

## Глава 9

# Кратчайшие кривые и геодезические

**План.** Геометрические оптимизационные задачи, конфигурационное пространство, целевая функция или вариационный функционал, оптимальные или экстремальные объекты, кратчайшие кривые, кратчайшие в евклидовом пространстве, ломаная, вписанная в кривую, длина ломаной в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , длина кривой в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , функция расстояния, норма, расстояние, соответствующее норме, евклидово расстояние, кратчайшие в нормированном пространстве, манхэттенское пространство, кратчайшие в манхэттенском пространстве, правильные сферические ломаные, кратчайшие на сфере, кратчайшие на многогранниках, гладкие кривые, кратчайшие, вектор скорости гладкой кривой, интегральная формула длины пространственной кривой, геодезические, замкнутые геодезические.

В этой главе мы поговорим о *геометрических оптимизационных задачах*. Общая идея — рассматривается какой-нибудь класс геометрических объектов, обычно называемый *конфигурационным пространством*; каждому объекту приписывается величина, измеряющая степень “совершенства” этого объекта, т.е. сколь хорошо объект подходит в качестве решения той или иной задачи (это соответствие является функцией на конфигурационном пространстве, которая называется обычно *целевой функцией* или *вариационным функционалом*); изучается, какие наименьшие, или наибольшие, или, более общо, критические значения может принимать вариационный функционал и на каких объектах, называемых *оптимальными* или *экстремальными*, эти значения достигаются.

### 9.1 Кратчайшие кривые

В качестве первой оптимизационной задачи, рассмотрим проблему поиска кратчайшего пути. Итак, нам дано некоторое пространство  $\mathcal{S}$ , и в нем — пара точек  $P$  и  $Q$ . В пространстве  $\mathcal{S}$  мы можем проводить кривые и измерять их длины. В качестве конфигурационного пространства рассмотрим какой-нибудь класс кривых, соединяющих  $P$  и  $Q$ , а в качестве вариационного функционала — функцию длины таких кривых. Задача в том, чтобы найти наименьшее значение этого функционала и описать те кривые, на которых это наименьшее значение достигается. Такие кривые называются *кратчайшими*.

Решение этой проблемы существенно зависит от того, где мы ищем кратчайшие пути, т.е. от выбора пространства  $\mathcal{S}$ . Посмотрим некоторые примеры.

#### 9.1.1 Евклидово пространство

Пусть  $\mathcal{S}$  — пространство  $\mathbb{R}^n$  со стандартной функцией расстояния и все кривые — непрерывны.

**Определение 9.1.** Будем говорить, что ломаная  $L$  вписана в кривую  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , если существует такое разбиение  $\xi = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b\}$  отрезка  $[a, b]$ , что  $L = \gamma(t_0)\gamma(t_1) \dots \gamma(t_m)$ . Иногда, чтобы подчеркнуть связь между  $L$  и  $\xi$ , мы будем писать  $L = L_\xi$ .

**Определение 9.2.** Длиной  $|L|$  ломаной  $L = A_0 \dots A_m$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется сумма длин  $|A_{i-1}A_i|$  всех ее ребер:  $|L| = \sum_{i=1}^m |A_{i-1}A_i|$ .

**Определение 9.3.** Длиной  $|\gamma|$  кривой  $\gamma$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется точная верхняя грань длин всех вписанных в кривую ломаных.

**Замечание 9.4.** Обратим особое внимание, что существуют кривые, длина которых равна бесконечности. Например, пусть  $f(t)$  — функция на отрезке  $[0, 1]$  такая, что  $f(0) = 0$ , а при  $t > 0$  имеем  $f(t) = t \sin(1/t)$ . Тогда кривая  $\gamma(t) = (t, f(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , имеет бесконечную длину (проверьте).

Рассмотрим теперь следующую оптимизационную задачу.

**Задача 9.5.** Выберем произвольные точки  $P$  и  $Q$  из  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ . Требуется найти точную нижнюю грань величины  $|\gamma|$  по всем непрерывным кривым  $\gamma$ , соединяющим  $P$  и  $Q$ , и определить, на какой кривой эта величина достигается, если, конечно, такая кривая существует.

Чтобы решить поставленную задачу, мы начнем со следующей простой леммы.

**Лемма 9.6.** Длина  $|L|$  ломаной  $L = A_0 \dots A_m$  не меньше расстояния между ее концами, т.е.  $|L| \geq |A_0 A_m|$ . Более того, если  $|L| = |A_0 A_m|$ , то  $A_0, A_1, \dots, A_m$  — последовательные точки отрезка  $[A_0, A_m]$ .

*Доказательство.* Действительно, по неравенству треугольника, имеем

$$(9.1) \quad \begin{aligned} |L| &= |A_0 A_1| + |A_1 A_2| + |A_2 A_3| + \dots + |A_{m-1} A_m| \geq \\ &\geq |A_0 A_2| + |A_2 A_3| + \dots + |A_{m-1} A_m| \geq |A_0 A_3| + \dots + |A_{m-1} A_m| \geq \dots \\ &\dots \geq |A_0 A_m|. \end{aligned}$$

При этом, равенство  $|L| = |A_0 A_m|$  имеет место тогда и только тогда, когда все неравенства в формуле (9.1) превращаются в равенства. Однако, последнее имеет место в точности тогда, когда каждая последующая точка  $A_i$ ,  $i \geq 2$ , лежит на продолжении отрезка  $A_0 A_{i-1}$  за вершину  $A_{i-1}$ .  $\square$

**Следствие 9.7.** Длина непрерывной кривой не меньше расстояния между ее концами, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда образ кривой — отрезок, а координатные функции монотонны.

