

# Глава 1

## Элементы теории графов

**План.** Общее определение графов, вершины, ребра, граничное отображение или отображение инцидентности, инцидентные вершины и ребра, вершины, соединенные ребром, смежные вершины, смежные ребра, петля, кратное ребро, кратность ребра, простой граф, лемма о рукопожатиях, степень вершины, задача Эйлера, маршрут, замкнутый маршрут, длина маршрута, путь, цикл, связный граф, эйлеров цикл или обход графа, эйлеров граф, критерий эйлеровости графа, простой цикл, гамильтонов цикл, гамильтонов граф, теорема Дирака — достаточное условие гамильтоновости, висючая вершина графа, дерево.

### 1.1 Основные понятия теории графов

Для произвольного множества  $V$  через  $V_k$  будем обозначать множество всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $V$ . Множество  $V_2$  совпадает с множеством неупорядоченных пар различных элементов  $V$ . Множество  $V_1$  состоит из одноэлементных подмножеств множества  $V$ , его можно отождествить с  $V$ . Если множество  $V$  конечно и состоит из  $n$  элементов, то  $V_k$  пусто при  $k > n$ .

**Определение 1.1.** *Графом  $G$  называется тройка  $G = (V, E, \partial)$ , состоящая из множеств  $V$ ,  $E$  и отображения  $\partial: E \rightarrow V_1 \cup V_2$ . Элементы из  $V$  называются *вершинами* графа  $G$ , элементы из  $E$  — *ребрами* графа  $G$ , а  $\partial$  — *граничным отображением* или *отображением инцидентности*.*

**Замечание 1.2.** Всюду, если не оговорено противное, мы будем рассматривать *конечные графы*, т.е. графы, у которых множества  $V$  и  $E$  конечны.

**Пример 1.3.** Пусть  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $\partial(e_i) = \{v_j, v_k\}$  для любых  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Тогда граф  $(V, E, \partial)$  можно рассматривать как модель треугольника с множеством вершин  $V$  и множеством сторон  $E$ . При этом граничное отображение  $\partial$  показывает, к каким вершинам каждое из ребер  $e_i$  “приклеивается”, например,  $\partial(e_1) = \{v_2, v_3\}$ , так что  $e_1$  приклеивается к  $v_2$  и  $v_3$ .

Для наглядности графы представляют в виде точек-вершин, соединенных линиями-ребрами. На рис. 1.1 слева изображен граф из примера 1.3, а справа — граф более общего вида.

В теории графов принята следующая терминология:

- если  $v \in \partial(e)$ , то говорят, что вершина  $v$  и ребро  $e$  *инцидентны*;
- если  $\partial(e) = \{v, w\}$ , то говорят, что вершины  $v$  и  $w$  *смежны*, или же, что они *соединены ребром  $e$* ;
- ребра  $e$  и  $e'$  называются *смежными*, если  $\partial(e) \cap \partial(e') \neq \emptyset$ ;
- ребро, инцидентное ровно одной вершине, называется *петлей*;
- если некоторой паре вершин инцидентно несколько ребер, то все эти ребра называются *кратными*;
- если некоторой вершине инцидентно несколько петель, то все эти петли также называются *кратными*.

*Кратностью ребра  $e$*  называется количество всех ребер  $e'$ , для которых  $\partial(e') = \partial(e)$ . Ясно, что ребро  $e$  не является кратным тогда и только тогда, когда его кратность равна 1.

