Глава 11

Инварианты плоских замкнутых кривых

План. Кривые на плоскости, замкнутая кривая, гладкая кривая, гладкая замкнутая кривая, вектор скорости гладкой кривой, регулярная кривая, замена параметра, допустимая замена параметра, непараметризованная регулярная кривая, периодические функции, их свойства, среднее значение интегрируемой периодической функции, свойство первообразной периодической функции, деформация или регулярная гомотопия регулярной кривой, число вращения замкнутой регулярной кривой, теорема Уитни–Грауштейна о классификации замкнутых регулярных кривых с точностью до регулярной гомотопии, натуральная параметризация, точки самопересечения, теорема Хопфа о числе вращения несамопересекающейся замкнутой регулярной кривой, число Уитни замкнутой регулярной кривой, формулировка теоремы Уитни о связи числа Уитни, числа вращения и индекса точки.

Цель настоящей лекции — описать всевозможные замкнутые кривые на евклидовой плоскости, для которых в каждой точке существует вектор скорости, причем этот вектор всюду отличен от нуля (такие кривые называются регулярными); при этом одинаковыми (эквивалентными) считаются кривые, которые можно деформировать друг в друга, не зануляя нигде векторы скоростей. Оказывается, каждой такой кривой можно по определенному правилу приписать целое число, причем две кривые эквивалентны тогда и только тогда, когда эти числа совпадают. Для того чтобы доказать (и даже аккуратно сформулировать) этот результат, нам потребуются некоторые предварительные сведения о замкнутых регулярных кривых и их деформациях, а также о периодических функциях.

11.1 Замкнутые гладкие и регулярные кривые на плоскости

В предыдущих лекциях мы уже определили кривую $\gamma(t)$ на евклидовой плоскости как пару $\big(x(t), y(t)\big)$ непрерывных функций, где t меняется на отрезке $[a, b]$. Мы назвали кривую γ *замкнутой*, если $\gamma(a) = \gamma(b)$. Кривую назовем *гладкой*, если задающие ее функции являются бесконечно дифференцируемыми. *Замкнутую кривую* $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ назовем *гладкой*, если не только функции $x(t)$ и $y(t)$ гладкие, но и все производные как функции $x(t)$, так и функции $y(t)$, вычисленные в точках a и b, совпадают.

Как ни удивительно, но гладкие кривые не отвечают наглядному представлению о кривых без "изломов" и "заострений" — это показывают следующие два примера.

Пример 11.1. Полукубическая парабола $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ имеет при $t = 0$ точку возврата — острие.

Пример 11.2. Пусть $f(t)$ — функция, равная нулю при $t \leq 0$ и $e^{-\frac{1}{t}}$ при $t > 0$. Эта функция бесконечно дифференцируема всюду (докажите!). Кривая $\gamma(t) = (f(t), f(-t))$ представляет собой прямой угол на плоскости; при $t = 0$ она терпит излом.

В приведенных примерах наличие изломов легко объяснимо. Действительно, кривая — это закон движения точки по плоскости с течением времени t. Если в некоторый момент времени движение останавливается (т.е. его скорость обращается в ноль), в следующие моменты оно может продолжиться в любом направлении — в частности, под каким угодно углом к тому, к которому это направление стремилось при приближении к точке остановки. Чтобы избавиться от таких эффектов, введем понятие регулярной кривой.

Определение 11.3. Пусть $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ — гладкая кривая. Тогда $\dot\gamma(t) = \big(\dot x(t), \dot y(t)\big)$ называется *вектором скорости* кривой γ. Гладкая кривая называется *регулярной*, если ее вектор скорости всюду отличен от нуля.

Еще одно уточнение понятия кривой связано с заменой параметризации. Ясно, что по одной и той же траектории можно двигаться с разной скоростью; другими словами, каждая гладкая функция $\psi\colon [a',b'] \to [a,b]$, производная которой в каждой точке строго положительна, задает регулярную кривую $\gamma\big(\psi(\tau)\big)$ с тем же самым образом, что и у γ (т.е. состоящую из тех же точек плоскости). Про такую кривую говорят, что она получена из кривой γ *допустимой заменой параметра* ψ (отметим, что обратная замена ψ^{-1} тоже допустима). *Если гладкая кривая* γ *замкнута*, то про допустимую замену параметра ψ предполагаем дополнительно, что *все производные функции* ψ *на концах отрезка* $[a',b']$ *равны*, поэтому в этом случае каждая кривая $\gamma\circ\psi$ также является замкнутой гладкой кривой. Те свойства кривых, которые изучаются ниже, не меняются при допустимых заменах параметра; фактически мы изучаем не закон движения, а его траекторию, т.е. совокупность кривых, получаемых друг из друга допустимыми заменами. Абстрактное определение выглядит следующим образом: назовем две регулярные кривые эквивалентными, если они получаются друг из друга допустимой заменой параметра (проверьте, что это — действительно отношение эквивалентности); *непараметризованной регулярной кривой* называется класс эквивалентности регулярных кривых. В дальнейшем мы будем допускать некоторую вольность в терминологии, называя просто кривой как регулярную (параметризованную) кривую, так и ее класс эквивалентности.

