Упражнения к главе 6

Упражнение 6.1. Опишите все тройки точек сферы, являющиеся вершинами некоторых сферических треугольников. Сколько различных сферических треугольников могут иметь одни и те же вершины?

Упражнение 6.2. Пусть W — эйлеров сферический треугольник. Тогда в треугольнике W

(1) против равных сторон лежат равные углы;

(2) против равных углов лежат равные стороны;

(3) против большего угла лежит большая сторона;

(4) против большей стороны лежит больший угол.

Упражнение 6.3 (Мнемоническое правило Непера)**.** Пусть W — сферический прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и углами α и β, лежащими напротив катетов a и b соответственно. Положим $\bar{a} = \pi/2 - a$, $\bar{b} = \pi/2 - b$. Под *элементами* W будем понимать его углы α и β, а также его стороны, однако вместо катетов a и b будем рассматривать их "дополнения" $\bar{a}$ и $\bar{b}$ до $\pi/2$. Расположим вдоль окружности элементы W в том порядке, в котором они встречаются при обходе самого W, а именно, в порядке α, c, β, $\bar{a}$, $\bar{b}$. Докажите, что

(1) для трех смежных элементов W косинус среднего элемента равен произведению котангенсов соседних;

(2) для трех несмежных элементов косинус элемента, расположенного отдельно от других двух, равен произведению их синусов.

Упражнение 6.4. Докажите, что плоский многоугольник выпуклый, если и только если все его углы не превосходят π.

Упражнение 6.5. Пусть W_1 и W_2 — плоские выпуклые многоугольники. Предположим, что

(1) многоугольники W_1 и W_2 пересекаются по их общему ребру e;

(2) в каждой концевой точке ребра e суммарный угол этих многоугольников не превосходит π.

Тогда $W_1 \cup W_2$ — выпуклый многоугольник.

Упражнение 6.6. Вокруг всякого ли треугольника на сфере можно описать окружность?

Упражнение 6.7. Во всякий ли треугольник на сфере можно вписать окружность?

Упражнение 6.8. Даны стороны сферического треугольника. Найти радиус описанной окружности.

Упражнение 6.9. Даны стороны сферического треугольника. Найти его высоты.

Упражнение 6.10. Доказать, что для выпуклого сферического n-угольника имеет место равенство

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \pi(n-2) + \frac{S}{r^2},$$

где α_j — его углы, а S — его площадь.