

Глава 10

Минимальные сети

План. Сети, длина сети, граница сети, внутренние вершины сети, оптимальные сети, кратчайшие деревья или минимальные деревья Штейнера, кратчайшие деревья на евклидовой плоскости, задача Ферма, точка Ферма, точка Торричелли, линии Симпсона, локальная структура кратчайших деревьев, локально минимальные деревья, алгоритм построения кратчайшего дерева на евклидовой плоскости, деревья Штейнера, полные деревья Штейнера, полные или невырожденные компоненты дерева Штейнера, алгоритм Мелзака, прямой и обратный ход алгоритма Мелзака, формула Максвелла длины локально минимальной сети, замкнутые локально минимальные сети на поверхностях многогранников, ячейки сети.

Естественным обобщением кратчайшей кривой, соединяющей пару точек объемлющего пространства, являясь минимальное дерево, возникающее, если увеличить число точек, которые требуется соединить.

Пусть дано некоторое пространство \mathcal{S} . Как и в случае с кратчайшими кривыми, предположим, что в пространстве \mathcal{S} мы можем проводить кривые и измерять их длины. Последнее означает, что мы можем реализовывать в этом пространстве различные графы, выбирая в качестве множеств вершин этих графов точки из \mathcal{S} , а в качестве ребер — кривые, соединяющие некоторые из выбранных точек. Для связных графов такие геометрические представления будем называть *сетями в \mathcal{S}* . Сумму длин всех ребер сети назовем ее *длиной*.

Пусть теперь в \mathcal{S} фиксирован некоторый конечный набор точек $M = \{P_1, \dots, P_n\}$. В качестве конфигурационного пространства рассмотрим все сети, множества вершин которых содержат M . Про каждую из таких сетей будем говорить, что она *соединяет M* , а само множество M будем называть *граничным* для рассматриваемой сети. При этом, вершины из M также назовем *граничными*. Отметим, что, помимо граничных вершин, сеть может содержать и другие вершины, которые называются *внутренними*.

В качестве вариационного функционала возьмем функцию длины сетей. Таким образом, мы приходим к задаче о поиске наименьшего значения этого функционала и описания тех сетей, на которых это наименьшее значение достигается. Ясно, что если в оптимальной сети содержится цикл, то, удаляя из него любое ребро, мы получим сеть, соединяющую то же M и не более длинную, чем исходная. Таким образом, при изучении оптимальных сетей можно ограничиться связными графами без циклов, т.е. деревьями. Кроме того, всегда можно считать, что оптимальные деревья не содержат внутренних вершин степени 1, так как входящие в такие вершины ребра можно удалять, не увеличивая длину, сохраняя связность и не меняя границу рассматриваемого дерева; также можно считать, что такие деревья не содержат и внутренних вершин степени 2, так как для каждой такой вершины входящие в нее ребра можно объединить в одно, и при этом снова ни длина, ни связность, ни граница сети не изменятся. Именно такие оптимальные сети мы и будем рассматривать в дальнейшем и называть *кратчайшими деревьями*, хотя традиционно их называют *минимальными деревьями Штейнера*.¹

Посмотрим некоторые примеры.

10.1 Кратчайшие деревья на евклидовой плоскости

Задача описания кратчайших деревьев на евклидовой плоскости носит название *проблема Штейнера* (см. сноску выше). Начнем с простейшего случая трех точек, изучением которого интересовался еще Ферма.

¹ В действительности, задачу изучения кратчайших деревьев поставили Ярник и Кёсслер [1], а в простейшем частном случае этой задачей интересовался еще Ферма [2]. Штейнер занимался похожей, но другой задачей. Путаница возникла благодаря популярной книге [3].

10.1.1 Задача Ферма

Итак, пусть на плоскости заданы три точки A_1, A_2 и A_3 . Требуется найти кратчайшее дерево G , соединяющее эти точки. Как было уже отмечено выше, вершины степени 1 и 2 дерева G должны принадлежать множеству $M = \{A_i\}$. Сколько может быть внутренних вершин у такого дерева?

Задача 10.1. Пусть G — произвольное дерево с множеством вершин V , и $M \subset V$ содержит все вершины степени 1 и 2. Пусть n — число элементов в M . Тогда $V \setminus M$ содержит не более $n - 2$ вершин.