**Определение 1.4.** Граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

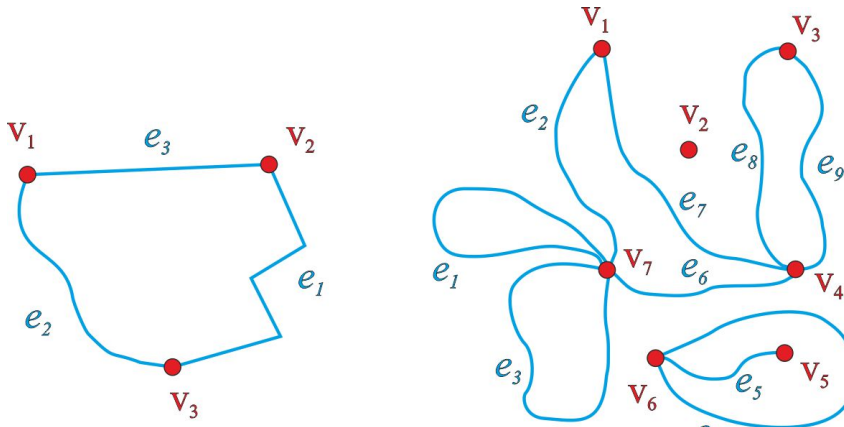


Рис. 1.1: Примеры изображения графов.

**Замечание 1.5.** Чтобы задать простой граф, достаточно задать множество вершин  $V$  и некоторое подмножество  $E$  в  $V_2$ .

В самом деле, пусть  $G = (V, E, \partial)$  — простой граф. Тогда  $\partial$  отображает множество  $E$  взаимно-однозначно на некоторое подмножество в  $V_2$ , что позволяет отождествить  $E$  и  $\partial(E) \subset V_2$ . Иными словами, ребро простого графа однозначно задается парой различных вершин, которые оно соединяет.

Таким образом, *простой граф* — это пара  $(V, E)$ , где  $E$  — некоторое подмножество в  $V_2$ .

Для простого графа  $G = (V, E)$  ребро  $e = \{v, w\} \in E$  удобно обозначать через  $vw$  или  $wv$ .

**Пример 1.6.** Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.1 справа, и приведем примеры, иллюстрирующие введенную выше терминологию. Вершина  $v_1$  инцидентна ровно двум ребрам —  $e_2$  и  $e_7$ . Ребро  $e_1$  инцидентно только вершине  $v_7$ . Вершина  $v_1$  смежна с  $v_4$  и  $v_7$ , а с остальными вершинами не смежна. Ребро  $e_2$  смежно с  $e_7, e_1, e_3$  и  $e_6$ , а с остальными ребрами не смежно. Имеется ровно три петли:  $e_1, e_3$  и  $e_4$ . Кратными являются: петли  $e_1$  и  $e_3$ ; ребра  $e_8$  и  $e_9$ . Кратности петель  $e_1$  и  $e_3$  равны 2, кратности ребер  $e_8$  и  $e_9$  также равны 2. Этот граф простым не является. Граф, приведенный на рисунке 1.1 слева, является простым.

Имеется большое количество задач, которые естественно решаются на языке теории графов.

**Задача 1.7** (Лемма о рукопожатиях). Некоторые участники конференции, здороваясь, пожимают друг другу руки. Докажите, что число участников, каждый из которых совершил нечетное число рукопожатий, — четно.

Решение этой задачи использует понятие степени вершины и одну очень полезную формулу.

**Определение 1.8.** Пусть  $v$  — произвольная вершина некоторого графа. Тогда *степенью*  $\deg v$  этой вершины называется количество инцидентных  $v$  ребер, не являющихся петлями, плюс удвоенное количество петель, инцидентных  $v$ .

Вычислим сумму степеней всех вершин графа. Заметим, что каждое ребро вносит в эту сумму вклад, равный 2, поэтому

$$2e = \sum_{v \in V} \deg v,$$

где  $e$  — число ребер графа  $G$ . Обозначим через  $v_k$  количество вершин степени  $k$ . Тогда сумму степеней всех вершин можно записать в виде  $\sum_{k=0}^{\infty} k v_k$ . Таким образом, имеет место важная формула:

$$(1.1) \quad 2e = \sum_{k=0}^{\infty} k v_k.$$

**Решение задачи 1.7.** Рассмотрим граф  $G$ , который очевидным образом описывает рукопожатия: за вершины принимаем участников конференции, за ребра — все рукопожатия. При этом считаем, что ребро-рукопожатие

инцидентно тем вершинам–участникам, которые это рукопожатие совершили. Тогда в задаче требуется доказать, что в нашем графе количество вершин с нечетными степенями четно. Иными словами, требуется доказать, что число  $\sigma_1 = v_1 + v_3 + v_5 + \dots$  четно.