*Доказательство.* Пусть  $\gamma$  — непрерывная кривая, соединяющая точки  $P$  и  $Q$ , и пусть  $L = A_0 \dots A_m$ ,  $P = A_0$ ,  $Q = A_m$ , — произвольная ломаная, вписанная в  $\gamma$ . Тогда, по определению длины кривой,  $|\gamma| \geq |L|$  и, значит, по лемме 9.6, имеем  $|\gamma| \geq |PQ|$ . По той же лемме, равенство имеет место тогда и только тогда, когда для любой такой ломаной  $L$  ее вершины являются последовательными точками отрезка  $[P, Q]$ , а это и означает, что образ отображения  $\gamma$  — прямолинейный отрезок, а координатные функции — монотонны.  $\square$

Из следствия 9.7 мгновенно получаем следующий результат.

**Следствие 9.8.** Для любых двух точек  $P$  и  $Q$  пространства  $\mathbb{R}^n$  существует соединяющая их кратчайшая кривая, и каждая такая кривая задает монотонное движение по отрезку  $[P, Q]$ . Таким образом, с точностью до параметризации, точки  $P$  и  $Q$  соединяются единственной кратчайшей кривой, и эта кривая — отрезок  $[P, Q]$ .

**Замечание 9.9.** Легко модифицировать предыдущий пример так, чтобы в полученном пространстве  $\mathcal{S}$  кратчайшая кривая существовала не для любой пары точек. Для этого можно, скажем, выкинуть из  $\mathbb{R}^n$  произвольную точку  $A$ , тогда точки  $P$  и  $Q$ , для которых  $A \in (P, Q)$ , кратчайшей непрерывной кривой соединить нельзя: ведь у каждой такой кривой будет точка, лежащая вне отрезка  $[P, Q]$ , поэтому ее длина будет больше  $|PQ|$ . Осталось заметить, что  $|PQ|$  — это точная нижняя грань длин всех непрерывных кривых на  $\mathbb{R}^n \setminus \{A\}$ , соединяющих  $P$  и  $Q$ .

## 9.1.2 Нормированное пространство

Кроме стандартной функции расстояния на  $\mathbb{R}^n$ , имеется и еще много других. Начнем с общего определения расстояния на произвольном множестве  $X$ .

**Определение 9.10.** Функцией расстояния или метрикой на произвольном множестве  $X$  называется функция  $\rho(x, y)$ , заданная на парах элементов  $x$  и  $y$  из  $X$ , которая

- (1) положительно определена, т.е.  $\rho(x, y) \geq 0$  для любых точек  $x$  и  $y$  из  $X$ , причем  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- (2) симметрична, т.е.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  для любых  $x, y \in X$ ;
- (3) удовлетворяет неравенству треугольника, т.е.  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$  для любых  $x, y, z \in X$ .

Множество  $X$ , на котором задана функция расстояния, называется метрическим пространством.

Один из естественных способов определения расстояния на  $\mathbb{R}^n$  описывается в терминах нормы.

**Определение 9.11.** *Нормой* на пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется такая функция  $\|x\|$  на векторах  $x \in \mathbb{R}^n$ , которая

- (1) *положительно определена*, т.е.  $\|x\| \geq 0$  для любого вектора  $x$ , причем  $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;
- (2) *положительно-однородна*, т.е.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  для любого вектора  $x$  и числа  $\lambda$ ;
- (3) *субаддитивна*, т.е.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых векторов  $x$  и  $y$ .

Пространство  $\mathbb{R}^n$ , на котором задана норма, называется *нормированным*.

Рассмотрим функцию  $\rho(x, y) = \|xy\| = \|x - y\|$  на парах точек из  $\mathbb{R}^n$ , где  $\|\cdot\|$  — некоторая заданная норма. Из свойств нормы легко вытекает, что  $\rho$  — функция расстояния (проверьте).

**Определение 9.12.** *Расстояние на  $\mathbb{R}^n$ , соответствующее норме  $\|\cdot\|$* , — это функция  $\rho(x, y) = \|xy\| = \|x - y\|$ .

**Пример 9.13.** Положим  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , тогда так определенная норма называется *евклидовой* и задает стандартное евклидово расстояние.

Пусть  $\mathcal{S}$  — нормированное пространство  $\mathbb{R}^n$  с функцией расстояния, соответствующей норме  $\|\cdot\|$ ; все кривые — непрерывны; длина  $\|L\|$  ломаной  $L = A_0 \dots A_m$  равна  $\sum_{i=1}^m \|A_{i-1}A_i\|$ ; длина  $\|\gamma\|$  непрерывной кривой  $\gamma$  снова определяется как точная верхняя грань длин вписанных в кривую ломаных. Выберем произвольные точки  $P$  и  $Q$  из  $\mathcal{S}$ .

Следующий результат получается аналогично следствию 9.8.