Нам будет удобно параметризовать замкнутые кривые не точками отрезка, а точками прямой; свойство замкнутости при этом будет обеспечиваться периодичностью соответствующих функций.

Отметим, что для произвольной замкнутой кривой $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ функции $x(t)$ и $y(t)$ продолжаются с отрезка $[a,b]$ на всю прямую $\mathbb{R}$ до функций $X(t)$ и $Y(t)$ по следующему правилу. Ясно, что каждое $t\in\mathbb{R}$ однозначно представимо в виде $t_0 + nT$, где $T = b-a$, число n — целое, а t_0 лежит на полуинтервале $[a,b)$ (n — это неполное частное от деления t на T, а t_0 — остаток). Положим $X(t) = x(t_0)$ и $Y(t) = y(t_0)$; тем самым, мы определили отображение $\Gamma(t) = \big(X(t), Y(t)\big)$, которое можно интерпретировать как бесконечную намотку прямой $\mathbb{R}$ на исходную кривую γ.

Заметим, что требование (в определении гладкой замкнутой кривой) совпадения всех производных на концах кривой γ равносильно тому, что функции $X(t)$ и $Y(t)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми. Отметим также, что для функций $X(t)$ и $Y(t)$ выполняется следующее условие: $X(t+nT) = X(t)$ и $Y(t+nT) = Y(t)$ при каждом t и каждом целом n. Такие функции называются периодическими; в следующем параграфе мы поговорим о свойствах периодических функции более детально.

Замечание 11.4. Определение замкнутой регулярной кривой можно переформулировать следующим образом: это пара гладких функций $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, определенных на всей оси и периодических, причем вектор скорости $\big(\dot x(t), \dot y(t)\big)$ нигде не обращается в нуль. Так же как и ранее, мы будем допускать замены параметра на кривой; если $t = t(t')$ — такая замена, то от функции $t(t')$ (определенной теперь на всей оси), помимо гладкости и положительности производной, надо потребовать свойства, гарантирующего аналогичную периодичность новых функций $\gamma\big(t(t')\big)$. Это требование дается условием $t(t'+T') = t(t') + T$, где T, T' — старый и новый периоды соответственно.

11.1.1 Свойства периодических функций

Пусть $f(t)$ — произвольная функция, определенная при всех $t\in\mathbb{R}$, и $T\neq 0$ — некоторое действительное число.

Определение 11.5. Функция $f(t)$ называется T*-периодической*, если $f(t+T) = f(t)$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Число T называется *периодом функции* f.

Замечание 11.6. Ясно, что если T — период функции f, то для любого целого $k\neq 0$ число kT — тоже период. Ясно, кроме того, что постоянная функция является T-периодической с любым периодом T.

Задача 11.7. Докажите, что для любой непрерывной непостоянной периодической функции существует минимальный положительный период. Постройте пример непостоянной периодической функции, для которой не существует минимального положительного периода.

Замечание 11.8. Как правило, под периодом непрерывной периодической функции понимается именно наименьший положительный период.

Задача 11.9. Докажите, что для каждой T-периодической функции $f(x)$ и произвольной функции $g(x)$, определенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$, их композиция $g\big(f(x)\big)$ является T-периодической функцией.

Задача 11.10. Докажите, что производная от дифференцируемой T-периодической функции — тоже T-периодическая функция.

Замечание 11.11. Для первообразных аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно: первообразная от периодической функции $\cos^2 t$ — это функция $\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c$, которая, очевидно, не периодическая. Причина этого явления состоит в том, что периодические функции, вообще говоря, обладают ненулевым средним значением, которое при интегрировании приводит к наличию линейных слагаемых. Следующее утверждение обосновывает корректность приводимого ниже определения среднего значения периодической функции.

Предложение 11.12. *Пусть $f(t)$ — произвольная интегрируемая T-периодическая функция, тогда величина*

$$\int_t^{t+T} f(\xi)\,d\xi$$

не зависит от t.

Доказательство. Действительно,

$$\int_t^{t+T} f(\xi)\,d\xi = \int_t^T f(\xi)\,d\xi + \int_T^{t+T} f(\xi)\,d\xi = \\ = \int_t^T f(\xi)\,d\xi + \int_T^{t+T} f(\xi - T)\,d\xi = \int_t^T f(\xi)\,d\xi + \int_0^t f(\eta)d\eta = \int_0^T f(\varphi)\,d\varphi$$

(в третьем равенстве использована периодичность f, в четвертом — замена переменной $\eta = \xi - T$). □

Определение 11.13. *Средним значением интегрируемой периодической функции* называется, независящая от t в силу предложения 11.12, величина

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(\xi)\,d\xi.$$

Предложение 11.14. *Первообразная F интегрируемой периодической функции f имеет вид*

$$F(t) = t\,\bar{f} + F_0(t),$$

где функция $F_0(t)$ — периодическая. В частности, первообразная интегрируемой периодической функции сама является периодической тогда и только тогда, когда ее среднее значение равно нулю.