Таким образом, в рассматриваемом случае число внутренних вершин не больше 1. Поэтому, если в G имеется внутренняя вершина S , то, так как ее степень не меньше 3, а других вершин, кроме граничных, нет, S соединена ребрами со всеми A_i . Если же внутренних вершин нет, то G содержит два ребра — две стороны треугольника $A_1A_2A_3$. Эту вторую возможность можно рассматривать как частный случай первой возможности, считая, что вершина S совпала с одной из вершин A_i . Таким образом, задача о поиске кратчайшего дерева сводится к задаче об оптимальном расположении точки S : для заданных трех точек A_1, A_2 и A_3 евклидовой плоскости найти точку S , называемую *точкой Ферма*, для которой величина $\sum_{i=1}^3 |SA_i|$ наименьшая возможная. Сформулированная только что проблема называется *задачей Ферма*, и следующее упражнение фактически является ответом.

Задача 10.2. Докажите, что если в треугольнике $A_1A_2A_3$ один из углов больше или равен $2\pi/3$, то точка S совпадает с вершиной этого угла. Если же в треугольнике $A_1A_2A_3$ все углы меньше $2\pi/3$, то положение точки S однозначно определяется следующим построением. Обозначим через $A'_k, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, точку на плоскости, для которой треугольник $A_iA_jA'_k$ — правильный, пересекающийся с треугольником $A_1A_2A_3$ по стороне A_iA_j . Тогда окружности, описанные вокруг треугольников $A_iA_jA'_k$, а также отрезки $[A'_iA_i]$, называемые *линиями Симпсона*, пересекаются в точке S , которая называется *точкой Торричелли*, см. рис. 10.1. Длины линий Симпсона равны между собой и равны длине построенной кратчайшей сети, т.е. величине $\sum_{i=1}^3 |SA_i|$.

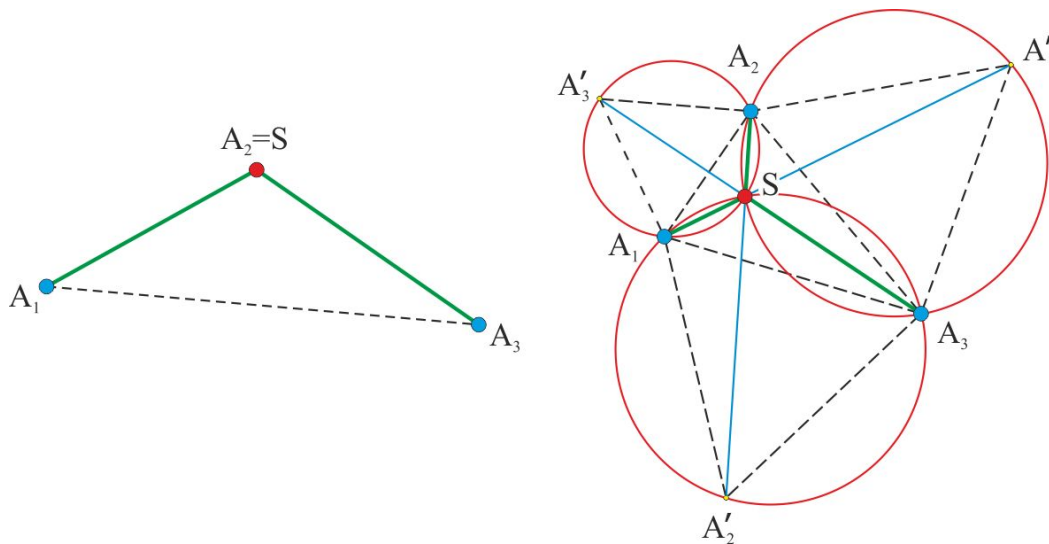


Рис. 10.1: Решение задачи Ферма.

Отметим, что в каждом из рассмотренных в задаче 10.2 случаев угол между смежными ребрами-отрезками геометрической реализации кратчайшего дерева не меньше 120° , при этом в вершине степени 3 все три угла равны между собой и, значит, равны 120° .

