точек плоскости — ни точку  $A$ , ни точку  $C$  как нельзя подвести слишком близко к  $O$ , так и нельзя отодвинуть достаточно далеко. Область, где “работает” инверсор Поселье, описана в следующем утверждении, доказательство которого очевидно.

**Следствие 13.6.** Соответствие  $A \mapsto C$ , реализованное с помощью инверсора Поселье, задает инверсию кольца  $K$  с центром в точке  $O$ , внутренним радиусом  $d - f$  и внешним радиусом  $d + f$ , на себя. отображение  $I: K \rightarrow K$  является взаимно однозначным.

Если теперь к инверсору Поселье добавить стержень  $RA$  с неподвижным шарниром  $R$  длины, равной расстоянию от  $R$  до  $O$ , то точка  $A$  будет двигаться по окружности  $S$  с центром в  $R$  и радиусом  $RA$ , проходящей через центр инверсии  $O$ . Но, как говорилось выше, точка  $A$  может пробегать не всю окружность  $S$ , а только ту ее часть, которая лежит в кольце  $K$ .

Точка  $C$  при этом будет двигаться по прямой линии  $I(S)$ , точнее по ее пересечению с кольцом  $K$ .

**Замечание 13.7.** Первые сообщения о построении инверсора были в частном письме офицера инженерного корпуса французской армии Поселье, датированном 1864 годом. Однако письмо подробностей построения не содержало. В 1868 году студент П.Л. Чебышева Липман Липкин изобретает инверсор (прямоугольник Липкина) и в 1870 публикует подробную статью. Наконец, в 1873 году появляется статья Поселье с описанием такого же инверсора и со ссылкой на работу Липкина (это замечание взято из [1]).

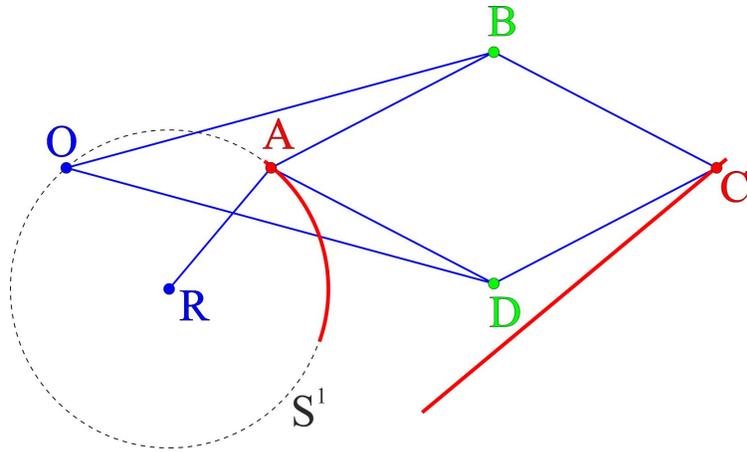


Рис. 13.12: Инверсор Поселье.

### Инверсор Гарта

Приведем пример еще одного инверсора, изобретенного Гартом (Harry Hart) в 1875 году. Рассмотрим (укрепленный) антипараллелограмм  $ABDC$ . Тогда четырехугольник  $ABCD$  является равнобокой трапецией с основаниями  $AD$  и  $BC$ , см. рис. 13.13.

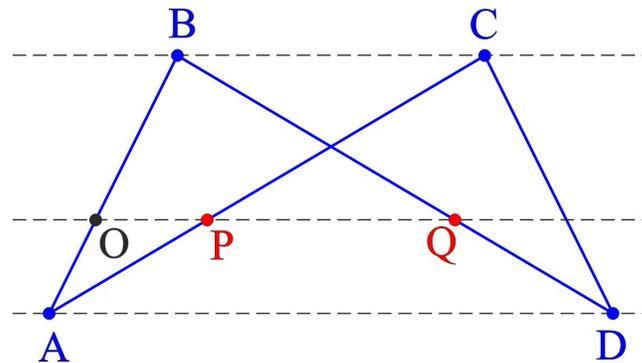


Рис. 13.13: Произведение  $|OP| \cdot |OQ|$  постоянно.

На сторонах  $AB$ ,  $AC$  и  $BD$  зафиксируем соответственно точки  $O$ ,  $P$  и  $Q$  так, чтобы они лежали на одной прямой, параллельной основаниям трапеции  $AD$  и  $BC$ . Длины  $|AB| = |CD|$  и  $|BD| = |AC|$  будем считать известными и фиксированными.

**Предложение 13.8.** В описанных выше условиях произведение  $|OP| \cdot |OQ|$  постоянно.

**Задача 13.9.** Докажите предложение 13.8. Заодно покажите, что произведение  $|OP| \cdot |OQ|$  зависит от длин  $|AB| = |CD|$  и  $|BD| = |AC|$  и от того, в каком отношении точка  $O$  разбивает отрезок  $AB$ .

Будем считать, что антипараллелограмм  $ABDC$  собран из стержней, шарнирно соединенных в его вершинах; в точках  $O$ ,  $P$  и  $Q$  также расположены шарниры, причем шарнир  $O$  закреплен. В соответствии с предложением 13.8, точки  $P$  и  $Q$  будут связаны инверсией с центром в точке  $O$  и степенью, зависящей от длин стержней  $|AB| = |CD|$ ,  $|BD| = |AC|$  и от отношения  $|AO|/|OB|$ . Поэтому если, как и в случае с инверсором Поселье, заставить точку  $P$  двигаться по окружности, проходящей через  $O$ , то точка  $Q$  будет двигаться по прямой, см. рис. 13.14.

**Задача 13.10.** Опишите “область определения” и “область значений” инверсора Гарта.

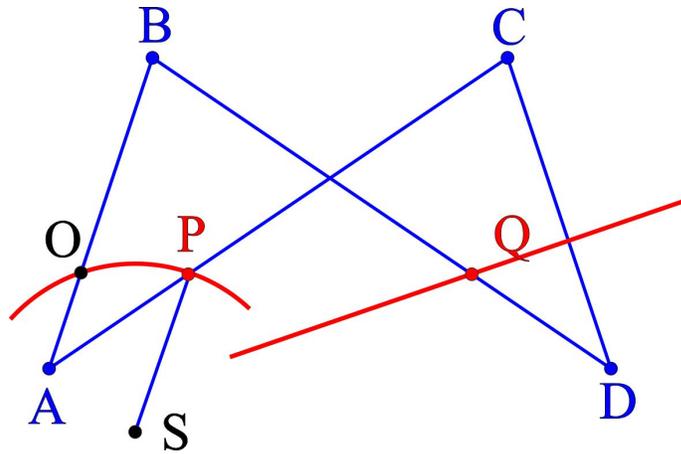


Рис. 13.14: Инверсор Гарта.

### 13.3 Теорема Кемпе

#### 13.3.1 Рисуемые множества и теорема Кинга

Представим, что в одной из точек шарнирного механизма закреплен карандаш. Какие линии может прочертить этот карандаш, если мы будем менять форму шарнирного механизма (разумеется, не меняя его устройства и не деформируя стержни, из которых он состоит)?