Воспользуемся формулой (1.1):

$$(1.2) \quad 2e = \sum_{k=0}^{\infty} k v_k = \sum_{k=0}^{\infty} 2k v_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) v_{2k-1}.$$

Из нее следует, что число  $1v_1 + 3v_3 + 5v_5 + \dots$  четно. Теперь заметим, что оно отличается от числа  $\sigma_1$  на четное число  $2v_3 + 4v_5 + 6v_7 + \dots$ , следовательно  $\sigma_1$  само четно.

**Замечание 1.9.** Разберитесь, учитывает ли приведенное выше решение ситуацию, когда какие-то пары участников конференции здоровались несколько раз.

Отметим, что в теории графов имеется много интересных задач, решения которых основаны на вычислении различных соотношений между числовыми характеристиками графов. Часть из таких задач мы рассмотрим на семинаре.

## 1.2 Эйлеровы графы

Следующий круг вопросов связан с обходами графов. Вот пример классической задачи, которую решил Л. Эйлер, и с которой, как считается, берет начало теория графов.

**Задача 1.10** (Задача Эйлера). В городе Кёнигсберге на реке Прегель имеется 7 мостов (их расположение показано рис. 1.2 слева). Можно ли, выйдя из дома, вернуться назад, пройдя каждый мост ровно один раз?

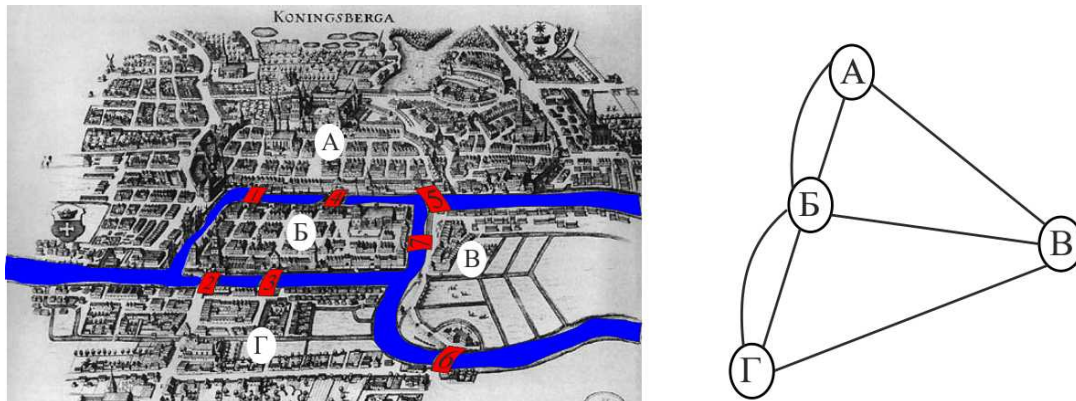


Рис. 1.2: Старинная карта Кёнигсберга. Буквами обозначены части города: А — Альтштадт, Б — Кнайпхоф, В — Ломзе, Г — Форштадт. Цифрами обозначены мосты (в порядке строительства): 1 — Лавочный, 2 — Зелёный, 3 — Рабочий, 4 — Кузнечный, 5 — Деревянный, 6 — Высокий, 7 — Медовый.

Эйлер изобразил части суши точками, а мосты — линиями, соединяющими эти точки и, таким образом, сформулировал эту задачу в терминах теории графов.

Теперь нам нужно ввести ряд новых понятий.

**Определение 1.11.** *Маршрутом, соединяющим вершины  $v_0$  и  $v_k$ , называется последовательность*

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k,$$

где  $v_i$  — вершины графа, а  $e_i$  — его ребра, причем для каждого  $i$  ребро  $e_i$  соединяет вершины  $v_{i-1}$  и  $v_i$ . Маршрут называется *замкнутым*, если  $v_0 = v_k$ . В обоих рассмотренных случаях число  $k$  называется *длиной маршрута*. Если в маршруте все вершины различны, то такой маршрут называется *путем*. Если же в замкнутом маршруте различны все ребра  $e_i$ , то такой маршрут называется *циклом*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить некоторым маршрутом.