10.1.2 Локальная структура кратчайших деревьев. Локально минимальные деревья

Решение задачи Ферма мгновенно приводит к следующей теореме, описывающей *локальную структуру* кратчайших деревьев, т.е. то, как стыкуются ребра-отрезки геометрической реализации кратчайшего дерева в вершинах этого дерева.

Теорема 10.3 (О локальной структуре кратчайшего дерева). *Все ребра кратчайшего дерева — прямолинейные отрезки, причем углы между ребрами-отрезками, входящими из общей вершины, не меньше 120° , поэтому степени вершин таких деревьев не превосходят 3. Таким образом, степени внутренних вершин всегда равны только 3, и стыкующиеся в них ребра образуют углы в 120° ; степени граничных вершины могут равняться 1, 2 или 3, причем в граничной вершине степени 2 отрезки стыкуются под углом, не меньшим 120° , а в граничной вершине степени 3 — так же, как и во внутренней вершине.*

Доказательство. Если ребро кратчайшего дерева G не является прямолинейным отрезком, то, заменив его на отрезок, соединяющий концы этого ребра, мы уменьшим длину дерева G , не нарушив связности и не изменив границу, что невозможно.

Если угол между ребрами дерева G , выходящими из общей вершины P , меньше 120° , то отложим на этих ребрах маленькие отрезки $[P, X]$ и $[P, Y]$, тогда в треугольнике PXY все углы будут меньше $2\pi/3$, поэтому, в силу задачи 10.2, кратчайшее дерево для граничного множества $\{P, X, Y\}$ содержит внутреннюю вершину и, в силу единственности решения задачи Ферма для каждой конкретной границы, длина этого дерева меньше $|PX| + |PY|$, поэтому, заменив в G ломаную PXY на кратчайшее дерево для границы $\{P, X, Y\}$, мы уменьшим длину G , не нарушив связности и не изменив границы, что невозможно. Доказательство закончено. \square

Отметим, что не всякое дерево с описанной выше локальной структурой является кратчайшим (ниже мы приведем пример). Плоское дерево с ребрами-отрезками, стыкующимися под углами величины не меньше 120° , и с границей, содержащей все вершины степени 1 и 2, называется *локально минимальным*. Таким образом, каждое кратчайшее дерево на плоскости является локально минимальным, и класс локально минимальных деревьев шире класса всех кратчайших деревьев.

Отметим также, что типы локально минимальных деревьев с границей M можно искать среди *деревьев Штейнера*, которые представляют собой соединяющие M деревья с прямолинейными ребрами, причем степени вершин этих деревьев не превосходят 3, а все вершины степени 1 и 2 лежат в M .

10.1.3 Алгоритм построения кратчайшего дерева на евклидовой плоскости

Обсудим теперь, как по заданному граничному множеству M на евклидовой плоскости построить кратчайшее дерево, соединяющее это множество. Самый грубый алгоритм состоит следующем. Рассмотрим все деревья Штейнера G , соединяющие M ; для каждого такого дерева найдем такое положение внутренних вершин, при котором длина дерева наименьшая (это дерево всегда существует; обозначим его через Γ_G); из всех построенных так деревьев Γ_G выберем деревья наименьшей длины.

На самом деле, не всякое дерево Γ_G является локально минимальным. Действительно, пусть $M = \{P_1, \dots, P_4\}$ — последовательные вершины единичного квадрата, S_1 и S_2 — внутренние точки дерева Штейнера G , соединяющего M , и предположим, что S_1 соединена ребрами с точками S_2, P_1 и P_3 , а S_2 , соответственно, — с S_1, P_2 и P_4 . Тогда длина ломаной $P_1S_1P_3$, а также длина ломаной $P_2S_2P_4$, не меньше $\sqrt{2}$, так что длина дерева Γ_G не меньше $2\sqrt{2} + |S_1S_2| \geq 2\sqrt{2}$. Если поместить S_1 и S_2 в центр квадрата, у полученного дерева длина будет наименьшей возможной. Действительно, если хотя бы одна из S_i не совпадает с центром квадрата, то длина дерева больше $2\sqrt{2}$, так как или одна из ломаных $P_1S_1P_3$ и $P_2S_2P_4$ не является отрезком, содержащим соответствующее S_i , или же $|S_1S_2| > 0$.