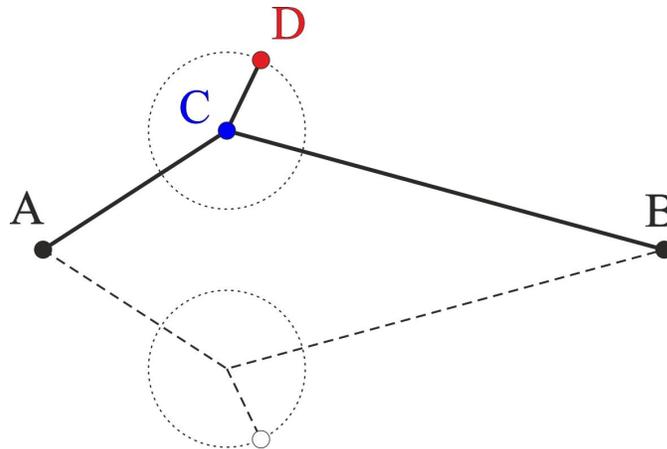
Аналогичный вопрос можно поставить, если рассматривать шарнирные механизмы не на плоскости, а в пространстве  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ .

Ответ содержится в приведенной ниже теореме Кинга.

Множество  $A \subset \mathbb{R}^d$  называется *полуалгебраическим*, если оно является конечным объединением множеств, каждое из которых представляет собой решение конечной системы полиномиальных равенств и неравенств. Легко видеть, что конечные объединения, конечные пересечения, а также дополнения в  $\mathbb{R}^d$  полуалгебраических множеств являются также полуалгебраическими множествами.

Будем говорить, что шарнирный механизм *рисует множество*  $A$ , если некоторый шарнир (или фиксированная точка на каком-то из стержней) этого механизма пробегает в точности все множество  $A$ , пока механизм принимает все возможные конфигурации.

В этом определении есть небольшая тонкость: мы не требуем здесь, чтобы множество  $A$  “заметалось” при непрерывных деформациях шарнирного механизма: в нашем определении рисуемое множество может быть несвязным, см. рис. 13.15.

Рис. 13.15: Шарниры  $A$  и  $B$  закреплены, шарниры  $C$  и  $D$  подвижны.

В разделе про формализацию мы вернемся к этому определению.

Множество  $A$  называется *рисующим*, если существует механизм, который рисует это множество.

**Теорема 13.11** (Кинг [9], [10]). *При  $d \geq 2$  множество  $A \subset \mathbb{R}^d$  рисуемо, если и только если  $A$  или совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^d$ , или является компактным полудалгебраическим множеством.*

Доказательство мы не приводим, интересующимся рекомендуем обратиться к текстам [9] и [10].

В частности, теорема 13.11 утверждает, что с помощью шарнирных механизмов можно нарисовать любой многогранник, а также конечное объединение многогранников. Рисуемой в  $\mathbb{R}^3$  является любая компактная поверхность, заданная как решение полиномиального уравнения (например, эллипсоид). Больше того, рисуемым является фрагмент некомпактной поверхности, являющейся решением полиномиального уравнения, содержащийся в некотором шаре (или эллипсоиде) — в частности, рисуемыми являются подходящие куски гиперболоидов или параболоидов. Аналогичные утверждения верны и для кривых на плоскости.

**Задача 13.12.** Модифицируйте инверсор Поселье и постройте шарнирный механизм, рисующий треугольник на плоскости.

### 13.3.2 Универсальная теорема Кемпе

В этом параграфе мы приведем основные идеи доказательства теоремы Кемпе о том, что с помощью подходящего шарнирного механизма можно начертить часть произвольной наперед заданной *алгебраической кривой*, содержащуюся в некотором фиксированном круге. Под алгебраической кривой мы понимаем множество нулей произвольного многочлена от двух переменных.

**Замечание 13.13.** Из теоремы Стоуна–Вейерштрасса о приближении непрерывных отображений вытекает, что с помощью алгебраических кривых можно сколь угодно хорошо приблизить любую непрерывную кривую, в связи с чем Терстон интерпретировал этот результат как то, что шарнирные механизмы могут расписаться за любого из нас.

Эта теорема возникла в трудах Альфреда Кемпе (Kempe) в 1876 году (см. [6]). Любопытно, что в 1984 году в его доказательстве была обнаружена ошибка, которую удалось исправить лишь в 2002 году М. Каповичу и Дж. Миллсону [7], см. также [8].

Будем считать, что на плоскости введены стандартные декартовы координаты  $Oxy$ .

**Теорема 13.14** (Кемпе [6], Капович и Миллсон [7]). *Пусть  $f(x, y)$  — вещественный многочлен от двух переменных и  $D^2$  — замкнутый диск на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Тогда существует плоский шарнирный механизм, который рисует множество  $D^2 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ .*

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что центр  $O$  круга  $D^2$  совпадает с началом координат.

“Параметризуем” точки круга  $D^2$  с помощью положений точки  $C$  (укрепленного) шарнирного ромба  $OACB$ , у которого точка  $O$  совпадает с центром круга  $D^2$ , а длина стороны  $a$  равна половине радиуса круга  $D^2$ . Положим  $OA = a(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $OB = a(\cos \beta, \sin \beta)$ , откуда  $C = (x, y) = a(\cos \alpha + \cos \beta, \sin \alpha + \sin \beta)$ . Пусть

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} c_{ij} x^i y^j,$$

где  $c_{ij}$  — коэффициенты многочлена  $f$ , являющиеся постоянными вещественными числами. Подставив в эту формулу выражения для координат точки  $C$ , получим

$$(13.1) \quad f = \sum_{0 \leq i+j \leq n} c_{ij} a^{i+j} (\cos \alpha + \cos \beta)^i (\sin \alpha + \sin \beta)^j.$$

Раскрывая скобки и применяя формулы, преобразующие произведение двух косинусов, косинуса и синуса, а также двух синусов в сумму тригонометрических функций от суммы и разности углов, мы приведем выражение (13.1) к виду

$$(13.2) \quad f = \sum_{|r|+|s| \leq n} [d_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta) + e_{rs} \sin(r \cdot \alpha + s \cdot \beta)] = \\ = \sum_{|r|+|s| \leq n} [d_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta) + e_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta - \pi/2)].$$

В этой формуле величины  $d_{rs}$  и  $e_{rs}$  некоторым определенным образом выражаются через коэффициенты  $c_{ij}$  и являются постоянными числами, не зависящими от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Теперь мы опишем, как устроен механизм, “вычисляющий” значение  $f(x, y)$  в точках круга  $D^2$ . Вычислять  $f(x, y)$  этот механизм будет в том смысле, что для данной точки  $(x, y) \in D^2$  он будет строить некоторую точку плоскости с абсциссой, равной  $f(x, y)$ , при этом на ординату мы никаких требований не накладываем.

Более точно, мы построим механизм, который “вычисляет” в указанном смысле выражение (13.2), зависящее от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Пусть стержень  $OX$  направлен вдоль оси абсцисс, а стержень  $OY$  — вдоль оси ординат, будем считать концы этих стержней фиксированными. Тогда с помощью реверсов Кемпе и сумматоров Кемпе, начиная от подвижных стержней  $OA$  и  $OC$  (для них  $\angle AOX = \alpha$  и  $\angle COX = \beta$ ), мы можем построить механизмы, которые содержат такие стержни  $OD_{rs}$  и  $OE_{rs}$ , что угол от  $OX$  к  $OD_{rs}$  равен  $r \cdot \alpha + s \cdot \beta$ , а угол от  $OX$  к  $OE_{rs}$  равен  $r \cdot \alpha + s \cdot \beta - \pi/2$ . Позаботимся также, чтобы длины этих стержней удовлетворяли равенствам  $|OD_{rs}| = |d_{rs}|$  и  $|OE_{rs}| = |e_{rs}|$ ; при этом, если  $d_{rs}$  и/или  $e_{rs}$  отрицательно, то возьмем точку, центрально симметричную относительно  $O$ . Итак, в нашем распоряжении имеется несколько механизмов, которые вычисляют величины вида  $d_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta)$  и  $e_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta - \pi/2)$ , т.е. строят точки с такими абсциссами.