Доказательство. Пусть F — первообразная для f, тогда

$$F(t) = c + \int_0^t f(\xi)\,d\xi.$$

Положим

$$F_0(t) = F(t) - t\,\bar{f} = c + \int_0^t f(\xi)\,d\xi - \frac{t}{T}\int_0^T f(\xi)\,d\xi.$$

Тогда

$$F_0(t+T) - F_0(t) = \int_0^{t+T} f(\xi)\,d\xi - \int_0^t f(\xi)\,d\xi - \frac{t+T}{T}\int_0^T f(\xi)\,d\xi + \frac{t}{T}\int_0^T f(\xi)\,d\xi = \\ = \int_t^{t+T} f(\xi)\,d\xi - \int_0^T f(\xi)\,d\xi = 0$$

в силу предложения 11.12, так что $F_0(t)$ является T-периодической функцией, что и требовалось. □

11.2 Число вращения. Классификация замкнутых регулярных кривых

Нас будет интересовать, когда две замкнутые регулярные кривые получаются друг из друга деформацией, сохраняющей регулярность; такие кривые называются регулярно гомотопными.

Неформально, деформация замкнутой регулярной кривой — это плавное изменение этой кривой со временем, причем в каждый момент времени измененная (деформированная) кривая остается регулярной и замкнутой.

Определение 11.15. Пусть $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — произвольная регулярная кривая. *Регулярной гомотопией* (или *деформацией*) кривой γ называется отображение $r\colon \mathbb{R} \times [c,d] \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее следующим условиям.

(1) Вектор–функция двух переменных $r(t,s)$ ($t \in \mathbb{R}$, $s \in [c,d]$) бесконечно дифференцируема.

(2) При каждом $s \in [c,d]$ кривая $\gamma_s(t) = r(t,s)$ регулярна и замкнута, т.е. функция $r(t,s)$ периодична по t и вектор скорости $\frac{\partial r}{\partial t}$ всюду отличен от нуля.

(3) Кривая γ_c совпадает с исходной кривой γ: $r(t,c) = \gamma(t)$.

Если задана гомотопия γ_s, $s \in [c,d]$, то принято говорить, что эта гомотопия *соединяет кривые* γ_c *и* γ_d. Гладкие регулярные замкнутые кривые, которые можно соединить регулярной гомотопией, называются *регулярно гомотопными*.

Задача 11.16. Постройте регулярную гомотопию

(1) окружности и эллипса;

(2) эллипса и овала $\frac{x_1^4}{a_1^4} + \frac{x_2^4}{a_2^4} = 1$

для соответствующих регулярных параметризаций этих кривых.

Задача 11.17. Покажите, что отношение гомотопности является эквивалентностью. Покажите также, что допустимая замена параметра приводит к кривым, гомотопным исходной. Последнее обстоятельство означает, что отношение гомотопности можно рассматривать на непараметризованных кривых.

Наша ближайшая цель — выяснить, когда две данные регулярные кривые на плоскости $\mathbb{R}^2$ регулярно гомотопны; первое, что приходит в голову — сравнивать кривые по числу точек самопересечения. Оказывается однако, что эта характеристика не инвариантна относительно регулярной гомотопии: на рис. 11.1 показана такая гомотопия, которая переводит кривую с двумя точками самопересечения в несамопересекающуюся кривую.