В силу сделанного выше замечание, деревья Γ_G , не являющиеся локально минимальными, имеют заведомо большую длину, чем кратчайшее дерево. Такие деревья полезно научиться распознавать и выкидывать из рассмотрения заранее, без определения положения их внутренних вершин, что в некоторых случаях оказывается возможным.

Итак, задача построения кратчайшего дерева сводится к такому вопросу: как для данного дерева Штейнера G , соединяющего конечное подмножество M точек евклидовой плоскости, выяснить, будет ли дерево Γ_G локально минимальным, и если да, то определить положения внутренних вершин дерева Γ_G , а также вычислить его длину.

Для ответа на этот вопрос, мы начнем с того, что разрежем дерево G по всем граничным вершинам степени больше 1. Тогда дерево G распадется на *невыврожденные* деревья Штейнера G_i или, как принято говорить в англоязычной литературе, на *полные* деревья Штейнера, которые называются *невыврожденными компонентами* или *полными компонентами* дерева G . Заметим, что множества $M_i \subset M$, которые соединяют G_i , состоят в точности из всех вершин деревьев G_i степени 1, а также что в G_i нет вершин степени 2. Таким образом, у невыврожденных деревьев Штейнера граничные вершины имеют степень 1, а внутренние — степень 3.

Приводимое ниже упражнение показывает, как проверку существования локально минимального дерева данного типа можно свести к проверке существования локально минимальных невыврожденных деревьев.

Задача 10.4. Покажите, что для дерева Штейнера G , соединяющего конечное подмножество M точек евклидовой плоскости, существует локально минимальное дерево Γ_G тогда и только тогда, когда для всех невырожденных компонент G_i дерева G , соединяющих соответствующие множества $M_i \subset M$, существуют локально минимальные деревья Γ_{G_i} , причем ребра-отрезки деревьев Γ_{G_i} стыкуются в общих вершинах под углами, не меньшими 120° .

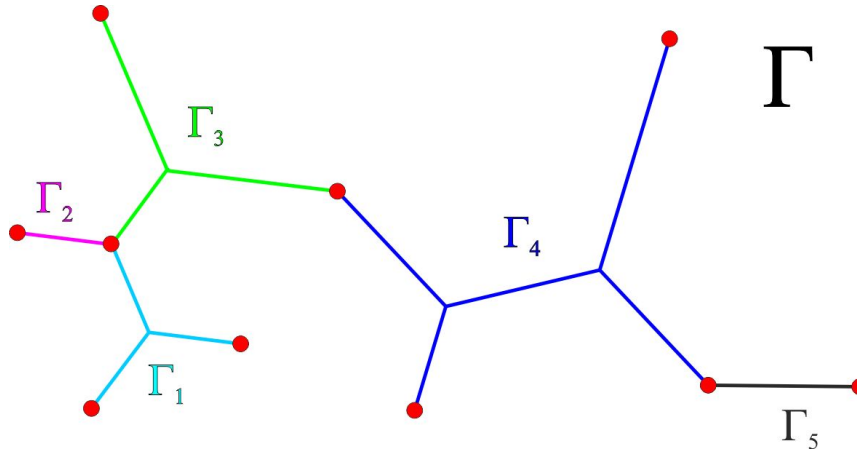


Рис. 10.2: Невырожденные компоненты локально минимального дерева.

Алгоритм, который для невырожденного дерева Штейнера G проверяет, является ли Γ_G локально минимальным, и, в случае положительного ответа, строит его, называется *алгоритмом Мелзака*, к описанию идеи которого мы сейчас и перейдем. Подробности можно найти в [4], [5], [6].

10.1.4 Алгоритм Мелзака

Пусть G — невырожденное дерево Штейнера. Пара $\{e_1, e_2\}$ смежных ребер, выходящих из граничных вершин P_1 и P_2 , называется *усами* дерева G , а пара $\{P_1, P_2\}$ — *вершинами усов* $\{e_1, e_2\}$.

Задача 10.5. Покажите, что каждое невырожденное дерево Штейнера с не менее чем тремя граничными вершинами имеет не менее двух усов.