**Замечание 1.12.** Если  $G$  — простой граф, то маршрут из определения 1.11 записывается как  $v_0v_1 \cdots v_k$  (без указания ребер и без разделения запятыми).

**Пример 1.13.** Приведем пример маршрута в графе на рис. 1.1:

$$\gamma = v_7, e_3, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3, e_8, v_4, e_7, v_1, e_7, v_4.$$

Этот маршрут выходит из вершины  $v_7$  и проходит сначала по одной из кратных петель, а именно, по  $e_3$ ; затем идет по ребру  $e_6$  кратности 1 в вершину  $v_4$ ; оттуда отправляется по одному из кратных ребер в  $v_3$  и возвращается назад по другому из кратных ребер в  $v_4$ ; затем он идет по ребру  $e_7$  кратности 1 в вершину  $v_1$  и сразу возвращается по этому же ребру назад в вершину  $v_4$ . Тем самым, при движении по маршруту допустимы всевозможные самопересечения. Этот маршрут не является замкнутым, так как начинается и заканчивается в разных вершинах. Но если его продолжить, добавив  $e_6, v_7$ , то он станет замкнутым. Длина незамкнутого маршрута  $\gamma$  равна 6, а длина замкнутого маршрута  $\gamma, e_6, v_7$  равна 7.

В  $\gamma$  имеются совпадающие вершины, поэтому  $\gamma$  путем не является. Заметим, что в путь не может входить петля, а также путь не может содержать несколько ребер, соединяющих одни и те же вершины. Вот пример пути:  $v_1, e_2, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3$ , причем этот путь имеет длину 3 и является максимальным в силу того, что его нельзя продолжить до более длинного пути.

Определенный выше замкнутый маршрут  $\gamma, e_6, v_7$  не является циклом, потому что в нем некоторые ребра встречаются несколько раз (таким является ребро  $e_7$ ). Примером цикла служит

$$v_7, e_3, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3, e_8, v_4, e_7, v_1, e_2, v_7.$$

Рассматриваемый граф не является связным, так как, скажем, вершины  $v_6$  и  $v_7$  маршрутом не соединяются. Однако если выкинуть из этого графа вершины  $v_5, v_6$ , вместе с ребрами  $e_4$  и  $e_5$ , то оставшийся граф будет связным.

**Определение 1.14.** Цикл в связном графе называется *эйлеровым* или *обходом графа*, если он содержит все ребра графа. Граф, для которого существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

Эйлеров граф можно нарисовать на плоском листе бумаги, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному ребру дважды (при этом некоторые вершины могут проходиться по несколько раз).

Итак, в задаче 1.10 спрашивается, существует ли для графа, изображенного на рис. 1.2 справа, эйлеров цикл, т.е. является ли этот граф эйлеровым. Мы решим общую задачу, из которой мгновенно вытекает, что в задаче 1.10 ответ отрицательный.

**Теорема 1.15** (Критерий эйлеровости графа). *Связный граф эйлеров, если и только если степени всех его вершин четны и положительны.*

*Доказательство.* Пусть граф содержит более одной вершины (разбор случая одновершинного графа оставляется читателю в качестве упражнения). Заметим, что выкидывание петли сохраняет связность графа, четности степеней его вершин, а также свойство графа содержать эйлеров цикл. Таким образом, мы будем сразу предполагать, что рассматриваемые графы не имеют петель. Заметим также, что, по определению, эйлеровы циклы существуют лишь в связных графах.

Предположим, что граф содержит эйлеров цикл, и представим себе, что мы обходим ребра графа по этому циклу. Рассмотрим произвольную вершину  $v$ . Тогда ребро, по которому мы зашли в  $v$ , и следующее ребро, по которому мы из  $v$  вышли, образуют пару. Кроме того, так как все ребра цикла различны, любые две таких пары ребер не пересекаются, поэтому все инцидентные  $v$  ребра разбиваются на непересекающиеся пары смежных ребер эйлерова цикла. Следовательно, степень вершины  $v$  четна.