Теперь с помощью транслятора Кемпе построим вектор  $\overrightarrow{OF}$ , равный сумме всех векторов  $\overrightarrow{OD_{rs}}$  и  $\overrightarrow{OE_{rs}}$ . Легко видеть, что зависимость абсциссы точки  $F$  от  $\alpha$  и  $\beta$  в точности задается правой частью формулы (13.2).

В силу компактности круга  $D^2$ , значение ординаты точки  $F$  не может превышать некоторой константы  $M$ . Поэтому если мы сумеем добавить к уже построенному шарнирному механизму “устройство”, которое будет ограничивать положение шарнира  $F$  только отрезком прямой  $x = 0$  от точки  $M_1 = (0, -M)$  до точки  $M_2 = (0, M)$ , то тогда всевозможные положения шарнира  $C$  будут в точности совпадать с множеством  $D^2 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ .

Добавим к нашему механизму инверсор Поселье (см. рис. 13.16) в указанном на рисунке положении на плоскости и с такими длинами стержней  $d$  и  $f$ , чтобы среди положений шарнира  $F$  содержался отрезок  $M_1M_2$ . Остается добавить к инверсору стержень  $QT$  с неподвижным шарниром  $T$  так, чтобы  $Q$  могла двигаться только по окружности, являющейся образом при инверсии прямой  $x = 0$  — тогда  $F$  сможет двигаться только по прямой  $x = 0$  (точнее, по отрезку этой прямой).

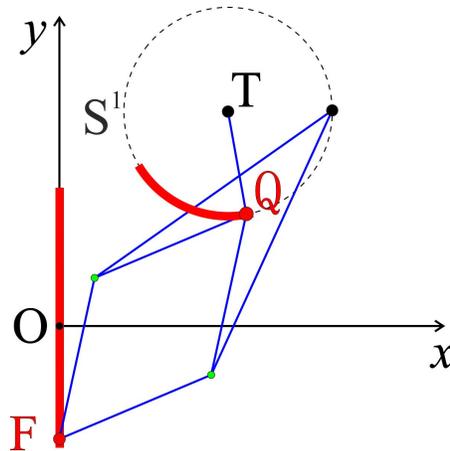


Рис. 13.16: Благодаря инверсору Поселье точка  $F$  может двигаться только вдоль прямой  $x = 0$ .

□

## 13.4 Исторические комментарии

Уже из рассмотренных нами вопросов видно, что теория шарнирных механизмов весьма содержательна с точки зрения математики. Но, как это часто бывает, исторически интерес к шарнирным механизмам возник из практических задач.

### 13.4.1 Паровая машина и параллелограмм Уатта

В 1812 году английский изобретатель Томас Ньюкомен построил работающую паровую машину. Как считается, это была первая паровая машина, пригодная для использования в промышленных масштабах. Она применялась для приведения в действие насосов, откачивающих воду из шахт. До появления первых пароходов и паровозов еще должно было пройти почти 100 лет.

На рисунке 13.17 показана паровая машина Ньюкомена. Опишем ее принцип действия.

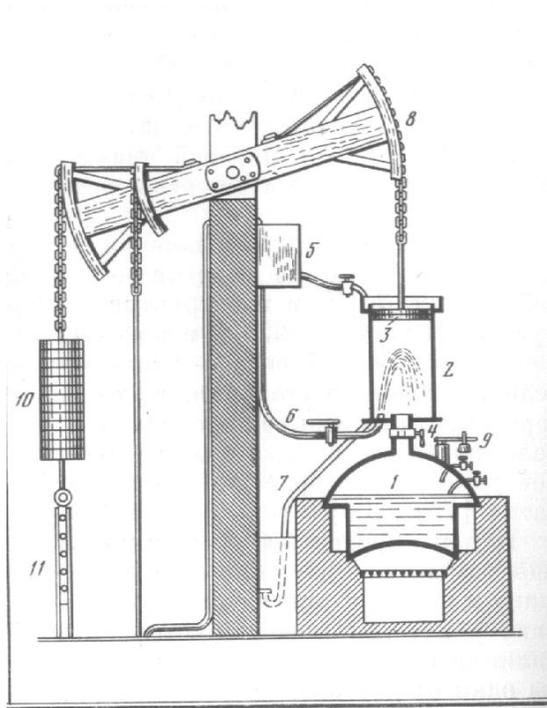


Рис. 13.17: Паровая машина Ньюкомена.

К одному плечу коромысла прикреплен противовес и привод водяного насоса, находящегося в шахте, а к другому — шток поршня паровой машины. Противовес выбирался так, чтобы в свободном состоянии левое плечо коромысла перевешивало и поднимало поршень. При этом в цилиндр в пространство под поршнем поступает пар, затем впускной клапан перекрывается, пар в цилиндре конденсируется охлаждением и под поршнем образуется разрежение. Атмосферное давление опускает поршень (поэтому часто эту машину называли паро-атмосферной) и как раз на этой стадии машина отдает мощность. Потом конденсированная вода сливается, впускной клапан открывается, и цикл повторяется снова. Как видно, машина Ньюкомена совершала полезную работу только при движении поршня вниз, а обратный ход поршня вверх был холостым.

Концы коромысла имели форму дуг окружности, а приводы были цепными, чтобы обеспечить вертикальное положение тяги насоса и штока поршня. Здесь читателю стоит повторить историю промышленности XVIII-го века и понять, насколько непросто было изготовить с достаточной степенью точности цилиндр и поршень, насколько непросто было обеспечить уплотнение между стенками цилиндра и поршнем, и наконец, насколько несовершенны были смазочные материалы.

Во второй половине XVIII-го века над усовершенствованием машины Ньюкомена много работал Джеймс Уатт, шотландец по происхождению. Он изобрел так называемый *конденсатор*, который увеличил КПД машины Ньюкомена, в результате чего конденсаторы Уатта стали добавлять к уже построенным машинам.

Уатту удалось изобрести двухстороннюю машину: у нее оба хода поршня были рабочими — пар попеременно поступал в пространство над и под поршнем. Как легко понять, место, в котором шток поршня проходит через верхнюю крышку машины, должно быть уплотнено в достаточной степени, чтобы выдерживать давление пара.

И вот тут возникает интересная задача: как передать на коромысло усилие от поршня при его ходе вверх, учитывая, что шток должен сохранять вертикальное положение с высокой точностью. Иными словами, нужно было придумать механизм, сопрягающий прямолинейное движение штока поршня и движение по окружности

(правого) конца коромысла. Эту задачу Уатт успешно решил с помощью изобретенного им *шарнирного механизма параллельного движения* и, как он сам писал в одном из писем сыну: «Хотя я не очень гонюсь за славой, но горжусь механизмом параллельного движения больше, чем любым другим своим изобретением».<sup>2</sup> Отметим, что Уатт нашел лишь приближенное решение. Идея его механизма такая. Рассмотрим ломаную  $O_1A_1A_2O_2$ , крайние ребра которой имеют одинаковую длину, а концы  $O_1$  и  $O_2$  закреплены, см. рис. 13.18. Пусть  $M$  — середина  $A_1A_2$ . Уатт заметил, что при изменении положения стержней траектория точки  $M$  незначительно отклоняется от прямой. В действительности, траектория точки  $M$  — вытянутая “восьмерка”. При правильно подобранных длинах стержней отклонение оказывалось допустимым с технической точки зрения.