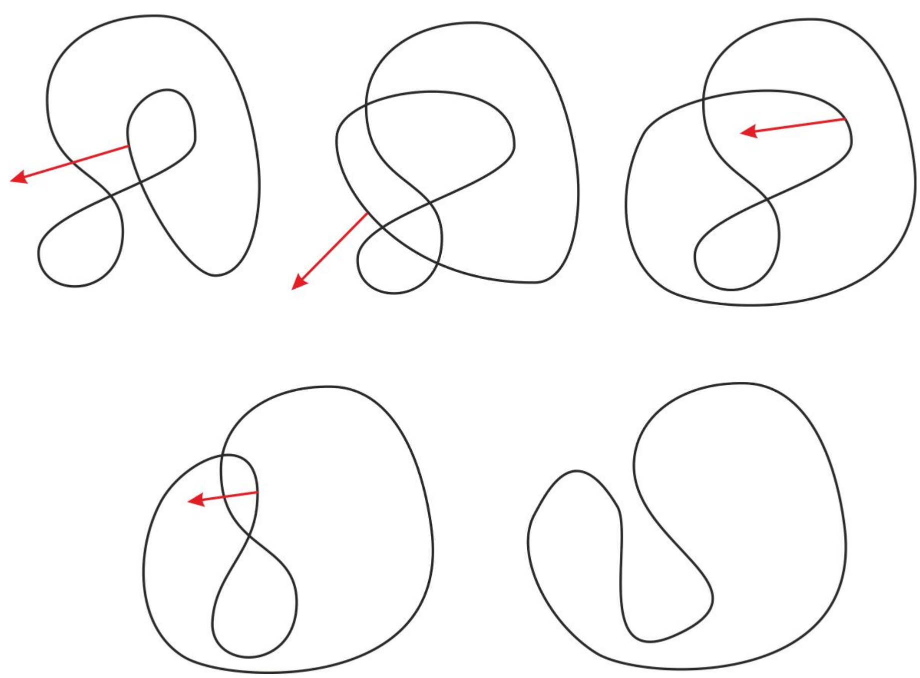

Рис. 11.1: Регулярная гомотопия, убивающая самопересечения.

С другой стороны, на обеих кривых, изображенных на рис. 11.2, имеется по 2 точки самопересечения, однако эти кривые не являются регулярно гомотопными (это следует из доказываемой ниже теоремы).

Правильный инвариант замкнутой регулярной кривой $\gamma(t)$ получается, если рассмотреть вращение вектора скорости $v(t) = \dot{\gamma}(t)$; этот ненулевой вектор при изменении t на период совершает некоторое число оборотов вокруг начала координат. Будем считать каждый оборот против часовой стрелки со знаком "плюс", а каждый оборот по часовой стрелке — со знаком "минус".

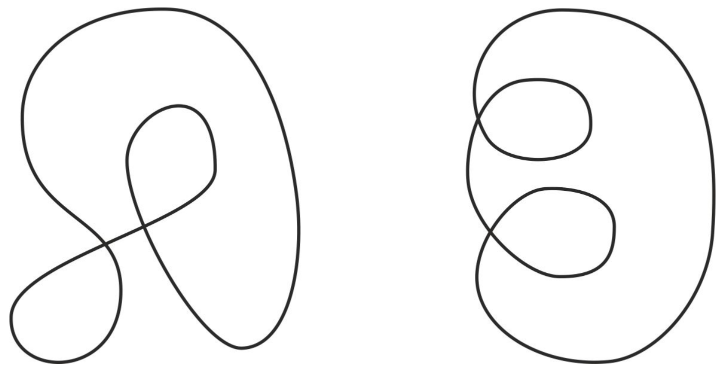

Рис. 11.2: Кривые, не являющиеся регулярно гомотопными, хотя каждая имеет ровно две точки самопересечения.

Определение 11.18. *Число вращения* n_γ регулярной замкнутой кривой γ — это число оборотов ее вектора скорости.

Дадим формальное определение числа оборотов непрерывно зависящего от t вектора $v(t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,T]$, такого, что $v(0) = v(T)$ и $v(t) \neq 0$ при всех t. Для этого в стандартной системе координат запишем $v(t)$ в виде $\rho(t)\big(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)\big)$, где $\rho(t) > 0$ и $\varphi(t)$ — непрерывные функции. Отметим, что, в отличие от $\rho(t)$, функция $\varphi(t)$ задается неоднозначно, однако любые две такие функции φ, в силу требований непрерывности, отличаются на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и, поэтому, $\varphi(T)-\varphi(0)$ не зависит от выбора φ. Более того, так как $v(0) = v(T)$, величина $\varphi(T)-\varphi(0)$ равна $2\pi n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Число $n_\gamma = n$ и называется *количеством оборотов вектора* $v(t)$.

Приведем явную формулу для числа вращения n_γ. Обозначим через $v(t)$ единичный вектор скорости кривой γ, т.е. $v = \dot\gamma/\|\dot\gamma\|$. Тогда, как только что отмечалось, $v(t) = \big(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)\big)$ и число вращения n_γ может быть вычислено так:

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi}\big(\varphi(T) - \varphi(0)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \dot\varphi(t)\,dt.$$

Далее, обозначим через $m(t)$ вектор v, повернутый на 90° против часовой стрелки: $m(t) = \big(-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t)\big)$. Умножая скалярно на m очевидное равенство $\dot v = \dot\varphi\, m$ и учитывая, что вектор m — единичный, получим $\dot\varphi = \langle \dot v, m\rangle$, откуда

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \langle \dot v, m\rangle\,dt.$$

Задача 11.19. Покажите, что при замене параметра на замкнутой регулярной кривой число вращения или остается тем же, если замена задается возрастающей функцией, или меняет знак, если функция замены убывающая.

Число вращения всех кривых на рис. 11.1, в зависимости от параметризации, равно ±1; для левой кривой на рис. 11.2 это число также равно ±1, а для правой оно равно ±3. Оказывается, регулярно гомотопные замкнутые регулярные кривые — это в точности кривые с одинаковым числом вращения.

