

Упражнения к главе 11

Упражнение 11.1. Докажите, что для любой непрерывной непостоянной периодической функции существует минимальный положительный период. Постройте пример непостоянной периодической функции, для которой не существует минимального положительного периода.

Упражнение 11.2. Докажите, что для любых T -периодической функции $f(x)$ и произвольной функции $g(x)$, определенных на вещественной прямой \mathbb{R} , их композиция $g(f(x))$ является T -периодической функцией.

Упражнение 11.3. Докажите, что производная от дифференцируемой T -периодической функции — тоже T -периодическая функция.

Упражнение 11.4. Постройте регулярную гомотопию

(1) окружности и эллипса;

(2) эллипса и овала $\frac{x_1^4}{a_1^4} + \frac{x_2^4}{a_2^4} = 1$

для соответствующих регулярных параметризаций этих кривых.

Упражнение 11.5. Покажите, что отношение гомотопности является эквивалентностью на каждом рассмотренном выше классе кривых (непрерывных, гладких, регулярных кривых, замкнутых или нет). Покажите также, что возрастающая замена параметра, а также смещение начальной точки в случае замкнутой кривой, приводят к кривым, гомотопным исходной (опять же, в каждом классе рассматриваемых кривых).

Упражнение 11.6. Покажите, что при замене параметра на замкнутой регулярной кривой число вращения или остается тем же, если замена задается возрастающей функцией, или меняет знак, если функция замены убывающая. Покажите также, что при смещении начала замкнутой регулярной кривой число вращения не меняется.

Упражнение 11.7. Проверьте, что переход к натуральному параметру — допустимая замена параметризации замкнутой кривой.

Упражнение 11.8. Для каждого целого n приведите пример плоской замкнутой регулярной кривой с числом вращения, равным n .

Упражнение 11.9. Вычислите число вращения кривой

(1) $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \sin t)$;

(2) $\gamma(t) = (2 \cos t, -\sin t)$;

(3) $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$,

где t меняется на отрезке $[0, 2\pi]$.

Упражнение 11.10. Пусть точка x_0 не лежит на плоской замкнутой кривой $\gamma(t)$, тогда число оборотов вектора $\gamma(t) - x_0$ называется *индексом точки x_0 относительно кривой $\gamma(t)$* . Нарисуйте замкнутые регулярные кривые с числом вращения 1 и 0 и вычислите индексы всех точек плоскости относительно этих кривых.

Упражнение 11.11. Пусть x_0 — точка плоской замкнутой регулярной кривой γ , не являющаяся точкой самопересечения. Круг малого радиуса с центром в точке x_0 делится кривой γ на две области. Докажите, что индексы точек в этих областях относительно кривой γ отличаются на единицу. У каких точек индекс больше?

Упражнение 11.12. Определите замкнутые регулярные кривые на сфере. Докажите, что на сфере любая замкнутая кривая регулярно гомотопна окружности или восьмерке.

Упражнение 11.13. Определите замкнутые регулярные кривые на цилиндре. Определите для них аналог числа вращения. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Уитни — Грауштейна на цилиндре.