Предположим, что $\Gamma_0 = \Gamma_G$ — невырожденное локально минимальное дерево с не менее чем тремя граничными вершинами. Рассмотрим усы $\{e_1, e_2\}$ дерева Γ_0 с вершинами $\{P_1, P_2\}$, и пусть S — общая вершина ребер e_i , а e — третье выходящее из S ребро дерева Γ_0 . Легко видеть, что если продолжить ребро e за вершину S , то такое продолжение пройдет через вершину $P_{1,2}$ правильного треугольника $P_1P_2P_{1,2}$, расположенного в той полуплоскости относительно прямой P_1P_2 , которая не содержит S , см. рис. 10.3 слева.

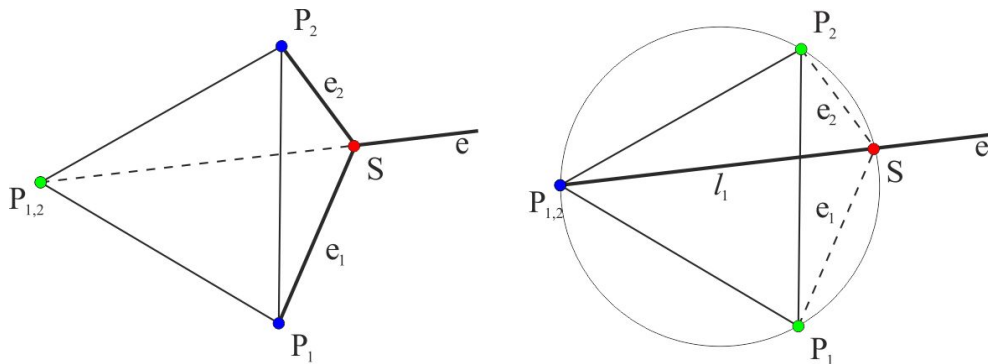


Рис. 10.3: Идея алгоритма Мелзака.

Если теперь выкинуть из исходного дерева ребра e_1 и e_2 , а ребро e продлить до точки $P_{1,2}$, то таким образом мы построим локально минимальное дерево Γ_1 , соединяющее граничное множество M_1 , полученное из исходного заменой точек P_1 и P_2 на точку $P_{1,2}$. Такая перестройка границы и структуры невырожденного дерева Штейнера называется шагом *прямого хода алгоритма Мелзака*.

Отметим, что точка S лежит на пересечении проходящего через ребро e луча ℓ_1 , выпущенного из точки $P_{1,2}$, и окружности, описанной вокруг треугольника $P_1P_2P_{1,2}$, см. рис. 10.3 справа. Таким образом, зная дерево Γ_1 и положение точек P_1 и P_2 , из которых была получена точка $P_{1,2}$, мы можем восстановить дерево Γ_0 , укоротив луч ℓ_1 посредством выкидывания полуинтервала $[P_{1,2}, S)$ и добавлением отрезков $[S, P_1]$ и $[S, P_2]$ (при этом граничное множество перестраивается посредством замены точки $P_{1,2}$ на пару точек P_1 и P_2). Такое восстановление называется шагом *обратного хода алгоритма Мелзака*.

Таким образом, алгоритм Мелзака сначала последовательно выполняет перестройку граничного множества и структуры невырожденного дерева Штейнера до тех пор, пока граничное множество M_k не будет состоять из двух точек, а соединяющее их дерево Γ_k — из одного ребра. Затем алгоритм Мелзака запускает обратный ход, в результате которого последовательно строятся локально минимальные деревья, соединяющие M_{k-1} , M_{k-2} и т.д., вплоть до M . Однако, если заранее не известно, что локально минимальное дерево существует, то на некотором шаге обратного хода может произойти сбой, см. рис. 10.4.