**Следствие 9.14.** *Для любых двух точек  $P$  и  $Q$  нормированного пространства  $\mathbb{R}^n$  монотонно параметризованный отрезок  $[P, Q]$  является кратчайшей кривой, соединяющей  $P$  и  $Q$ .*

**Замечание 9.15.** Однако теперь кратчайшая кривая не обязана быть единственной с точностью до параметризации. Ниже мы рассмотрим соответствующие примеры.

### 9.1.3 Манхеттенское пространство

**Определение 9.16.** *Манхеттенской нормой на  $\mathbb{R}^n$*  называется функция  $\|(x^1, \dots, x^n)\| = \sum_{i=1}^n |x^i|$ . Соответствующее расстояние  $\rho$  и нормированное пространство также называются *манхеттенскими*.

**Замечание 9.17.** Название нормы и расстояния происходит от названия одного из районов в Нью-Йорке, где основные улицы — стриты и авеню — образуют прямоугольную сетку (основным исключением является Бродвей, пересекающий эту сетку наискосок). Если пешеход двигается по этой сетке дорог, не возвращаясь на уже пройденные стриты и авеню, то он проходит путь, длина которого равна введенному только что расстоянию между концами этого пути.

Из следствия 9.14 вытекает, что каждый отрезок в пространстве с манхеттенской метрикой является кратчайшей кривой. Есть ли другие кратчайшие кривые, образы которых не являются отрезками? Ответ положительный.

**Пример 9.18.** На манхеттенской плоскости  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим точки  $P = (0, 0)$  и  $Q = (1, 1)$ . Пусть  $R = (1, 0)$ . Тогда отрезок  $[P, Q]$  имеет ту же манхеттенскую длину, что и ломаная  $PRQ$ .

Следующее предложение полностью описывает кратчайшие кривые в манхеттенском пространстве.

**Предложение 9.19.** *Пусть  $\gamma = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$  — непрерывная кривая в пространстве с манхеттенской метрикой, соединяющая точки  $P$  и  $Q$ . Тогда  $\gamma$  кратчайшая, если и только если все функции  $\gamma^i(t)$  — монотонные.*

*Доказательство.* Пусть  $L = A_0 \dots A_m$ ,  $P = A_0$ ,  $Q = A_m$ , — произвольная ломаная, вписанная в  $\gamma$ . Для каждой точки  $A \in \mathbb{R}^n$  через  $(A^1, \dots, A^n)$  будем обозначать ее координаты. Тогда  $L^i = A_0^i \dots A_m^i$  — ломаная в одномерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}$ , вписанная в кривую  $\gamma^i(t)$ , которая соединяет точки  $P^i$  и  $Q^i$ . Заметим, что, по определению,  $\|L\| = \sum_{i=1}^n |L^i|$ , где  $|L^i|$  — евклидова длина ломаной  $L^i$ , поэтому  $\|\gamma\| = \sum_{i=1}^n |\gamma^i|$ . Следовательно, кривая  $\gamma$  — кратчайшая, если и только если все кривые  $\gamma^i$  — кратчайшие. По следствию 9.7, кривая  $\gamma^i$  — кратчайшая тогда и только тогда, когда она является монотонной функцией. Это замечание и завершает доказательство.  $\square$

**Замечание 9.20.** Из предложения 9.19 вытекает следующее наблюдение (кривые рассматриваются с точностью до параметризации): если для двух разных  $i$  имеем  $P^i \neq Q^i$ , то точки  $P$  и  $Q$  в манхеттенском пространстве соединяются бесконечным числом кратчайших кривых; в противном случае кратчайшая кривая определена однозначно.

### 9.1.4 Сфера

Выберем теперь в качестве  $\mathcal{S}$  произвольную сферу  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  с центром в  $O$  и радиусом 1. Наша задача — выяснить, как устроены кратчайшие кривые на  $S^2$ .

**Теорема 9.21.** Пусть  $P$  и  $Q$  — произвольные точки на  $S^2$ , тогда кратчайшие кривые на  $S^2$ , соединяющие  $P$  и  $Q$  — это, в точности, все малые сферические отрезки.

Прежде чем доказывать теорему, обсудим некоторые необходимые нам результаты из сферической геометрии.

Пусть  $A_0, \dots, A_n$  — некоторая последовательность различных точек сферы  $S^2$ . Тогда  $A_i$  можно рассматривать как вершины обычной, евклидовой, ломаной  $L$ , соединив последовательные  $A_i$  отрезками. Также можно построить сферическую ломаную  $\Lambda$ , соединив последовательные  $A_i$  сферическими отрезками.

**Определение 9.22.** Сферическую ломаную, все ребра которой — малые сферические отрезки, будем называть *правильной*. Ломаную  $L$  и правильную сферическую ломаную  $\Lambda$  с одной и той же последовательностью вершин будем называть *соответствующими друг другу*.

**Лемма 9.23.** Пусть  $L$  и  $\Lambda$  — соответствующие друг другу евклидова и правильная сферическая ломаные, а  $|L|$  и  $|\Lambda|$  — их длины. Тогда

$$|L| \leq |\Lambda| \leq \frac{\pi}{2}|L|.$$

*Доказательство.* Первое неравенство вытекает из того, что хорда всегда короче дуги, которую она стягивает. Докажем теперь второе неравенство.