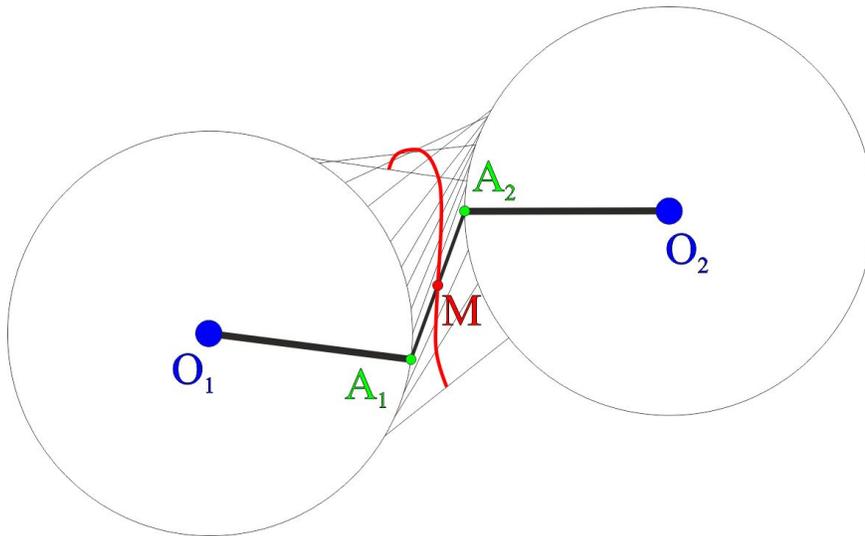


Рис. 13.18: Механизм Уатта упрощенный.

Уатт столкнулся с еще одной проблемой: для создания достаточно протяженной почти прямолинейной части траектории движения точки  $M$  необходимо было разнести крепления  $O_1$  и  $O_2$  на большое расстояние, что приводило к недопустимому увеличению размеров машинного отделения. Для решения этой проблемы Уатт применил *пантографическое расширение* (*пантограф*<sup>3</sup> — прибор для перерисовки чертежей в другом масштабе), дополнив среднюю часть  $A_1A_2$  до параллелограмма  $A_1A_2B_2B_1$ , где  $A_2$  является серединой отрезка  $B_2O_2$  (в дальнейшем такой параллелограмм стали называть *параллелограммом Уатта*), см. рис. 13.19. Теперь вместо  $M$  можно взять точку  $B_1$ , у которой траектория движения вдвое больше, чем у  $M$ .

Двухсторонняя машина Уатта, благодаря своей более “регулярной” или “равномерной” работе, нашла гораздо более широкую сферу применения (мельницы, фабрики и т.п.), чем машина Ньюкомена, которая использовалась фактически только для приведения в действие насосов.

### 13.4.2 Лямбда-механизм и стопоходящая машина Чебышева

Другой интересный классический шарнирный механизм, переводящий вращательное движение в почти прямолинейное, был создан П.Л.Чебышевым. Он используется в так называемой “стопоходящей машине Чебышева” (ее действующий оригинал хранится в Политехническом музее г. Москвы). Вот ее внешний вид, см. рис. 13.20.

Чтобы разобраться, как “ходит” машина Чебышева, начнем с важной составной части этой машины — *лямбда-механизма*, см. рис. 13.21. В нем точки  $O_1$  и  $O_2$  — закрепленные шарниры;  $A_1$  и  $A_2$  — подвижные шарниры;  $A_1$  — середина стержня  $A_2B$ ; точка  $A_2$  движется по окружности, при этом свободный конец  $B$  описывает замкнутую кривую  $\gamma$ , изображенную на рисунке.

Отметим, что верхняя часть кривой  $\gamma$  достаточно прямолинейна (подбирая соотношения между длинами стержней и расстоянием между точками  $O_1$  и  $O_2$ , можно добиться большей прямолинейности соответствующего

<sup>2</sup> «Though I'm not over anxious after fame, yet I am more proud of the parallel motion than of any other invention I have ever made.» — 1808, письмо к сыну, цитируется по книге Franz Reuleaux, “The Kinematics of Machinery” (1876) или по книге James Patrick Muirhead “The Origin and Progress of the Mechanical Inventions of James Watt; Illustrated by His Correspondence”, vol. II.

<sup>3</sup> Рекомендуем читателю самостоятельно разобраться с устройством пантографа.

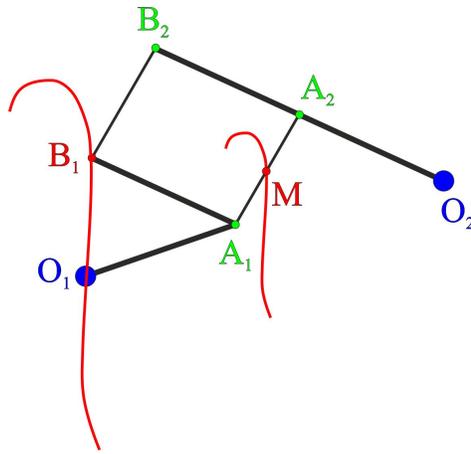


Рис. 13.19: Механизм Уатта. Параллелограмма Уатта.

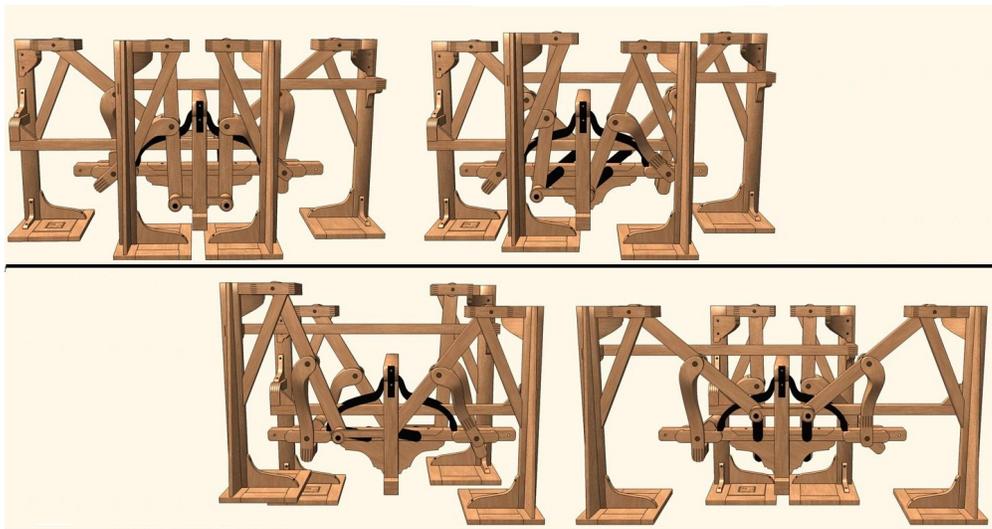


Рис. 13.20: Один шаг стопоходящей машины Чебышева.

участка кривой  $\gamma$ ). Кроме того, верхняя часть кривой  $\gamma$  соответствует левой части окружности, по которой вращается точка  $A_2$ .

Прикрепим теперь к точке  $B$  “ногу”. Добавим к полученной конструкции ее копию, которая получается, если переместить  $A_2$  в диаметрально противоположную точку. Теперь в нашем механизме уже две ноги, рис. 13.22.

Добавив симметричную копию и соединив ее с исходной, получим механизм на четырех ногах. Это и есть стопоходная машина Чебышева, рис. 13.23.

На рис. 13.24 показано трехмерное изображение полученной конфигурации стержней и шарниров.