Теорема 11.20 (Уитни, Грауштейн)**.** *Две регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения совпадают.*

Доказательство. Пусть γ_s, $s \in [c,d]$, — регулярная гомотопия, соединяющая γ_c и γ_d. Обозначим через $n(s)$ число вращения кривой γ_s.

Задача 11.21. Покажите, что функция $n(s)$ непрерывно зависит от s.

Так как $n(s)$ принимает лишь целые значения, то, в силу упражнения 11.21, функция $n(s)$ постоянна, поэтому $n(c) = n(d)$. Таким образом, регулярно гомотопные кривые имеют одинаковые числа вращения.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть γ и δ — регулярные кривые с одинаковым числом вращения n. Применив к этим кривым сжатия-растяжения, добьемся того, чтобы их длины стали равны 1; при этом кривые заменятся на гомотопные (докажите!).

Следующая лемма поможет существенно упростить наши рассуждения.

Лемма 11.22. *Для любой регулярной кривой $\gamma(t)$, $t\in[a,b]$, существует возрастающая регулярная замена параметра $t=\psi(\tau)$, для которой вектор скорости кривой $\gamma\circ\psi$ имеет единичную длину при всех τ (такой параметр τ называется* **натуральным***).*

Доказательство. Положим $\tau=\zeta(t)=\int_a^t\bigl\|\dot\gamma(\xi)\bigr\|\,d\xi$, тогда, в силу того, что $\bigl\|\dot\gamma(\xi)\bigr\|>0$ при всех ξ, функция $\zeta(t)$ строго монотонно возрастающая. Положим $\psi=\zeta^{-1}$, тогда

$$\frac{d\gamma\circ\psi}{d\tau}=\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{d\psi}{d\tau}=\frac{d\gamma}{dt}\Big/\frac{d\zeta}{dt}=\frac{\dot\gamma}{\|\dot\gamma\|},$$

так что вектор скорости кривой $\gamma\circ\psi$ имеет единичную длину при всех τ, что и требовалось. $\square$

Задача 11.23. Проверьте, что переход к натуральному параметру — допустимая замена параметризации замкнутой кривой. Покажите, что, в натуральной параметризации, период параметрического задания кривой равен ее длине.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что кривые γ и δ параметризованы натуральным параметром t, причем период равен 1, поэтому $\dot\gamma(t)=\bigl(\cos\varphi_\gamma(t),\,\sin\varphi_\gamma(t)\bigr)$ и $\dot\delta(t)=\bigl(\cos\varphi_\delta(t),\,\sin\varphi_\delta(t)\bigr)$ для некоторых гладких функций $\varphi_\gamma(t)$ и $\varphi_\delta(t)$.

Нам понадобится следующая техническая лемма (разбор деталей ее доказательства мы оставляем на семинары).

Лемма 11.24. *Для любого $t_0\in(0,1)$ существует регулярная деформация кривой $\gamma(t)$ такая, что полученная в результате кривая $\alpha(t)$ обладает следующими свойствами*:

(1) *длина кривой α равна длине кривой γ;*

(2) *параметр t является натуральным на α;*

(3) *кривая α периодична, так что ее период также равен 1;*

(4) *если гладкая функция φ_α определяется равенством*

$$\dot\alpha(t)=\bigl(\cos\varphi_\alpha(t),\,\sin\varphi_\alpha(t)\bigr),$$

то $\varphi'_\alpha(t_0)=0$.

Идея доказательства. На интервале $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\subset(0,1)$ заменим кривую γ на прямолинейный участок и сгладим возникшие углы так, чтобы полученная кривая $\tilde\gamma$ стала регулярной (если ε достаточно мало, то это всегда можно сделать). При этом участки сглаживания выберем столь малыми, чтобы они лежали вне некоторого интервала $(t_0-\varepsilon',t_0+\varepsilon')$, $\varepsilon'<\varepsilon$, а кривые $\tilde\gamma|_{[0,t_0]}$ и $\tilde\gamma|_{[t_0,1]}$ оказалась короче кривых $\gamma|_{[0,t_0]}$ и $\gamma|_{[t_0,1]}$ соответственно. Отметим, что для достаточно малых ε кривую $\tilde\gamma$ можно всегда сделать регулярно гомотопной γ.

Теперь на участках $(t_0-\varepsilon',t_0-\varepsilon'/2)$ и $(t_0+\varepsilon'/2,t_0+\varepsilon')$ регулярно продеформируем кривые $\tilde\gamma|_{[0,t_0]}$ и $\tilde\gamma|_{[t_0,1]}$ так, чтобы их длины стали равны длинам кривых $\gamma|_{[0,t_0]}$ и $\gamma|_{[t_0,1]}$ соответственно (наглядно это выглядит как “выпускание языков”). Эти деформации оставляют $\tilde\gamma$ регулярно гомотопной γ. При этом, если на полученной в результате кривой заметить параметр t на натуральный (мы его обозначим той же буквой t), то построенная кривая может быть взята за α. $\square$

Из леммы 11.24 мгновенно выводится следующий важный результат.