Обозначим через  $\ell_i$  длину  $i$ -ого ребра ломаной  $L$ ; через  $\varphi_i$  — длину  $i$ -ого ребра правильной сферической ломаной  $\Lambda$ . Тогда  $\varphi_i/\ell_i = \varphi_i/(2 \sin \frac{\varphi_i}{2})$ . Функция  $f(x) = x/\sin x$  монотонно возрастает на  $(0, \pi/2]$ , поэтому ее максимум равен  $\pi/2$  и, значит,  $\varphi_i/\ell_i \leq \pi/2$ , откуда и вытекает заключение леммы.  $\square$

**Лемма 9.24.** Пусть  $\gamma$  — непрерывная кривая конечной длины на сфере  $S^2$ , тогда ее длина равна точной верхней грани длин правильных сферических ломаных, вписанных в  $\gamma$ .

*Доказательство.* Пусть кривая  $\gamma$  параметризована отрезком  $[a, b]$ , и  $\xi = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$  — какое-нибудь разбиение этого отрезка. Положим  $A_i = \gamma(t_i)$ , и пусть  $\Lambda_\xi$  — вписанная в  $\gamma$  правильная сферическая ломаная с вершинами  $A_i$ . Заметим, что сферическое неравенство треугольника (следствие 6.53) обобщается и на треугольники, составленные из малых сферических отрезков и содержащие диаметрально противоположные вершины, только теперь неравенство становится нестрогим. Таким образом, для всякого подразделения  $\xi' \supset \xi$  отрезка  $[a, b]$  имеем  $|\Lambda_{\xi'}| \geq |\Lambda_\xi|$ .

Так как  $\gamma$  — непрерывное отображение отрезка, оно является равномерно непрерывным, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любых  $a \leq t \leq t' \leq b$ ,  $t' - t < \delta$ , имеем  $|\gamma(t)\gamma(t')| < \varepsilon$ . Отсюда и из леммы 9.23 вытекает, что для любого  $\varepsilon > 0$  и любой правильной сферической ломаной  $\Lambda$ , вписанной в  $\gamma$ , существует такая правильная сферическая ломаная  $\Lambda'$ , также вписанная в  $\gamma$ , для которой  $|\Lambda'| \geq |\Lambda|$  и длины всех ребер  $\Lambda'$  меньше  $\varepsilon$ . Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  точная верхняя грань длин правильных сферических ломаных, вписанных в  $\gamma$ , равна точной верхней грани длин таких ломаных при условии, что рассматриваются только ломаные с ребрами, длина которых меньше  $\varepsilon$ .

Пусть  $L$  и  $\Lambda$  — соответствующие друг другу вписанные в  $\gamma$  евклидова и правильная сферическая ломаные, причем все ребра ломаной  $\Lambda$  короче  $\varepsilon$ . По определению длины непрерывной кривой, имеем  $|L| \leq |\gamma|$ . По лемме 9.23,  $|\Lambda| \leq \frac{\pi}{2}|L| \leq \frac{\pi}{2}|\gamma|$ .

Воспользуемся обозначениями из леммы 9.23. Тогда  $|L| = \sum_i \ell_i$ ,  $|\Lambda| = \sum_i \varphi_i$ . Применяя формулу Тейлора, получим  $\varphi_i - \ell_i = O(\varphi_i^3) \leq C \varphi_i^3$ , где положительную постоянную  $C$  можно выбрать не зависящей от  $i$  (т.е. рассмотреть формулу Тейлора на всем отрезке  $[0, \pi/2]$ ). Поэтому

$$0 < |\Lambda| - |L| \leq \sum_i \varphi_i - \sum_i \ell_i \leq C \sum_i \varphi_i^3 \leq C \varepsilon^2 \sum_i \varphi_i \leq C \varepsilon^2 \frac{\pi}{2} |\gamma|.$$

Так как длина  $|\gamma|$  кривой  $\gamma$  конечна по предположению, то  $|\Lambda| - |L| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , что и завершает доказательство леммы.  $\square$

Практически дословно воспроизводя доказательство леммы 9.6, получаем следующий результат.

**Лемма 9.25.** *Длина малого сферического отрезка, соединяющего концы правильной сферической ломаной  $\Lambda$ , меньше или равна длине  $|\Lambda|$  этой ломаной. Более того, если имеет место равенство, то вершины  $\Lambda$  являются последовательными точками на малом сферическом отрезке, соединяющем концы  $\Lambda$ .*

**Следствие 9.26.** *Для любых точек  $P$  и  $Q$  сферы  $S^2$  существует соединяющая их кратчайшая кривая на  $S^2$ , и каждая такая кривая, с точностью по параметризации, является малым сферическим отрезком. Таким образом, если  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то они соединяются единственной кратчайшей кривой, а если диаметрально противоположны, то таких кривых бесконечно много.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную непрерывную кривую  $\gamma$ , соединяющую  $P$  и  $Q$  и имеющую конечную длину (такие кривые есть, например малый сферический отрезок). Из леммы 9.24 вытекает, что длина  $|\gamma|$  кривой  $\gamma$  не меньше длины любой вписанной в  $\gamma$  правильной сферической ломаной  $\Lambda$ . Из леммы 9.25 следует, что длина  $|\Lambda|$  ломаной  $\Lambda$  не меньше длины каждого малого сферического отрезка, соединяющего концы  $\gamma$ . Таким образом, малый сферический отрезок, соединяющий  $P$  и  $Q$ , действительно является кратчайшей кривой на сфере  $S^2$ .