### 13.4.3 Инверсор Поселье

Ни Уатту, ни Чебышеву, ни многим другим исследователям так и не удалось построить шарнирный механизм, который превращал бы круговое движение в точное прямолинейное. Тем большее изумление вызвало в кругах математиков изобретение такого механизма, сделанное морским офицером Поселье (Charles-Nicolas Peaucellier) в 1864 году. Это механизм реализует инверсию, и потому называется *инверсором Поселье*. Об истории, с ним связанной, говорилось выше.

В этой связи читателю будет интересно обдумать, почему кривошипно-шатунный механизм, широко использующийся в настоящее время, в частности, для преобразования в двигателях внутреннего сгорания возвратно-

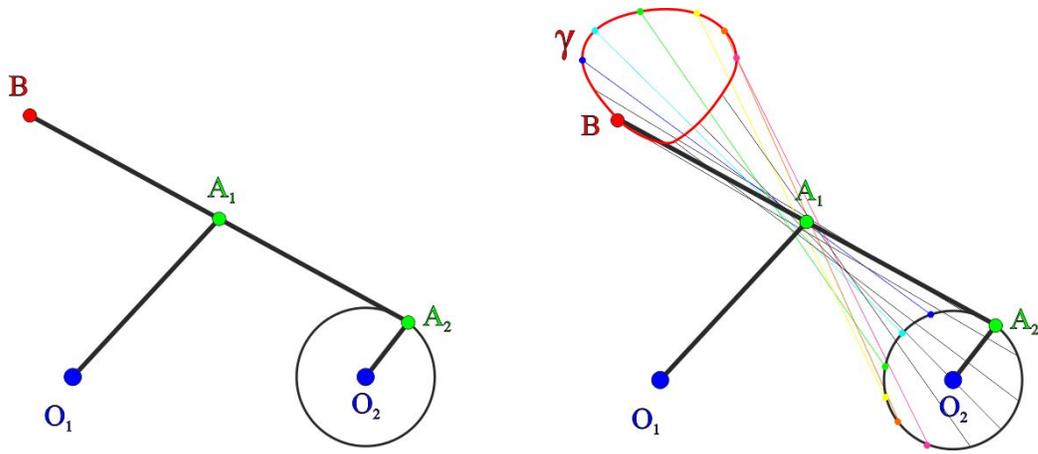


Рис. 13.21: Лямбда-механизм.

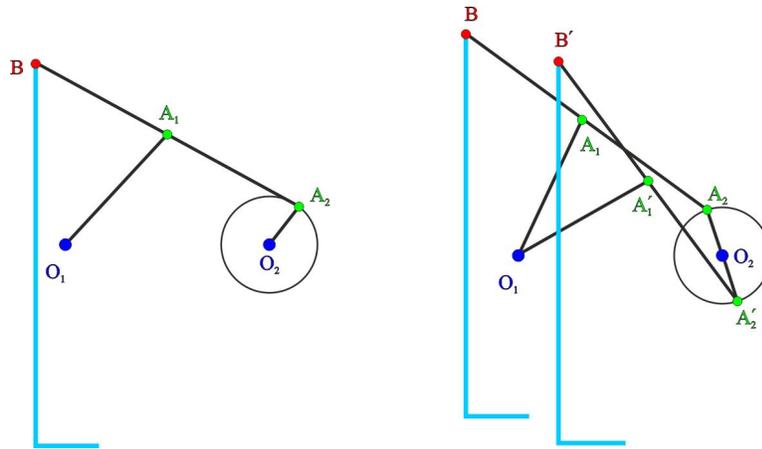


Рис. 13.22: Лямбда-механизм с ногой, а также его удвоение.

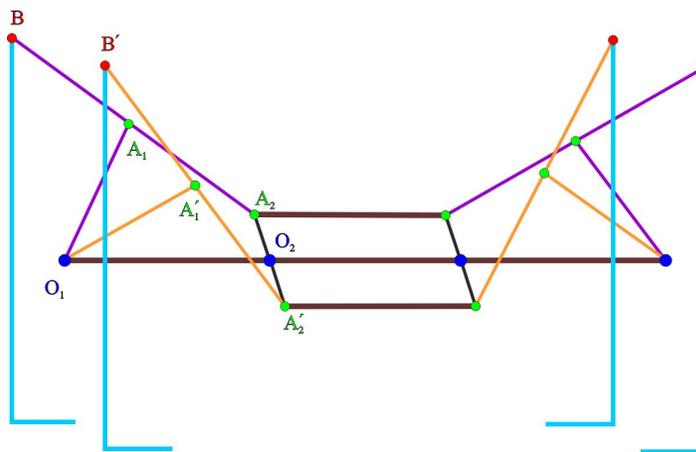


Рис. 13.23: План стопходной машины Чебышева.

поступательного движения поршней в круговое движение маховика, не является шарнирным механизмом в нашем смысле.

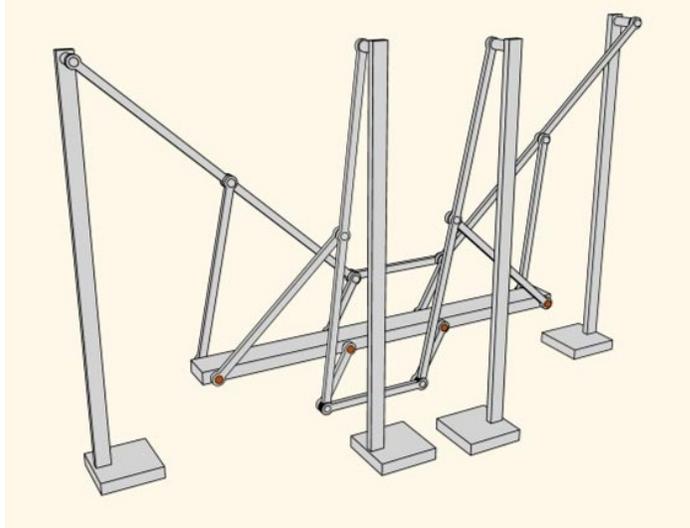


Рис. 13.24: Трехмерный вид машины Чебышева.

## 13.5 Формализация

В данном параграфе мы обсудим математические аспекты теории шарнирных механизмов. Помимо усиления уровня строгости, формализация позволяет отвечать на инженерно не очевидные вопросы, например на то, что можно начертить с помощью шарнирных механизмов, а что нет. Более точно, теоремы существования типа теоремы Кемпе можно доказывать, объясняя, как построить соответствующий шарнирный механизм. Однако теоремы, которые утверждают, что то или иное множество *не является рисующим*, можно доказывать, только в достаточной степени формализовав теорию.

Итак, определим, что же такое математический шарнирный механизм. Рассмотрим *взвешенный* граф  $(G, \ell)$ , где  $G = (V, E)$  — граф с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$ , а  $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}$  — положительная вещественная функция на множестве ребер этого графа. Вершины графа  $G$  будем называть *шарнирами*, его ребра — *стержнями*, а значения функции  $\ell$  на стержне — *длиной* этого *стержня*. В качестве объемлющего пространства, в котором мы будем располагать шарнирный механизм, рассмотрим  $\mathbb{R}^d$ . Как уже говорилось, в этих лекциях мы занимались плоским случаем, т.е. случаем  $d = 2$ ; заметим, однако, что случай  $d \geq 3$  не менее интересен.