Следствие 11.25. *В обозначениях леммы 11.24, выберем $t_0\in(0,1)$ так, чтобы $\varphi_\delta(t_0)\ne0$ (такое t_0 существует, так как кривая δ регулярна и замкнута). Тогда функции φ_α, φ_δ и 1 линейно независимы.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют не все равные нулю числа a, b и c такие, что $a\,\varphi_\alpha+b\,\varphi_\delta+c=0$. Но тогда $a\,\varphi'_\alpha(t_0)+b\,\varphi'_\delta(t_0)=0$, откуда $b=0$. Так как ни φ_α, ни 1 не равны тождественно нулю, оба коэффициента a и c отличны от нуля. Но тогда φ_α постоянно, что противоречит регулярности и периодичности кривой α. $\square$

Соглашение 11.26. В силу следствия 11.25, мы можем сразу предполагать линейную независимость функций φ_γ, φ_δ и 1, что мы и будем делать.

Далее, положим $\varphi(t,s)=(1-s)\,\varphi_\gamma(t)+s\,\varphi_\delta(t)$ и построим однопараметрическое семейство единичных векторов

$$v_s(t)=\big(\cos\varphi(t,s),\,\sin\varphi(t,s)\big).$$

Отметим, что равенство чисел вращения исходных кривых обеспечивает 1-периодичность функции $v_s(t)$ для всех s. Действительно,

$$\varphi(t+1,s)=(1-s)\,\varphi_\gamma(t+1)+s\,\varphi_\delta(t+1)=(1-s)\big(\varphi_\gamma(t)+2\pi n_\gamma\big)+s\,\big(\varphi_\delta(t)+2\pi n_\delta\big)=$$
$$=\varphi(t,s)+2\pi\big((1-s)\,n_\gamma+s\,n_\delta\big)=\varphi(t,s)+2\pi n.$$

Положим $\gamma_s(0)=(1-s)\gamma(0)+s\,\delta(0)$ и построим семейство $\gamma_s(t)$ регулярных натурально параметризованных кривых с векторами скоростей $v_s(t)$ по формуле

$$\gamma_s(t)=\gamma_s(0)+\int_0^t v_s(\xi)\,d\xi.$$

Заметим, что $\gamma_0=\gamma$ и $\gamma_1=\delta$, так что если все кривые γ_s замкнуты, то семейство γ_s и есть искомая гомотопия. Однако, как было показано в предложении 11.14, для замкнутости кривых $\gamma_s(t)$ необходимо и достаточно, чтобы координатные функции для $v_s(t)$ имели нулевое среднее. В нашем случае это, вообще говоря, не выполняется (постройте соответствующий пример). Чтобы исправить такое положение, мы переопределим кривые γ_s, положив

$$\gamma_s(t)=\gamma_s(0)+\int_0^t v_s(\xi)\,d\xi-t\cdot\int_0^1 v_s(\xi)\,d\xi,$$

тогда

$$\gamma_s(1)-\gamma_s(0)=\int_0^1 v_s(\xi)\,d\xi-1\cdot\int_0^1 v_s(\xi)\,d\xi=0,$$

так что все кривые γ_s замкнутые.

Покажем, что $\gamma_0=\gamma$ и $\gamma_1=\delta$. Действительно,

$$\gamma_0(t)=\gamma(0)+\int_0^t\dot\gamma(\xi)\,d\xi\,-\,t\cdot\int_0^1\dot\gamma(\xi)\,d\xi=\gamma(0)+\gamma(t)-\gamma(0)-t\big(\gamma(1)-\gamma(0)\big)=\gamma(t),$$

где последнее равенство имеет место в силу замкнутости кривой γ. Аналогично доказывается равенство $\gamma_1=\delta$.

Далее, если при каждом s кривая γ_s регулярна, то γ_s — искомая гомотопия. Выясним, какие имеются препятствия к регулярности всех γ_s. По определению, регулярность γ_s означает, что при всех t выполняется

$$\dot\gamma_s(t)=v_s(t)-\int_0^1 v_s(\xi)\,d\xi\neq 0.$$

Если мы добьемся того, чтобы длина вектора $w_s=\int_0^1 v_s(\xi)\,d\xi$ была строго меньше 1 при каждом s, то регулярность будет достигнута, так как $\|v_s(t)\|=1$ при всех s и t.