Для доказательства обратного утверждения, покажем сначала, что в любом графе, содержащем хотя бы одно ребро, и в котором степени вершин четны, имеется цикл. Действительно, начнем с произвольного ребра  $e_1$ , соединяющего вершины  $v_0$  и  $v_1$ . В силу четности степени вершины  $v_1$ , существует ребро  $e_2 \neq e_1$ , соединяющее  $v_1$  с некоторой вершиной  $v_2$ . Если  $v_2$  совпала с  $v_0$ , то получили цикл. Иначе продолжаем процесс. В силу конечности числа вершин, на некотором шаге добавленная вершина совпадет с одной из уже имеющихся, и мы получим искомый цикл.

Выкинув этот цикл из графа, вновь получим граф, степени вершин которого четны. Таким образом, каждый граф из условия задачи можно представить в виде объединения реберно непересекающихся циклов. Для каждого цикла существует другой из этого семейства, который с ним пересекается (так как граф связный). Два реберно непересекающихся цикла, имеющих общую вершину, всегда объединяются в один: достаточно стартовать с общей вершины, пройти сначала один цикл, а затем другой. Таким образом, мы объединим все найденные циклы в один и получим эйлеров цикл.  $\square$

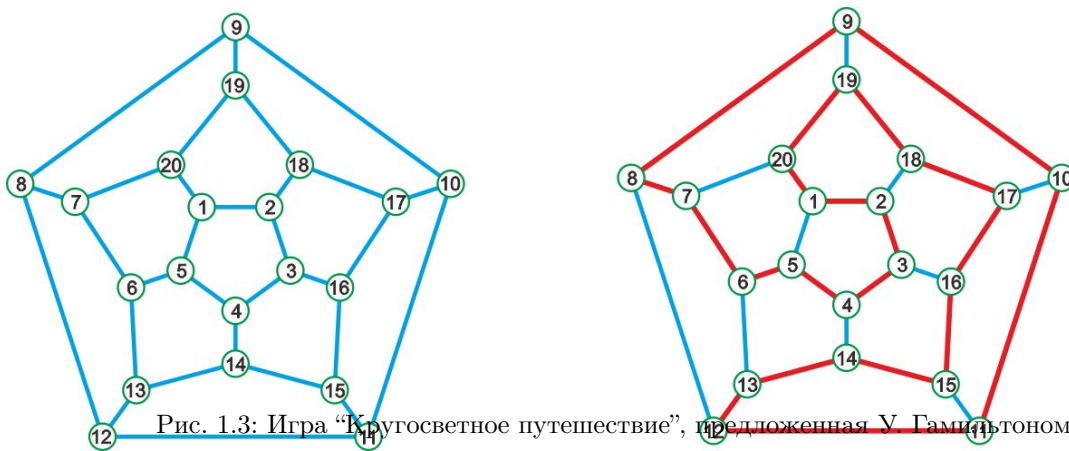
**Задача 1.16.** Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

### 1.3 Гамильтоновы графы

Обсудим еще одну задачу, связанную с обходами. Предварительно дадим необходимые определения.

**Определение 1.17.** Цикл называется *простым*, если все его вершины (кроме первой и последней) различны. Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым*. Граф, содержащий некоторый гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым*.

Задача о поиске гамильтонова цикла была предложена У. Гамильтоном в 1859 году в форме игры, которая называлась “Кругосветное путешествие”. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.3, вершинам которого будем представлять городами, а ребра — соединяющими города дорогами. Требуется, начав с некоторого города и переходя от одного города к другому по имеющимся дорогам, посетить каждый город ровно один раз и вернуться в исходный.



Приведем ряд простых замечаний.