Чтобы смоделировать закрепление некоторых шарниров в объемлющем пространстве, рассмотрим подмножество  $W \subset V$ , элементы которого будем называть *неподвижными* или *граничными шарнирами*, а элементы из  $V \setminus W$ , — *подвижными* или *внутренними шарнирами*. Множество  $W$  будем обозначать через  $\partial G$  и называть *границей*. Отображение  $\partial: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^d$  будем называть *граничным отображением*. Это отображение  $\partial$  задает положения неподвижных шарниров в объемлющем пространстве. *Шарнирным механизмом*  $\mathcal{L}$  назовем каждую тройку  $(G, \ell, \partial)$  в сделанных выше обозначениях.

Следующее понятие моделирует конкретное расположение шарнирного механизма. *Конфигурацией* шарнирного механизма  $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$  назовем отображение  $\mathcal{C}: V \rightarrow \mathbb{R}^d$ , продолжающее  $\partial$ , т.е.  $\mathcal{C}|_{\partial G} = \partial$ , и уважающее  $\ell$ , т.е. для любого ребра  $uv$  графа  $G$  должно выполняться равенство  $|\mathcal{C}(u)\mathcal{C}(v)| = \ell(uv)$ . Отметим, что не для любых функции  $\ell$  и граничного отображения  $\partial$  существует хотя бы одна конфигурация шарнирного механизма. В самом деле, если такая конфигурация существует, то для каждой тройки попарно смежных шарниров должно, по крайней мере, выполняться неравенство треугольника, что, вообще говоря, априори не предполагается.

Множество всех конфигураций шарнирного механизма  $\mathcal{L}$  назовем *конфигурационным пространством* этого механизма и будем обозначать через  $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ . Точку  $\mathcal{C}(v) \in \mathbb{R}^d$  назовем *положением шарнира  $v$  в конфигурации  $\mathcal{C}$* . Подмножество объемлющего пространства, составленное из всевозможных положений  $\mathcal{C}(v)$ ,  $\mathcal{C} \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ , шарнира  $v$  обозначим через  $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$  и назовем *конфигурационным множеством шарнира  $v$* . Если понятно, о каком шарнирном механизме идет речь, то вместо  $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$  будем писать  $\mathcal{S}(v)$ . Отметим, что шарнир может иметь одинаковые положения в разных конфигурациях. Количество всех конфигураций, приводящих к поло-

жению  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$  шарнира  $v$ , т.е. число элементов во множестве  $\{C \in \mathcal{S}(\mathcal{L}) \mid C(v) = s\}$ , назовем *кратностью положения*  $s$ .

**Замечание 13.15.** Внимательный читатель заметил, что в рассмотренных нами в первой части лекции механизмах шарниры могли располагаться в любом месте стержня. В формальном же определении шарниры могут располагаться только в концах стержней. Это несколько нас не ограничивает. В самом деле, если в шарнирном механизме имеется стержень  $AB$  длины  $x$ , на котором на расстоянии  $y$  от  $A$  расположен шарнир  $D$ , то с точки зрения формального определения нужно рассмотреть три шарнира  $A$ ,  $B$  и  $D$ , соединенных стержнями  $AB$ ,  $AD$  и  $BD$  длин  $|AB| = x$ ,  $|AD| = y$  и  $|BD| = x - y$ .

Если для некоторого шарнирного механизма  $\mathcal{L} = (G, \ell, \partial)$  и множества  $M \subset \mathbb{R}^d$  существует конфигурация  $C \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ , для которой  $M = C(\partial G)$ , то говорят, что  $M$  можно соединить шарнирным механизмом  $\mathcal{L}$ .

Пусть  $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$  — некоторый шарнирный механизм, и  $u$  не является элементом множества  $V$ . Рассмотрим шарнирный механизм  $\mathcal{L}' = (G' = (V \cup \{u\}, E), \ell, \partial)$  и будем говорить, что  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$ .

Представление о шарнирном механизме как о конструкции, собранной из жестких стержней, приводит к интуитивному представлению об операции добавления шарнира на стержень, или даже на прямую, содержащую стержень. Однако мы, в формальном определении, вместо стержней рассматриваем просто пары точек — “пары концов стержней”, как это принято в теории графов, поэтому, чтобы эти понятия имели смысл, дадим соответствующие определения.

**Конструкция 13.16.** Пусть  $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$  — произвольный шарнирный механизм, и  $vw \in E$  — некоторый его стержень. Построим новый шарнирный механизм  $\mathcal{L}' = (G' = (V', E'), \ell', \partial')$  следующим образом. Пусть  $u$  не является элементом из  $V$ . Положим  $V' = V \cup \{u\}$ ,  $E' = E \cup \{uv, uw\}$ ,  $\ell'|_E = \ell$ ,  $\partial G' \supset \partial G$ ,  $\partial'|_{\partial G} = \partial$ . Рассмотрим несколько вариантов, зависящих от того, как будет продолжена функция  $\ell$  на  $\{uv, uw\}$ .

(1) Функция  $\ell'$  удовлетворяет условию  $\ell'(vu) + \ell'(uw) = \ell'(vw)$  (таких функций бесконечно много). Тогда будем говорить, что шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$  на стержень  $vw$ . Кроме того, будем говорить, что шарнир  $u$  делит стержень  $vw$  в отношении  $\ell'(vu) : \ell'(uw)$ . В частности, если это отношение равно 1, то говорят, что шарнир  $u$  помещен в середину стержня  $vw$ .

(2) Функция  $\ell'$  удовлетворяет условию  $\ell'(vw) + \ell'(wu) = \ell'(vu)$  (таких функций бесконечно много). Тогда будем говорить, что шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$  на луч  $vw$  вне стержня  $vw$ .

(2') Если реализуется или случай (1), или случай (2), то говорим, что шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$  на луч  $vw$ .

(3) Аналогично (2) определяется добавление шарнира  $u$  на луч  $wv$  вне стержня  $vw$ .

(3') Аналогично (2') определяется добавление шарнира  $u$  на луч  $wv$ .

(4) Если известно, что реализуется один из случаев (1), (2) или (3), то говорим, что шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$  на прямую  $vw$ .

В каждом из рассматриваемых случаев добавленную вершину  $u$  относят или к внутренним, или к граничным. Если  $u$  отнесена к граничным вершинам, то дополнительно задают  $\partial'(u)$ .

Пусть  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  — некоторое множество точек на стержнях шарнирного механизма  $\mathcal{L}$ , и механизм  $\mathcal{L}_U$  получается из механизма  $\mathcal{L}$  последовательным добавлением вершин  $u_i$ . Пусть  $\mathcal{L}'$  — другой шарнирный механизм, множество вершин которого содержит  $U$ . Про такой  $\mathcal{L}'$  будем говорить, что он соединяет точки из  $U$ . Предположим дополнительно, что ограничения граничных отображений механизмов  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  на  $U$  совпадают. Тогда, объединив множества вершин и множества ребер механизмов  $\mathcal{L}_U$  и  $\mathcal{L}'$ , мы построим новый механизм, про который будем говорить, что он получен добавлением механизма  $\mathcal{L}'$  к механизму  $\mathcal{L}$ . Аналогичным образом можно определить более общее понятие суммы двух механизмов (сделайте это самостоятельно).

Пусть  $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$  и  $\mathcal{L}' = (G' = (V' E'), \ell', \partial')$  — два шарнирных механизма, причем  $V \subset V'$ ,  $E \subset E'$ ,  $\ell'|_E = \ell$  и  $\partial'|_V = \partial$ . Тогда будем говорить, что  $\mathcal{L}$  лежит в  $\mathcal{L}'$ , или  $\mathcal{L}'$  содержит  $\mathcal{L}$ , или  $\mathcal{L}'$  расширяет  $\mathcal{L}$ . Отметим, что механизм, полученный из  $\mathcal{L}$  добавлением некоторого механизма, содержит  $\mathcal{L}$ .