Покажем, что других кратчайших кривых, кроме малых сферических отрезков, на сфере нет. Пусть  $\gamma$  — отличная от каждого малого сферического отрезка кратчайшая кривая, соединяющая  $P$  и  $Q$ . Тогда на кривой  $\gamma$  существуют такие точки  $R$  и  $T$ , что правильная сферическая ломаная  $\Lambda = PRTQ$  вписана в  $\gamma$  и отлична от каждого малого сферического отрезка  $I$ , соединяющего  $P$  и  $Q$ . По лемме 9.25,  $\Lambda$  длиннее  $I$ . По лемме 9.24, кривая  $\gamma$  не короче  $|\Lambda|$ , тем самым,  $\gamma$  длиннее  $I$ , противоречие.  $\square$

### 9.1.5 Многогранники

Выберем в качестве  $\mathcal{S}$  границу  $\mathcal{F} = \partial W$  многогранника  $W$ . Наша задача — описать свойства кривых на  $\mathcal{F}$ , соединяющих заданные точки  $P$  и  $Q$  и имеющих наименьшую длину среди всех таких кривых.

Начнем с простого наблюдения.

**Предложение 9.27.** *Если отрезок  $[P, Q]$  лежит в  $\mathcal{F}$ , то кратчайшей кривой на  $\mathcal{F}$ , соединяющей  $P$  и  $Q$ , является этот отрезок. Более того, для таких  $P$  и  $Q$  кратчайшая кривая единственна.*

*Доказательство.* Действительно, в силу следствия 9.8, отрезок  $[P, Q]$  является единственной кратчайшей кривой в  $\mathbb{R}^3$ , соединяющей  $P$  и  $Q$ , поэтому любая другая кривая на  $\mathcal{F}$  с концами в  $P$  и  $Q$  длиннее отрезка  $[P, Q]$ .  $\square$

Посмотрим теперь, как устроены кратчайшие кривые на  $\mathcal{F}$  локально, т.е. в маленьких окрестностях своих точек.

**Предложение 9.28.** *Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$  — кратчайшая кривая на  $\mathcal{F}$ , пересекающая некоторое ребро  $e$  многогранника  $W$  во внутренней точке  $R = \gamma(t_0)$  ребра  $e$ , причем  $t_0 \in (a, b)$ . Пусть  $e$  — общее ребро граней  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда существует  $\delta > 0$  такое, что*

- (1)  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$ ;
- (2) ограничения  $\gamma$  на отрезки  $[t_0 - \delta, t_0]$  и  $[t_0, t_0 + \delta]$  представляют собой отрезки, один из которых лежит в  $F_1$ , другой — в  $F_2$ ;
- (3) угол между одним из этих отрезков и лучом, выпущенным из  $R$  в одном из двух направлений ребра  $e$ , равен углу между вторым отрезком и лучом, выпущенным в противоположном направлении (в дальнейшем это свойство будем условно называть “угол падения равен углу преломления”).

*Доказательство.* Рассмотрим шаровую окрестность  $U_\varepsilon(R)$  точки  $R$  радиуса  $\varepsilon$  меньшего, чем расстояние от  $R$  до всех не содержащих  $R$  ребер и граней  $W$ . Из непрерывности  $\gamma$  вытекает, что существует такое  $\delta > 0$ ,  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$ , для которого  $\gamma$  переводит  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  в  $U_\varepsilon(R)$ .

Шар  $U_\varepsilon(R)$  пересекает  $\mathcal{F}$  по двум полукругам, один из которых лежит в  $F_1$ , а другой — в  $F_2$ . Полукруг, лежащий в  $F_i$ , обозначим через  $U_i$ . Используя подходящие движения пространства  $\mathbb{R}^3$ , расположим круги  $U_i$  в одной плоскости  $\pi$  так, чтобы они пересекались по диаметру. Такое расположение кругов  $U_i$  в плоскости  $\pi$

назовем *локальной разверткой* в окрестности точки  $R$ . Ясно, что длина любой кривой на  $\mathcal{F}$ , лежащей в  $U_\varepsilon(R)$ , равна длине ее изображения на развертке. Так как каждый фрагмент кратчайшей кривой укоротить нельзя, этот фрагмент также является кратчайшей кривой, поэтому ограничение  $\gamma$  на  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ , изображенное на развертке, представляет собой отрезок, а рассмотренное на  $\mathcal{F}$  — два отрезка  $[\gamma(t_0 - \delta), R]$  и  $[R, \gamma(t_0 + \delta)]$ , причем один лежит в  $U_1 \subset F_1$ , а другой — в  $U_2 \subset F_2$ . Кроме того, так как на локальной развертке рассматриваемый фрагмент-отрезок образует с диаметром — образом части ребра  $e$  — равные вертикальные углы, выполняется свойство “угол падения равен углу преломления”.  $\square$

Наконец, разберемся, как выглядит кратчайшая кривая в окрестности ее точки, совпадающей с вершиной многогранника.