- (1) Каждый гамильтонов граф — связный.
- (2) Если гамильтонов цикл проходит через петлю, то в этом графе имеется ровно одна вершина; обратно, гамильтоновы графы с одной вершиной — это всевозможные графы с одной вершиной, имеющие одну или более петель. Таким образом, если гамильтонов граф  $G$  содержит более одной вершины, то ни один его гамильтонов цикл не проходит ни через одну петлю; поэтому граф, полученный из  $G$  выбрасыванием всех его петель, — также гамильтонов.
- (3) Если гамильтонов цикл содержит два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин, то такой граф имеет ровно две вершины; обратно, каждый граф, имеющий ровно две вершины и такой, что эти вершины соединены не менее чем двумя ребрами, является гамильтоновым. Таким образом, если гамильтонов граф  $G$  содержит более двух вершин, то в его гамильтонов цикл не могут входить два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин; поэтому граф, полученный из  $G$  выбрасыванием из каждого семейства ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, всех ребер, кроме одного, — также гамильтонов.

Таким образом, произвольный граф  $G$ , содержащий не менее трех вершин, гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтоновым является граф  $G'$ , полученный из  $G$  отбрасыванием всех петель, а также выбрасыванием из каждого семейства ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, всех ребер, кроме одного. Граф  $G'$  простой по определению.

Итак, при изучении гамильтоновых графов можно ограничиться простыми графами.

Полным графом  $K_n$  называется простой граф с  $n$  вершинами, в котором каждая пара вершин смежна, т.е. любые две различные вершины соединены единственным ребром.

(4) Полный граф  $K_n$  при  $n \geq 3$  является гамильтоновым.

Отметим, что до сих пор не известно ни одного критерия, описывающего гамильтоновы графы. Многочисленные условия, являющиеся по отдельности или необходимыми, или достаточными, можно, например, найти в [1] или [2]. Приведем одно из этих условий.

**Теорема 1.18 (Дирак).** Пусть  $G = (V, E)$  — простой граф с  $n \geq 3$  вершинами. Предположим, что степени вершин графа  $G$  не меньше  $n/2$ . Тогда граф  $G$  гамильтонов, в частности, граф  $G$  — связный.

*Доказательство.* Пусть  $\gamma = v_0 v_1 \cdots v_\ell$  — путь в графе  $G$ , имеющий максимально возможную длину среди всех путей в  $G$ . Покажем, что  $G$  содержит простой цикл  $C$  длины  $\ell + 1$ .

Так как  $n \geq 3$ , то степени вершин графа  $G$  не меньше 2 и, значит,  $\ell \geq 2$ . Отсюда вытекает, что если в графе есть ребро  $v_0 v_\ell$ , то  $v_0 v_1 \cdots v_\ell v_0$  является циклом, который можно взять в качестве искомого  $C$ .

Пусть теперь  $v_0 v_\ell \notin E$ . Положим

$$X = \{v_i : v_0 v_{i+1} \in E\}, \quad Y = \{v_i : v_\ell v_i \in E\}.$$

Обратите внимание на сдвиг индекса в определении множества  $X$ . Из-за него, например,  $v_0 \in X$ , но  $v_\ell, v_{\ell-1} \notin X$ . Также легко видеть, что  $v_0, v_\ell \notin Y$ .

Заметим, что каждая смежная с  $v_0$  вершина  $w$  графа  $G$  лежит на  $\gamma$ , так как иначе  $wv_0v_1 \cdots v_\ell$  — путь в  $G$  длины  $\ell + 1$ , что противоречит максимальной длине пути  $\gamma$ . Теперь нетрудно понять, что множество вершин, смежных с  $v_0$ , и множество  $X$  содержат одинаковое количество элементов, т.е.  $|X| = \deg v_0 \geq n/2$ . Здесь и далее через  $|Z|$  обозначается количество элементов множества  $Z$ . Аналогично, множество вершин, смежных с  $v_\ell$ , т.е. множество  $Y$ , также содержится во множестве вершин пути  $\gamma$ , поэтому  $|Y| = \deg v_\ell \geq n/2$ . Следовательно,  $|X| + |Y| \geq n$ .