Пусть, во введенных в предыдущем абзаце обозначениях, механизм  $\mathcal{L}$  лежит в  $\mathcal{L}'$ . Если  $C' \in \mathcal{S}(\mathcal{L}')$  — некоторая конфигурация механизма  $\mathcal{L}'$ , то ее ограничение на  $V$  является конфигурацией механизма  $\mathcal{L}$ , которую будем называть ограничением  $C'$  на механизм  $\mathcal{L}$ . При этом множество всех ограничений конфигураций механизма  $\mathcal{L}'$  на  $\mathcal{L}$  будем называть конфигурационным пространством модифицированного (с помощью  $\mathcal{L}'$ ) механизма  $\mathcal{L}$ . Нас будет особенно интересовать ситуация, когда  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением некоторого механизма (см. параграф 13.5.2). Посмотрим некоторые примеры.

### 13.5.1 Пример: ромб

Рассмотрим взвешенный граф  $(G, \ell)$ , который содержит четыре вершины  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  и четыре ребра  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$  и  $CO$ ; функция  $\ell$  принимает одно значение  $a > 0$ . Неподвижным будет у нас ровно один шарнир  $O$ . Как выглядят всевозможные конфигурации этого шарнирного механизма? Легко видеть, что они могут быть или ромбом (невыврожденным или вырожденным), или замкнутой ломаной, у которой совпадают первое и четвертое, а также второе и третье звенья; или же первое и второе, а также третье и четвертое звенья. Для каждой конфигурации  $C$  мы будем обозначать положения шарниров теми же буквами, что и сами шарниры, рис. 13.25.

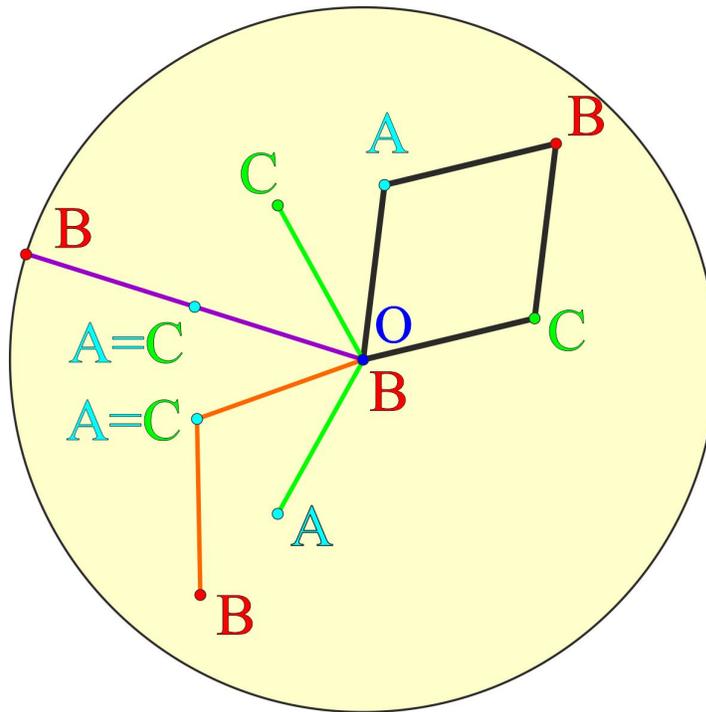


Рис. 13.25: Шарнирный ромб, параметризующий круг.

Изучим конфигурационное множество  $\mathcal{S}(B)$  шарнира  $B$ . Ясно, что это множество представляет собой круг с центром в  $O$  и радиусом  $2a$ . Выясним, чему равны кратности разных положений шарнира  $B$ . Каждая точка, лежащая на граничной окружности конфигурационного множества  $\mathcal{S}(B)$ , встречается ровно в одной конфигурации, а именно, когда ромб вырожден, поэтому такие положения имеют кратность 1. Кратность каждого неграничного положения, отличного от  $O$ , равна 4 (ромб  $OABC$  и ромб, симметричный ему относительно диагонали  $OB$ , различны; также нужно учитывать конфигурации, в которых точки  $A$  и  $C$  совпадают). Наконец, когда положение точки  $B$  совпадает с точкой  $O$ , такую ситуацию реализуют ломаные, в которых совпадают первое и второе, а также третье и четвертое звенья (среди них встречаются и вырожденные ромбы), так что кратность положения  $O \in \mathcal{S}(B)$  равна бесконечности.

### 13.5.2 Укрепление шарнирного механизма: общий подход

Наличие положений высокой кратности часто приводит к чрезвычайному усложнению анализа конфигураций шарнирного механизма. Например, в случае с ромбом из раздела 13.5.1, если конфигурация задает обычный ромб, то тогда вектор  $OB$  равен сумме векторов  $OA$  и  $OC$ . Однако в случае, когда конфигурация представляет собой ломаную с совпадающими звеньями, такого равенства уже нет.

С аналогичной ситуацией мы сталкивались, когда обсуждали параллелограмм и антипараллелограмм в разделе 13.1.2.

Чтобы избежать подобных проблем, часто пытаются уменьшить кратность положений, пользуясь следующим приемом. Предположим, что конфигурационное пространство механизма  $\mathcal{L}$  разбито на две части  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$ ,

причем существует такой конечный набор точек на стержнях из  $\mathcal{L}$  и такой шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$ , для которых во всех конфигурациях из  $\mathcal{S}_1$  положения выбранных точек можно соединить механизмом  $\mathcal{L}'$ , а для каждой конфигурации из  $\mathcal{S}_2$  положения выбранных точек соединить механизмом  $\mathcal{L}'$  нельзя. Тогда если к  $\mathcal{L}$  добавить механизм  $\mathcal{L}'$ , соединяющий описанные выше точки, то конфигурационное пространство модифицированного так механизма  $\mathcal{L}$  станет равным  $\mathcal{S}_1$ . Тем самым, мы, фактически, уменьшили конфигурационное пространство исходного механизма. Такая операция называется *укреплением* части  $\mathcal{S}_1$  конфигурационного пространства  $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ . Обычно конфигурации, образующие часть  $\mathcal{S}_1$ , называются тем или иным образом, например, часть конфигураций шарнирного механизма  $\mathcal{L}$  из раздела 13.5.1 называются ромбами. Если описанным выше методом семейство  $\mathcal{S}_1$  таких конфигураций укреплено, то говорят, что укреплен ромб.

Как можно укрепить ромб  $\mathcal{L}$  из раздела 13.5.1 мы уже знаем. Добавим на ребра  $OA$  и  $BC$  их середины  $M$  и  $N$ . Отметим, что в каждой конфигурации, реализующей ромб, расстояние между точками  $M$  и  $N$  равно  $a$ . Если же реализуется замкнутая ломаная с совпадающими звеньями и эта ломаная не равна вырожденному ромбу, то расстояние между точками  $M$  и  $N$  меньше  $a$ . Таким образом, укрепляя  $\mathcal{L}$  добавлением ребра  $MN$  длины  $a$  (однореберного шарнирного механизма), мы получим механизм, который можно рассматривать как “настоящий ромб” (возможно, вырожденный).

### 13.5.3 Пример: параллелограмм и антипараллелограмм

В примере параграфа 13.5.1 изменим функцию  $\ell$ , разрешив ей принимать два различных значения  $a = \ell(OA) = \ell(BC) > 0$  и  $b = \ell(AB) = \ell(CO) > 0$ . Возможные конфигурации такого шарнирного механизма — это параллелограммы (невырожденные или вырожденные), а также *антипараллелограммы*, каждый из которых получается из параллелограмма отражением одного из треугольников, на которые его разбивает диагональ, относительно этой диагонали, рис. 13.26.