**Конструкция 9.29.** Пусть  $v$  — произвольная вершина многогранника  $W$ , а  $F_1, \dots, F_k$  — все его грани, содержащие  $v$  и упорядоченные в соответствии с одним из обходов вокруг вершины  $v$ . Для удобства изложения, положим  $F_{k+i} = F_i$  при каждом целом  $i$ , и обозначим через  $e_i$  ребро многогранника  $W$ , выходящее из  $v$  и являющееся общим для граней  $F_{i-1}$  и  $F_i$ . Отметим, что ребра  $e_i$  и  $e_{i+1}$  принадлежат грани  $F_i$ . Угол многоугольника  $F_i$  при вершине  $v$ , т.е. между сторонами  $e_i$  и  $e_{i+1}$ , обозначим через  $\alpha_i$ .

Выберем в гранях  $F_p$  и  $F_q$  произвольные точки  $x_p$  и  $x_q$ , отличные от  $v$ . Обозначим через  $\alpha_{p,m}$ ,  $m \in \{p, p+1\}$ , угол при вершине  $v$  между отрезками  $e_m$  и  $[v, x_p]$ ; аналогично, обозначим через  $\alpha_{q,m}$ ,  $m \in \{q, q+1\}$ , угол при вершине  $v$  между отрезками  $e_m$  и  $[v, x_q]$ . Отметим, что некоторые из этих углов могут вырождаться, т.е. быть равными нулю.

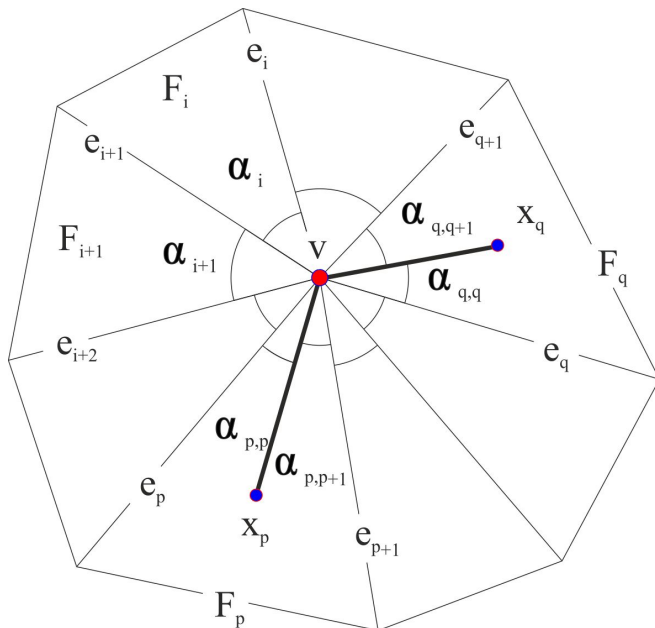


Рис. 9.1: Угол между отрезками, выходящими из вершины многогранника.

Пусть  $B_\varepsilon(v)$  — замкнутый шар с центром в  $v$  радиуса  $\varepsilon$ , выбранного меньшим расстояния от  $v$  до всех вершин, ребер и граней многогранника  $W$ , не содержащих  $v$ , а также до точек  $x_p$  и  $x_q$ . Тогда отрезки  $[v, x_p]$  и  $[v, x_q]$  разбивают  $B_\varepsilon(v) \cap \mathcal{F}$  на две компоненты  $K_1$  и  $K_2$  (по аналогии с тем, как два радиуса разбивают круг). Каждая из этих компонент представляет собой объединение секторов.

**Определение 9.30.** В сделанных выше обозначениях, сумма величин углов секторов, составляющих компоненту  $K_i$ , называется *углом между  $[v, x_p]$  и  $[v, x_q]$  на границе  $\mathcal{F}$  многогранника  $W$* .

Таким образом, если отрезки  $[v, x_p]$  и  $[v, x_q]$  различны, то они определяют два угла.

Имеет место следующий очевидный результат.

**Лемма 9.31.** В сделанных выше обозначениях, углы на поверхности  $\mathcal{F}$  многогранника  $W$  между отрезками  $[v, x_p]$  и  $[v, x_q]$  равны

$$\alpha_{p,p+1} + \sum_{i=p+1}^{q-1} \alpha_i + \alpha_{q,q} \quad \text{и} \quad \alpha_{q,q+1} + \sum_{i=q+1}^{p-1} \alpha_i + \alpha_{p,p}.$$

**Предложение 9.32.** Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  — кратчайшая кривая на границе  $\mathcal{F}$  многогранника  $W$ . Предположим, что для некоторого  $t_0 \in (a, b)$  точка  $\gamma(t_0)$  является вершиной многогранника  $W$ . Выберем настолько маленькое  $\delta$ , чтобы  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$  и ограничения  $\gamma$  на отрезки  $[t_0 - \delta, t_0]$  и  $[t_0, t_0 + \delta]$  лежали в некоторых гранях многогранника  $W$  и, значит, являлись бы отрезками. Тогда каждый из двух углов на многограннике  $W$  между этими отрезками больше или равен  $\pi$ , в частности, кривизна  $K(v)$  в такой вершине  $v$  неположительна.