Теперь докажем, что множества  $X$  и  $Y$  пересекаются. Напомним, что вершина  $v_\ell$  не принадлежит ни  $X$ , ни  $Y$ , поэтому  $v_\ell \notin X \cup Y$  и, значит,  $X \cup Y \neq V$ , откуда  $|X \cup Y| < n$ . Но тогда если бы  $X$  и  $Y$  не пересекались, то выполнялось бы равенство  $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ . Учитывая доказанные выше неравенства, мы получили бы  $n > |X \cup Y| = |X| + |Y| \geq n$ . Следовательно, множества  $X$  и  $Y$  пересекаются.

Пусть  $v_k \in X \cap Y$ . Ранее мы показали, что  $v_\ell, v_{\ell-1} \notin X$ ; кроме того,  $v_0 \notin Y$ . Поэтому  $0 < k < \ell - 1$ .

Искомый цикл  $C$  строится следующим образом, см. рис. 1.4. Сначала из  $v_0$  вдоль пути  $\gamma$  идем в вершину  $v_k$ , из нее по ребру  $v_k v_\ell$  (оно существует, так как  $v_k \in Y$ ) идем в  $v_\ell$ , затем по  $\gamma$  идем в обратном направлении из  $v_\ell$  в  $v_{k+1}$ , наконец, соединяем  $v_{k+1}$  с  $v_0$  ребром  $v_{k+1} v_0$  (оно существует, так как  $v_{k+1} \in X$ ). Легко видеть, что длина построенного цикла  $C$  равна  $\ell + 1$ . Кроме того, цикл  $C$  простой, так как все его вершины — это вершины пути  $\gamma$ , каждая из которых (кроме первой и последней) проходится циклом  $C$  ровно один раз.

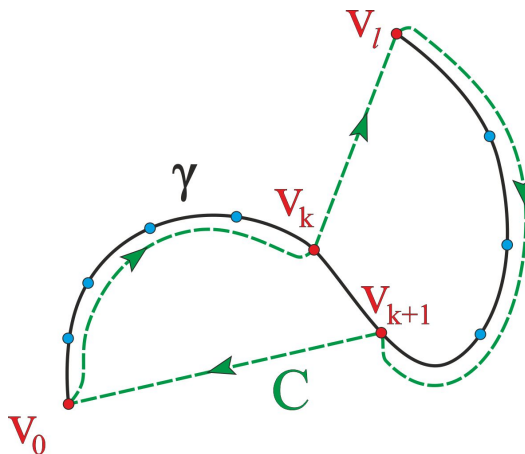


Рис. 1.4: Построение цикла  $C$ .

Докажем теперь, что цикл  $C$  — гамильтонов. Предположим противное, т. е. что существует вершина  $x \in V$ , через которую  $C$  не проходит. Покажем, что  $x$  должна быть смежна с некоторой вершиной  $v_p$  из  $C$ . Действительно, если это не так, то вне цикла  $C$  лежит вершина  $x$  и не менее чем  $n/2$  смежных с  $x$  вершин, т. е. не менее  $n/2 + 1$  вершина. С другой стороны, вершина  $v_0$  и не менее чем  $n/2$  смежных в  $v_0$  вершин лежат в  $C$ , поэтому  $C$  содержит не менее  $n/2 + 1$  вершины. Таким образом, в графе  $G$  содержится не менее  $n + 2 > n$  вершин, противоречие.

Итак,  $x$  и некоторая  $v_p$  смежны, и тогда путь, полученный из  $xv_p \cup C$  выкидыванием любого их двух ребер цикла  $C$ , инцидентных  $v_p$ , будет иметь длину  $\ell + 1$ , что противоречит предположению о максимальной длине  $\ell$ . Полученное противоречие показывает, что такая вершина  $x$  не существует и, значит,  $C$  проходит через все вершины графа  $G$ , т. е.  $C$  — гамильтонов цикл.  $\square$

# Литература к главе 1

- [1] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.
- [2] Graham R.L., Groetschel M., Lovasz L. *Handbook of combinatorics*, Elsevier, 1995, vol. 1.