Условие $\|w_s\|<1$ равносильно тому, что для каждого единичного вектора e выполняется $\langle w_s,e\rangle<1$. В силу линейной зависимости интеграла от подынтегральной функции, имеем

$$\langle w_s,e\rangle=\left\langle\int_0^1 v_s(\xi)\,d\xi\,,\,e\right\rangle=\int_0^1\big\langle v_s(\xi),e\big\rangle\,d\xi\le\int_0^1 d\xi=1,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда функция $v_s(t)$ параметра t постоянна и равна e. Это, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда функция $\varphi(t,s)=(1-s)\,\varphi_\gamma(t)+s\,\varphi_\delta(t)$ не зависит от t, однако последнее означает, что функции φ_γ, φ_δ и 1 линейно зависимы — получили противоречие с соглашением 11.26.

Таким образом, $\langle w_s,e\rangle<1$ для любого e при всех s, поэтому всегда $\|w_s\|<1$, так что $v_s(t)-w_s\neq 0$. Кроме того, γ_s — замкнутые регулярные кривые при всех s. Доказательство закончено. □

11.3 Число вращения и точки самопересечения

Как уже отмечалось, число точек самопересечения не инвариантно относительно регулярных гомотопий. Тем не менее, связь между числом вращения кривой и наличием на ней самопересечений все же имеется. Выясним сперва, как обстоит дело в случае отсутствия на кривой точек самопересечения.

Теорема 11.27 (Хопф)**.** *Число вращения несамопересекающейся регулярной кривой $\gamma(t)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ равно ± 1.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы Уитни–Грауштейна, без ограничения общности будем считать параметр t кривой $\gamma(t)$ натуральным и меняющимся на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим на плоскости с координатами t, s прямоугольный треугольник $D=\big\{(t,s)\mid 0\le t\le s\le 1\big\}$, и каждой точке (t,s) этого треугольника сопоставим единичный вектор $e(t,s)$ по следующему правилу. Если точка (t,s) не лежит на гипотенузе $t=s$ и не совпадает с вершиной $(0,1)$, то положим

$$e(t,s)=\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{\|\gamma(s)-\gamma(t)\|},$$

Отметим, что функция $e(t,s)$ гладкая, так как кривая несамопересекающаяся, а, значит, $\gamma(t)\ne\gamma(s)$ при описанных выше ограничениях на t и s.

Заметим теперь, что при каждом фиксированном $t<1$ и $s\to t+$, а также при каждом фиксированном $s>0$ и $t\to s-$ выполняется

$$e(t,s)=\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{\|\gamma(s)-\gamma(t)\|}=\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{\|\gamma(s)-\gamma(t)\|}\cdot\frac{|s-t|}{s-t}=\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{s-t}:\left\|\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{s-t}\right\|\to\frac{\dot\gamma(t)}{\big\|\dot\gamma(t)\big\|}=\dot\gamma(t),$$

поэтому функция $e(t,s)$ продолжается по непрерывности на гипотенузу $t=s$ треугольника D по формуле $e(t,t)=\dot\gamma(t)$.

Далее, при $s\to 1-$ и $t\to 0+$ имеем

$$\begin{aligned}
e(t,s)&=\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{\|\gamma(s)-\gamma(t)\|}=\frac{\gamma(1)+\dot\gamma(1)(s-1)+o(s-1)-\gamma(0)-\dot\gamma(0)\,t+o(t)}{\|\gamma(1)+\dot\gamma(1)(s-1)+o(s-1)-\gamma(0)-\dot\gamma(0)\,t+o(t)\|}=\\
&=\frac{-\dot\gamma(1)(1-s+t)+o(1-s+t)}{\|-\dot\gamma(1)(1-s+t)+o(1-s+t)\|}=\frac{-\dot\gamma(1)(1-s+t)+o(1-s+t)}{1-s+t}\Big/\frac{\|-\dot\gamma(1)(1-s+t)+o(1-s+t)\|}{|1-s+t|}\to\\
&\to\frac{-\dot\gamma(1)}{\|-\dot\gamma(1)\|}=-\dot\gamma(1)=-\dot\gamma(0),
\end{aligned}$$

поэтому функция $e(t,s)$ продолжается по непрерывности в вершину $(0,1)$ треугольника D по формуле $e(0,1)=-\dot\gamma(0)=-\dot\gamma(1)$.

Итак, мы определили функцию $e(t,s)$ на всем треугольнике D, причем все векторы $e(t,s)$ — единичные, поэтому вектор $e(t,s)$ можно записать в виде $e(t,s)=\big(\cos\varphi(t,s),\,\sin\varphi(t,s)\big)$, где функция $\varphi(t,s)$ непрерывна в треугольнике D. Число вращения n_γ кривой γ — это число оборотов вектора $e(t,t)=\dot\gamma(t)$ при изменении t вдоль гипотенузы треугольника D, т.е.

$$n_\gamma=\frac{1}{2\pi}(\varphi(1,1)-\varphi(0,0)).$$

С другой стороны, то же число можно получить, проходя по двум катетам:

$$2\pi n_\gamma=\big(\varphi(1,1)-\varphi(0,1)\big)+\big(\varphi(0,1)-\varphi(0,0)\big).$$