*Доказательство.* Пусть это не так, тогда угол, составленный из секторов  $S_i$  одной из компонент  $K_j$ , скажем  $K_1$ , меньше  $\pi$ . С помощью подходящих движений выложим секторы  $S_i$  на плоскости так, чтобы соседние секторы пересекались по радиусу (аналог локальной развертки). Тогда объединение этих секторов — сектор величины меньше  $\pi$ , заключенный между образами частей  $[O', A]$  и  $[O', B]$  отрезков  $[\gamma(t_0 - \delta), \gamma(t_0)]$  и  $[\gamma(t_0), \gamma(t_0 + \delta)]$ , где  $O'$  — центр полученного “большого” сектора. Но тогда длина хорды  $[A, B]$  этого сектора меньше, чем  $|O'A| + |O'B|$ , поэтому, заменяя в  $\gamma$  прообразы отрезков  $[O', A]$  и  $[O', B]$  на прообраз сектора  $[A, B]$ , мы укоротим  $\gamma$ , противоречие.  $\square$

**Следствие 9.33.** На выпуклом многограннике кратчайшие кривые не проходят через вершины.

### 9.1.6 Интегральная формула длины пространственной кривой

**Определение 9.34.** Кривая  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  в  $\mathbb{R}^n$  называется *гладкой*, если функции  $x_i(t)$  непрерывно дифференцируемы бесконечное число раз.

**Замечание 9.35.** Часто гладкость понимают в более слабом смысле, требуя, чтобы функции были непрерывно дифференцируемы столько раз, сколько достаточно для решения конкретной задачи.

**Определение 9.36.** Вектором скорости  $\dot{\gamma}(t)$  гладкой кривой

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

вычисленным в точке  $t$ , называется вектор  $(\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ , составленный из производных координатных функций  $x_i(t)$ .

Заметим, что длина  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  вектора скорости в евклидовом пространстве, по определению, равна  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2(t)}$ , поэтому  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  является непрерывной функцией и, значит, для нее определен интеграл  $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ .

**Теорема 9.37.** Пусть  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  в  $\mathbb{R}^n$  — гладкая кривая, тогда ее длина может быть вычислена по формуле

$$|\gamma| = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Эта теорема доказывается в курсе математического анализа. Мы же будем заниматься различными ее применениями.

**Пример 9.38.** Проверим теорему 9.37 на примерах некоторых известных кривых.

- Пусть  $\gamma(t) = P + (Q - P)t$ ,  $t \in [0, 1]$ , — кривая, задающая отрезок  $[P, Q]$ . Тогда  $\dot{\gamma}(t) = Q - P$  и  $|\gamma| = \int_0^1 \|Q - P\| dt = \|Q - P\|$ .
- Пусть  $\gamma(t) = (O_1, O_2) + r(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , — кривая, задающая окружность с центром в  $(O_1, O_2)$  и радиусом  $r$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Тогда  $\dot{\gamma}(t) = r(-\sin t, \cos t)$ , откуда  $|\gamma| = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$ .

### 9.1.7 Прямой круговой цилиндр

Пусть  $x, y, z$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^3$ . Рассмотрим прямую  $\ell(z) = (1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , и пусть  $\mathcal{C}$  обозначает цилиндр, полученный вращением этой прямой вокруг оси  $z$ . Обозначая через  $\varphi$  угол поворота, найдем, что точки цилиндра  $\mathcal{C}$  могут быть заданы в виде  $(\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ . Это представление определяет отображение  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ .

**Лемма 9.39.** Пусть  $\delta(t) = (\varphi(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , — гладкая кривая на декартовой плоскости с координатами  $\varphi, z, u$

$$\gamma(t) = f(\delta(t)) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t), z(t))$$

— соответствующая кривая на цилиндре  $\mathcal{C}$ . Тогда длины этих кривых одинаковы.

*Доказательство.* Используем теорему 9.37. С одной стороны,

$$|\delta| = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

С другой стороны,  $\dot{\gamma}(t) = (-\sin \varphi(t) \dot{\varphi}(t), \cos \varphi(t) \dot{\varphi}(t), \dot{z}(t))$ , поэтому

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{\sin^2 \varphi(t) \dot{\varphi}^2(t) + \cos^2 \varphi(t) \dot{\varphi}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt,$$

что и требовалось.  $\square$

**Замечание 9.40.** Лемма 9.39 интуитивно очевидна, если представить плоскость в виде “бесконечного” листа бумаги, который мы, с помощью отображения  $f$ , наматываем на цилиндр. При этом, естественно, длины кривых сохраняются, если представлять кривые как нити, приклеенные к листу бумаги.

**Следствие 9.41.** Пусть  $\delta(t) = (\varphi(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , — гладкая кривая на декартовой плоскости с координатами  $\varphi, z, u$

$$\gamma(t) = f(\delta(t)) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t), z(t))$$

— соответствующая кривая на цилиндре  $\mathcal{C}$ . Предположим, что  $\gamma$  — кратчайшая кривая. Тогда  $\delta$  — отрезок (точнее, монотонная параметризация отрезка).

*Доказательство.* Если это не так, то существует кривая  $\bar{\delta}(t)$ , соединяющая концы кривой  $\delta$  и такая, что  $|\bar{\delta}| < |\delta|$ . Положим  $\bar{\gamma}(t) = f(\bar{\delta}(t))$ , тогда  $\bar{\gamma}$  — кривая на  $\mathcal{C}$ , соединяющая концы кривой  $\gamma$ . По лемме 9.39, имеем  $|\bar{\gamma}| < |\gamma|$ , противоречие с тем, что  $\gamma$  — кратчайшая кривая.  $\square$

**Замечание 9.42.** Отметим, что кратчайшие кривые мы искали среди гладких кривых. Однако, из наших рассуждений не вытекает, как устроены кратчайшие кривые в классе *всех непрерывных* кривых на цилиндре (на самом деле, ответ не изменится; проверьте).

