Упражнения к главе 8

Упражнение 8.1. Пусть W — многоугольник, разрезанный двумя способами, а именно, на многоугольники $F_1, \ldots, F_n$, а также на многоугольники $G_1, \ldots, G_m$. Докажите следующее утверждение: многоугольник W можно разрезать на многоугольники W_i так, что каждый W_i лежит в некотором F_j и G_k. В частности, каждый F_j и G_k разрезается на некоторые из многоугольников W_i.

Упражнение 8.2. Выведите из упражнения 8.1, что из равносоставленности многоугольников A и B, а также многоугольников B и C, вытекает равносоставленность многоугольников A и C. Покажите, что отношение равносоставленности на плоских многоугольниках является эквивалентностью.

Упражнение 8.3. Докажите, что любой плоский многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники (а затем на треугольники).

Упражнение 8.4. Докажите, что любой треугольник равносоставлен с некоторым параллелограммом.

Упражнение 8.5. Докажите, что два параллелограмма, у которых соответственно одинаковы основания и проведенные к ним высоты, равносоставлены.

Упражнение 8.6. Из упражнения 8.5 выведите, что любые два прямоугольника равных площадей равносоставлены.

Упражнение 8.7. Докажите, что конечный набор прямоугольников равносоставлен с любым прямоугольником суммарной площади.

Упражнение 8.8. Докажите теорему Бойяи–Валласа–Гервина.

Упражнение 8.9. Выведите из теоремы Бойяи–Валласа–Гервина, что любая прямоугольная призма равносоставлена с прямоугольным параллелепипедом, а последний равносоставлен с кубом.

Определение 8.37. Пусть W — многогранник с множеством ребер E, и M — некоторое множество вещественных чисел, содержащее длины всех ребер из E. Пусть f — произвольная функция Дена для W, и $g\colon M \to \mathbb{R}$ — произвольная аддитивная функция. Тогда *обобщенным инвариантом Дена многогранника* W, соответствующим паре (f, g), назовем число $\sum_{e \in E} g\big(|e|\big) f(\alpha_e)$, где $|e|$ и α_e — длина ребра e и величина двугранного угла при этом ребре соответственно.

Упражнение 8.10. Докажите, что у равносоставленных многогранников обобщенные инварианты Дена равны.

Упражнение 8.11. Докажите, не пользуясь иррациональностью конкретных чисел, что среди правильных пирамид (основание — правильный многоугольник, а высота попадает в центр основания) имеются неравносоставленные с равновеликим кубом.