Вычислим соответствующие изменения угла φ. Разность $\varphi(1,1)-\varphi(0,1)$ — это угол поворота, при изменении t от 0 до 1, направления вектора $\gamma(1)-\gamma(t)=\gamma(0)-\gamma(t)$, дополненного $-\dot\gamma(0)$ при $t=0$ и $\dot\gamma(1)$ при $t=1$. Рассмотрим прямую ℓ, касающуюся кривой γ и такую, что γ целиком лежит в одной полуплоскости, ограниченной этой прямой (докажите, что такая прямая существует). Будем считать, что значение параметра $t=0$ соответствует точке касания прямой ℓ с кривой γ (см. рис. 11.3); тогда $\varphi(1,1)-\varphi(0,1)=\pm\pi$, причем знак совпадает со знаком числа вращения. Аналогично, разность $\varphi(0,1)-\varphi(0,0)$ — это угол поворота направления вектора $\gamma(s)-\gamma(0)$ при изменении s от 0 до 1, также дополненного соответствующими векторами скоростей в концах кривой; этот угол тоже равен $\pm\pi$, причем, поскольку противоположные векторы вращаются в одну сторону, знак снова совпадает со знаком числа вращения. Тем самым доказано, что число вращения n_γ равно ± 1. □

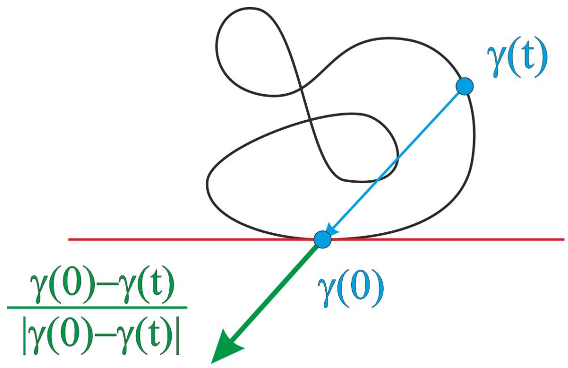

Рис. 11.3: Вращение направления вектора $\gamma(0) - \gamma(t)$.

11.4 Число Уитни. Теорема Уитни

Оказывается, если точки самопересечения считать с правильными знаками, получится число, вязанное с числом вращения. А именно, пусть γ — замкнутая регулярная кривая, имеющая лишь конечное число точек самопересечения, причем все они двойные (т.е. степени всех вершин соответствующего графа равны четырем) и в каждой такой точке векторы скорости к пересекающимся дугам образуют ненулевой и не равный π угол. Про такие кривые будем говорить, что они *находятся в общем положении*. Будем двигаться вдоль такой кривой, стартуя с точки x_0, и каждый раз, встречая точку самопересечения, отмечать в этой точке направление вектора скорости. После обхода кривой в каждой точке самопересечения возникнет репер e_1, e_2, где вектор e_1 соответствует первому посещению этой точки, а e_2 — второму. Если вращение от вектора e_1 к вектору e_2 через меньший угол происходит по часовой стрелке, припишем точке самопересечения число $\varepsilon = +1$, если же против часовой стрелки — число $\varepsilon = -1$.

Определение 11.28. В сделанных выше предположениях, *числом Уитни* $W(\gamma, x_0)$ *кривой* γ называется сумма по всем точкам самопересечения приписанных им по сформулированному только что правилу чисел ϵ_j:

$$W(\gamma, x_0) = \sum_j \epsilon_j.$$

Замечание 11.29. Число Уитни, как и число вращения, меняет знак при замене параметризации, заданной убывающей функцией, т.е. при изменении направления обхода. Кроме того, число Уитни зависит от выбора начальной точки x_0.

Задача 11.30. Пусть точка x_0 не лежит на плоской замкнутой кривой $\gamma(t)$, тогда число оборотов вектора $\gamma(t) - x_0$ называется *индексом точки* x_0 *относительно кривой* $\gamma(t)$. Пусть x_0 — точка плоской замкнутой регулярной кривой γ, не являющаяся точкой самопересечения. Круг малого радиуса с центром в точке x_0 делится кривой γ на две области. Докажите, что индексы точек в этих областях относительно кривой γ отличаются на единицу. У каких точек индекс больше? Полусумма этих двух чисел называется *индексом точки* x_0 *относительно кривой* γ и обозначается через $\operatorname{ind}_\gamma(x_0)$. Очевидно, это число полуцелое.

Задача 11.31. Докажите **теорему Уитни**:

$$W(\gamma, x_0) = n_\gamma - 2\operatorname{ind}_\gamma(x_0)$$

(в частности, разность $W(\gamma, x_0) - n_\gamma$ всегда нечетна).

Литература к главе 11

[1] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии.* М.: МЦНМО, 2004.

[2] Whitney H. *On regular curves in the plane*. Composito Mathematica, 1937, v. 4, 276–284.