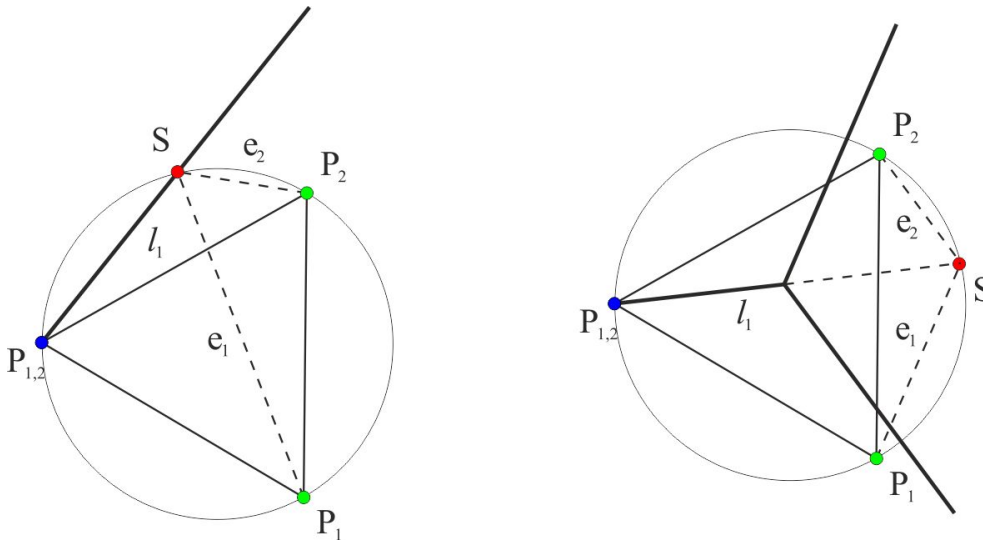


Рис. 10.4: Возможные сбои в обратном ходе алгоритма Мелзака.

В первом случае луч ℓ_1 пересекает окружность, описанную вокруг треугольника $P_1P_2P_{1,2}$, не по внутренней дуги, ограниченной P_1P_2 и не содержащей $P_{1,2}$. Во втором случае вершина перестроенного дерева, в которую приходит луч ℓ_1 , оказывается внутри круга, ограниченного окружностью, описанной вокруг треугольника $P_1P_2P_{1,2}$.

Отметим, что в прямом ходе алгоритма Мелзака имеется неопределенность: вообще говоря, априори не понятно, какой из двух правильных треугольников на вершинах услов нужно строить. Эта неоднозначность приводит к очень большому перебору. Однако имеется усовершенствование алгоритма [7], которое позволяет избавиться от подобной неопределенности за счет рассмотрения более хитрых фрагментов параметризующего дерева. Однако и эти усовершенствования оставляют алгоритм все еще слишком медленным для практических приложений. В [8] приведены существенные улучшения алгоритма, позволяющие получать за приемлемое время решение проблемы Штейнера для граничных множеств, состоящих из нескольких сотен точек.

Задача 10.6. Построить все локально минимальные деревья для вершин прямоугольника и выбрать из них кратчайшие. Выяснить, сколько кратчайших и какие существуют при данном отношении длин сторон прямоугольника.

10.2 Формула Максвелла

Эта формула [9], [10], [11] позволяет вычислить длину плоского локально минимального дерева только по координатам граничных точек и направлениям входящих в них ребер. На самом деле, формула вытекает из следующего простого соображения. Введем на плоскости декартову систему координат, тогда каждую точку можно рассматривать как вектор. Пусть $[A, B]$ — произвольный отрезок. Тогда $n_A = \overrightarrow{BA}/|AB|$ и $n_B = \overrightarrow{AB}/|AB| = -n_A$ — единичные векторы направлений этого отрезка, ориентированного соответственно в сторону вершин A и B . Заметим, что $|AB| = (B-A) \cdot n_B = A \cdot n_A + B \cdot n_B$, где через $X \cdot Y$ обозначено стандартное скалярное произведение векторов X и Y . Таким образом, длина локально минимальной сети, равная сумме длин всех ее ребер-отрезков, может быть записана по приведенной только-что формуле через координаты ее вершин и направления ее ребер. Однако во всех вершинах степени 3, в частности, во всех внутренних вершинах, сумма направлений входящих в такую вершину ребер равна нулю, поэтому, в силу билинейности скалярного произведения, вершины степени 3 дают нулевой вклад в общую формулу. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 10.7 (Формула Максвелла). *Пусть G — плоское локально минимальное дерево, соединяющее M . Обозначим через $M' \subset M$ множество всех граничных вершин дерева G , степени которых меньше 3. Для каждой такой вершины v обозначим через ξ_v сумму направлений входящих в нее ребер, тогда длина $\ell(G)$ этого дерева может быть вычислена так:*

$$\ell(G) = \sum_{v \in M'} v \cdot \xi_v.$$

Задача 10.8. В данной задаче мы будем пользоваться обозначениями теоремы 10.7. отождествим евклидову плоскость с полем комплексных чисел и будем рассматривать точки v и векторы ξ_v как комплексные числа. Докажите, что

$$\ell(G) = \sum_{v \in M'} v \bar{\xi}_v,$$

где через \bar{z} обозначено комплексное число, сопряженное к z .