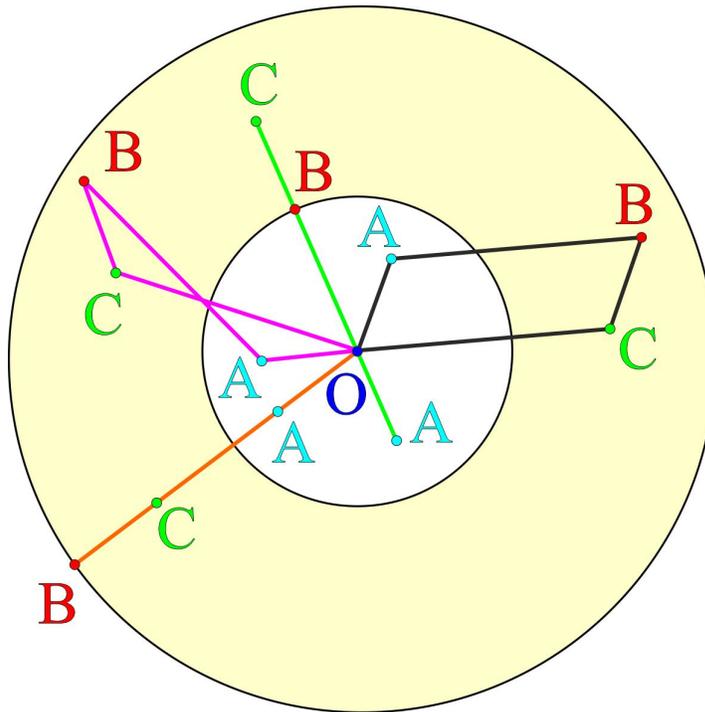


Рис. 13.26: Шарнирные параллелограмм и антипараллелограмм.

Изучим конфигурационное множество точки  $B$ . Так как  $a \neq b$ , то  $\mathcal{S}(B)$  — это кольцо с центром в  $O$ , внутренним радиусом  $|a - b|$  и внешним радиусом  $a + b$ . Все точки внешней окружности имеют кратность 1, так как каждая из них реализуется в единственном вырожденном параллелограмме. Все неграничные точки имеют кратность 4, причем для каждой такой точки  $B$  она реализуется в двух симметричных относительно

$OB$  параллелограммах, и в двух симметричных относительно  $OB$  антипараллелограммах (для ромба эти антипараллелограммы вырождаются). Наконец, все точки внутренней окружности имеют кратность 1. Таким образом, для параллелограммов с разными длинами сторон в множестве  $\mathcal{S}(B)$  отсутствуют точки бесконечной кратности.

Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма, рис. 13.27, мы уже обсуждали в разделе 13.1.3.

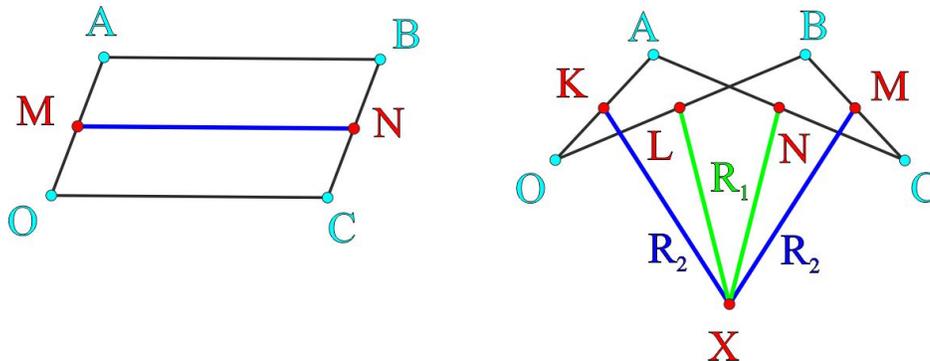


Рис. 13.27: Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма.

Отметим, что после укрепления параллелограмма и антипараллелограмма кратности внутренних точек конфигурационного пространства (отличных от начала координат в случае ромба) станут равными 2.

#### 13.5.4 Как нарисовать решение уравнения?

Мы говорим, что шарнирный механизм рисует множество  $A$ , если множество  $A$  совпадает с конфигурационным пространством некоторой вершины этого механизма. Множество  $A$  называется *рисуемым*, если существует шарнирный механизм, который рисует множество  $A$ .

Мы обсудим одну общую идею, используемую в вопросе рисования множеств с помощью шарнирных механизмов. Пусть на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x$  и  $y$  задан шарнирный механизм  $\mathcal{L}$ , и пусть  $v$  — некоторый подвижный шарнир из  $\mathcal{L}$ . Рассмотрим на конфигурационном множестве  $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$  шарнира  $v$  некоторую функцию  $f(x, y)$  и предположим, что мы хотим расширить  $\mathcal{L}$  до такого шарнирного механизма  $\mathcal{L}'$ , в котором шарнир  $v$  двигался бы по множеству, заданному уравнением  $f(x, y) = 0$ . Как эту задачу можно было бы решить?

Предположим, что нам удастся расширить  $\mathcal{L}$  до промежуточного шарнирного механизма  $\mathcal{L}''$  такого, что  $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v) = \mathcal{S}(\mathcal{L}'', v)$  и существует шарнир  $w$  из  $\mathcal{L}''$ , обладающий следующим свойством: для каждого положения  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{L}'', v)$  шарнира  $v$  абсцисса ( $x$ -координата) всех положений шарнира  $w$  в конфигурациях  $C'' \in \mathcal{S}(\mathcal{L}'')$ , для которых  $C''(v) = s$ , одна и та же и равна  $f(s)$ . Можно понимать, что механизм  $\mathcal{L}''$  в некотором смысле вычисляет функцию  $f(x, y)$ .

Соединив  $\mathcal{L}''$  с инверсором Поселье, в котором шарнир  $w$  может двигаться только по (отрезку) прямой  $x = 0$ , получим механизм  $\mathcal{L}'$ , в котором точка  $v$  двигается по множеству, заданному уравнением  $f(x, y) = 0$ . Именно эта идея была использована в доказательстве теоремы Кемпе, см. раздел 13.3.2.

Обратим, однако, внимание читателя еще раз, что мы не обсуждали вопроса о том, какие множества *нельзя* нарисовать с помощью шарнирных механизмов. Вот здесь, конечно же, без формализации не обойтись.

## Литература к главе 13

- [1] <http://www.etudes.ru/ru/mov/>
- [2] <http://jeanlouis.blanchard.pagesperso-orange.fr>
- [3] <http://tcheb.ru/>
- [4] Сосинский А.Б. *Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция первая.* [http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option\\_lang=rus&presentid=130](http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130)
- [5] Сосинский А.Б. *Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция вторая.* [http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus)
- [6] Kempe A.B. *How to draw a straight line: a lecture on linkages.* — Macmillan & Co., 1877.
- [7] Kapovich M., Millson J.J. *Universality theorems for configurations of planar linkages.* *Topology*, v. 41 (2002), N 6, pp. 1051–1107.
- [8] Abbott T.G. *Generalizations of Kempe's Universality Theorem* (2008) <http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf>
- [9] H. King, Semiconfiguration spaces of planar linkages, [arXiv.org:math/9810130](http://arXiv.org/math/9810130).
- [10] H. King, Configuration spaces of linkages in  $R^n$ , [arXiv.org:math/9811138](http://arXiv.org/math/9811138).