## 9.2 Геодезические

Локально кратчайшие кривые, т.е. такие кривые, у которых малые фрагменты являются кратчайшими, называются геодезическими. Дадим соответствующее определение.

**Определение 9.43.** Кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$  в объемлющем пространстве  $\mathcal{S}$  называется *геодезической*, если для любого  $t \in [a, b]$  существует такое  $\varepsilon > 0$  (зависящее, вообще говоря, от  $t$ ), что ограничение  $\gamma$  на отрезок  $[a, b] \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  является кратчайшей кривой.

**Пример 9.44.** Геодезическими в евклидовом пространстве являются отрезки прямых и только они. Тем самым, множество геодезических в этом случае совпадает с множеством кратчайших кривых.

**Пример 9.45.** В манхэттенском пространстве существуют геодезические, не являющиеся кратчайшими кривыми. В качестве примера можно рассмотреть “букву П”, стороны которой параллельны координатным осям. Более того, добавив еще ряд “поворотов” к букве П, можно превратить ее в геодезическую спираль, у которой могут быть даже самопересечения.



**Пример 9.46.** На сфере каждая геодезическая — это движение по некоторой сферической прямой. При этом допускается многократный проход сферической прямой, тем самым, здесь также возможны самопересечения.

**Пример 9.47.** На выпуклом многограннике кривая  $\gamma$  является геодезической, если и только если в каждой грани она — отрезок прямой, в каждой внутренней точке ребра многогранника, через которую проходит  $\gamma$ , выполняется закон “угол падения равен углу преломления”, и  $\gamma$  не проходит через вершины. Если многогранник невыпуклый, то геодезическая может проходить через вершины, и тогда в каждой такой вершине оба угла между выходящими из нее отрезками геодезической больше или равны  $\pi$ .

**Конструкция 9.48.** Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$  — замкнутая кривая и  $\varepsilon > 0$ . Зададим отображение  $\gamma^\varepsilon: [a, b + \varepsilon] \rightarrow \mathcal{S}$ , положив  $\gamma^\varepsilon(t) = \gamma(t)$  при  $t \leq b$  и  $\gamma^\varepsilon(t) = \gamma(a + (t - b))$  при  $t \geq b$ . Ясно, что  $\gamma^\varepsilon$  — непрерывная кривая, совпадающая на  $[a, b]$  с исходной кривой  $\gamma$ , а при  $t > b$  продолжающая движение по  $\gamma$ .

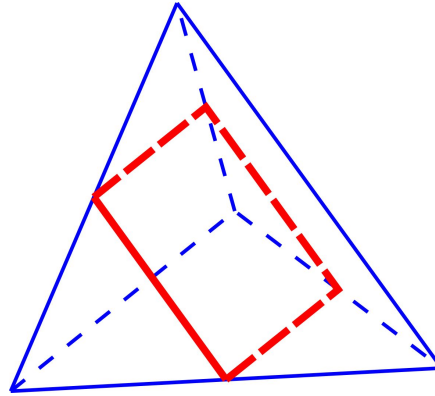


Рис. 9.2: Замкнутая геодезическая без самопересечений на тетраэдре.

**Определение 9.49.** Замкнутая кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$  в объемлющем пространстве  $\mathcal{S}$  называется *замкнутой геодезической*, если для некоторого  $\varepsilon > 0$  кривая  $\gamma^\varepsilon$  — геодезическая.

**Пример 9.50.** На сфере замкнутые геодезические без самопересечений — это все сферические прямые.

**Пример 9.51.** На рассмотренном выше прямом круговом цилиндре замкнутые геодезические без самопересечений — это все окружности, параллельные плоскости  $xy$ .

На границах многогранников замкнутые геодезические без самопересечений описаны в очень немногих случаях. Г. Гальперин (см. [4]. [5]) показал, что на случайно взятом выпуклом многограннике таких геодезических нет. В статье [6] разбирается случай тетраэдров. В [7] приведены интересные задачи о замкнутых геодезических на многогранниках. Некоторые из них мы включили в упражнения.

## Литература к главе 9

- [1] Shephard G.C. *Convex Polytopes with Convex Nets*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, v. 78, p. 389–403.
- [2] Wikipedia, Открытые математические проблемы.
- [3] Bern M., Demaine E.D., Eppstein D., and Kuo E. *Ununfoldable Polyhedra*. Proc. 11th Canadian Conference on Computational Geometry, 1999, pp. 13-16. Preprint dated 3 Aug 1999 available from <http://arxiv.org/abs/cs.CG/9908003>.
- [4] Гальперин Г.А. *О теореме Люстерника–Шнирельмана для многогранников*. УМН, 1991, т. 46, N 6(282), с. 207–208.
- [5] Galperin G. *Convex polyhedra without simple closed geodesics*. Regular and chaotic dynamics, 2003, v. 8, N 1, p.45-58.
- [6] Протасов В.Ю. *Замкнутые геодезические на поверхности симплекса*. Матем. сб., 2007, т. 198, N 2, с. 103–120.
- [7] <http://www.mcsme.ru/mmks/mar08/Poincare.pdf>
- [8] Люстерник Л.А. *Кратчайшие линии. Вариационные задачи*. М.: Гостехиздат, 1955, Серия: Популярные лекции по математике, выпуск 19.