10.3 Замкнутые локально минимальные сети на многогранниках

Естественным обобщением замкнутых геодезических являются замкнутые локально минимальные сети на поверхностях многогранников. Локальная минимальность означает, что каждый достаточно малый фрагмент таких сетей должен быть кратчайшим деревом; замкнутость — отсутствие границы. На рис. 10.5 приведены примеры таких сетей на поверхностях платоновых тел.

Уже в случае тетраэдров задача описания таких сетей крайне нетривиальна, и здесь полный ответ получен лишь для тетраэдров, все грани которых изометричны (для так называемых равногранных тетраэдров), см. [12] и [6]. Про сети на тетраэдрах общего вида можно прочитать в [13].

Рассмотрим случай выпуклых многогранников в трехмерном пространстве.

Задача 10.9. Пусть $S = F$ — граница выпуклого многогранника W , и G — замкнутая локально минимальная сеть на F . Покажите, что G не проходит через вершины многогранника W , что ее ребра — геодезические, и что углы между стыкующимися в вершинах сети ребрами-геодезическими не меньше 120° , так что степени вершин сети G не превосходят 3. Более того, в вершинах степени 3 ребра стыкуются под углами в 120° , в вершинах степени 2 — под углами в 180° , а вершин степени 1 сеть не содержит.

Сеть G из задачи 10.9 разбивает F на компоненты, каждая из которых, вместе с ограничивающей ее ломаной, называется *ячейкой сети G* , так что каждая ячейка представляет собой некоторый многоугольник на F . Чтобы описать типы возможных ячеек сети G , воспользуемся упражнением 5.5.

Предложение 10.10. *Пусть G — замкнутая локально-минимальная сеть на границе F выпуклого многогранника. Пусть X — произвольная ячейка сети G и n — количество сторон границы этой ячейки. Тогда*

$$n = 6 - \frac{3}{\pi} \sum K(P_r),$$

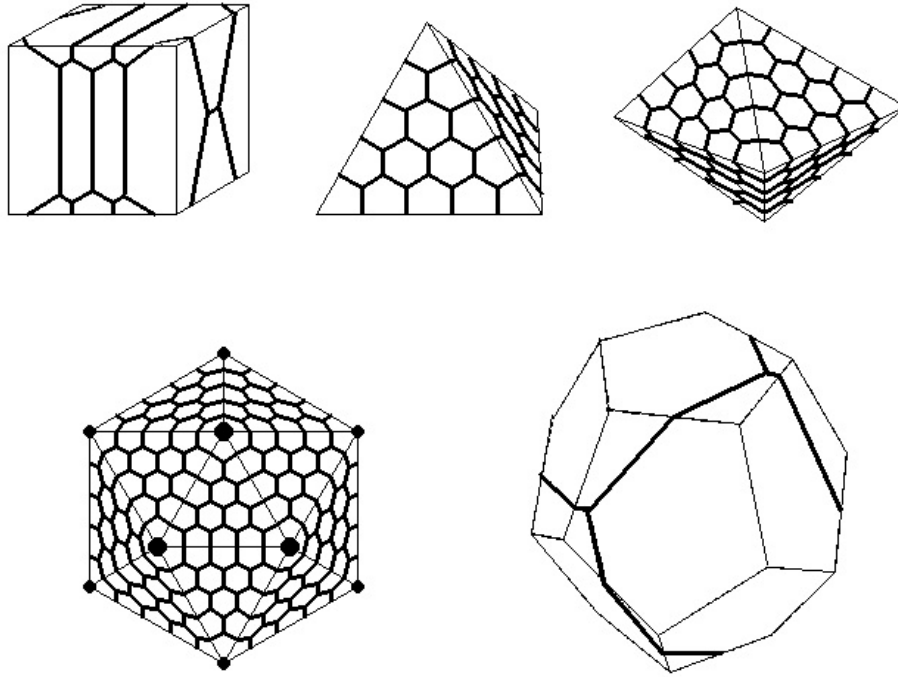


Рис. 10.5: Примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях платоновых тел.

где $K(P_r)$ обозначает кривизну F в вершине P_r многогранника, а сумма берется по всем P_r , попавшим внутрь X . В частности, $n \leq 6$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X не содержит вершин многогранника.

Доказательство. Приведенная в теореме формула является мгновенным следствием упражнения 5.5 и того факта, что все внутренние углы в ячейке X равны $2\pi/3$. Второе утверждение следует из того, что кривизна каждой вершины выпуклого многогранника положительна. \square

В качестве примера рассмотрим правильный тетраэдр и выясним, как могут выглядеть замкнутые локально минимальные сети на нем. Кривизны его вершин равны π , поэтому сеть может иметь только те ячейки, которые являются 6-угольниками, 3-угольниками и 0-угольниками. Если имеется 0-угольник, то в нем нет вершин и, значит, G совпадает с границей этой ячейки и является замкнутой геодезической. В ячейке, являющейся 3-угольником, содержится ровно одна вершина тетраэдра. В 6-угольной ячейке вершин тетраэдра нет. Поэтому в сети G , отличной от замкнутой геодезической, имеется ровно 4 треугольных ячейки, в каждой — по одной вершине тетраэдра, и все остальные ячейки — пустые шестиугольные. Пример такой сети приведен на рис. 10.5.

Задача 10.11. Опишите возможные ячейки замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях платоновых тел.

Задача 10.12 (*). Покажите, что каждый выпуклый многогранник с треугольными гранями можно сколь угодно мало пошевелить, т.е. сместить его вершины в сколь угодно близкие точки объемлющего пространства, так, чтобы полученный многогранник остался выпуклым, однако на нем не существовало бы ни одной замкнутой локально минимальной сети.

Отметим, что в случае геодезических решение задачи 10.12 вытекает из теорем Г.А. Гальперина, см. [14] и [15].

Литература к главе 10

- [1] Jarník V., Kössler M. *O minimalnich grafeth obeahujiicich n danijch bodu*. Cas. Pest. Mat. a. Fys., 1934, v. 63, pp. 223–235.
- [2] Fermat P. de (1643), Ed. H.Tannery, ed., *Oeuvres*, vol. 1, Paris 1891, Supplement: Paris 1922, pp. 153.
- [3] Курант Р. Роббинс Г. *Что такое математика?* 3-е изд., испр. и доп. М., 2001.
- [4] Melzak Z. A. *On the problem of Steiner*, Canad. Math. Bull., 1960, N 4, pp. 143–148.
- [5] Melzak Z. A. *Companion to concrete mathematics*, Wiley–Interscience, New York, 1973.
- [6] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [7] Hwang F.K. *A linear time algorithm for full Steiner trees*. Oper. Res. Letter, 1986, N 5, pp. 235–237.
- [8] Warme D.M., Winter P., Zachariasen M. *Exact Algorithms for Plane Steiner Tree Problems. A Computational Study*. Technical Report DIKU-TR-98/11, Department of Computer Science, University of Copenhagen, DENMARK, 1998.
- [9] Maxwell J.C. Cambridge Philos. Mag., 1864.
- [10] Maxwell J.C. Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1869, v. 26.
- [11] Gilbert E.N., Pollak H.O. Steiner Minimal Trees. SIAM J. Appl. Math., 1968, v. 16, N 1, pp. 1–29.
- [12] Птицына И.В. *Классификация замкнутых минимальных сетей на тетраэдрах*. Матем. сб., 1994, т. 185, N 5, с. 119–138.
- [13] Стрелкова Н.П. *Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров*. Матем. сб., 2011, т. 202, N 1, с. 141–160.
- [14] Гальперин Г.А. *О теореме Люстерника-Шнирельмана для многогранников*. УМН, 1991, т. 46, N 6, с. 207–208.
- [15] G. A. Galperin, *Convex polyhedra without simple closed geodesics*. Regul. Chaotic Dyn., 2003, v. 8, N 1, 45–58.