Глава 8

Равновеликость и равносоставленность. Третья проблема Гильберта

План. Площади и объемы, их инвариантность и аддитивность, разрезание многоугольников, равносоставленные многоугольники, равновеликие многоугольники, двумерный случай: теорема Бойяи–Валласа–Гервина, разрезание многогранников, равносоставленные многогранники, равновеликие многогранники, третья проблема Гильберта, зависимость на множестве вещественных чисел, аддитивная функция, функция Дена многогранника, инвариант Дена, теорема Дена, тетраэдр Хилла, равнодополняемые многогранники, координатный тетраэдр, решение Третьей проблемы Гильберта, теорема Дена–Сидлера.

Проблемы, обсуждаемые в этой главе, имеют непосредственное отношение к вычислению площадей и объемов. Известное из курса математического анализа определение этих понятий, основанное на предельном переходе, часто приводит к сложным вычислениям, сводящимся фактически к взятию соответствующего интеграла. Однако в некоторых случаях вычисления можно существенно упростить, если воспользоваться следующими соображениями (мы сформулируем их для плоского случая; пространственный случай получается заменой слова "площадь" на слово "объем"): (1) площади равных фигур одинаковы (инвариантность площади); (2) если фигура F представлена в виде объединения конечного числа фигур $F_1, \ldots, F_n$, не имеющих общих внутренних точек, то площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_i (аддитивность площади). Таким образом, если для фигур F и G заданы такие представления с помощью фигур $F_1, \ldots, F_n$ и $G_1, \ldots, G_n$ соответственно, и при каждом i фигуры F_i и G_i равны, то F и G имеют одинаковые площади.

Хорошо известный пример применения изложенной идеи — вычисление площади параллелограмма через площадь прямоугольника, а также площади треугольника через площадь параллелограмма. Еще одно приложение техники, основанной на описанном выше представлении многоугольников, — доказательство теоремы Пифагора, рис. 8.1.

Отметим, что для многоугольников F в качестве фигур F_i принято также рассматривать многоугольники. Приведем теперь необходимые формальные определения.

Определение 8.1. Пусть F и $F_1, \ldots, F_n$ — многоугольники, для которых выполняются следующие условия:

(1) при каждом i и $j \neq i$ многоугольники F_i и F_j не имеют общих внутренних точек;

(2) $F = \cup_{i=1}^{n} F_i$.

Тогда говорят, что F *разрезан на многоугольники* F_i.

Определение 8.2. Пусть F и G — два многоугольника. Если F и G можно так разрезать на многоугольники $F_1, \ldots, F_n$ и $G_1, \ldots, G_n$ соответственно, что при каждом $i = 1, \ldots, n$ многоугольники F_i и G_i равны, то F и G называются *равносоставленными*.

Определение 8.3. Многоугольники F и G называются *равновеликими*, если их площади равны.

Как уже отмечалось, равносоставленные многоугольники равновелики. Верно ли обратное? Замечательно, что ответ положительный. Соответствующий результат называется *теоремой Бойяи–Валласа–Гервина.*

Теорема 8.4 (Бойяи, Валлас, Гервин [3]). *Два многоугольника равновелики в том и только том случае, когда они равносоставлены.*

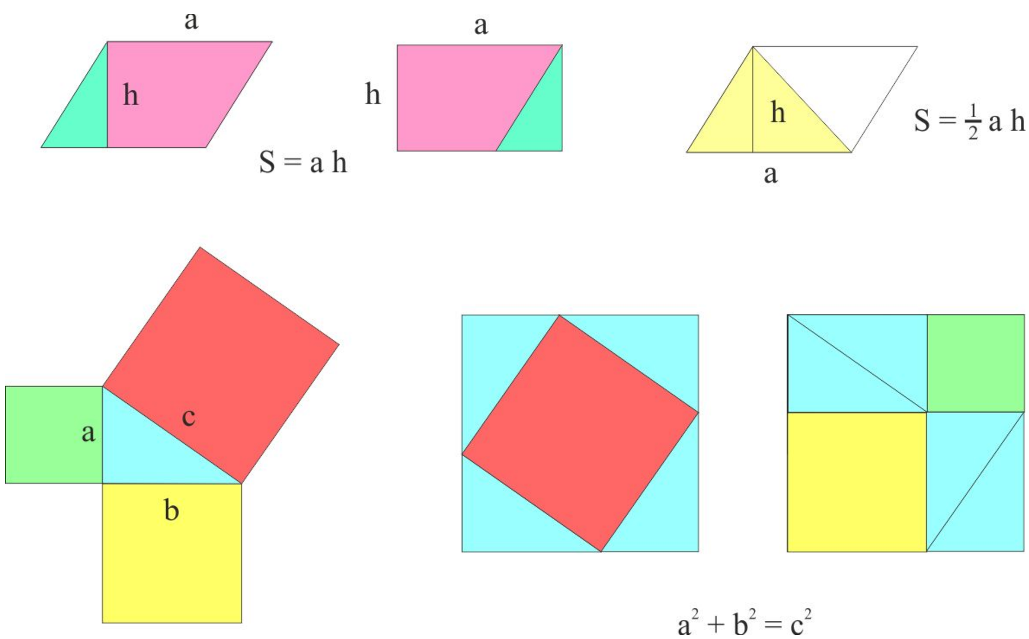

Рис. 8.1: Простейшие применения идеи равносоставленности.

Замечание 8.5. Бойяи (Farkas Bolyai) в 1790 году сформулировал проблему, Валлас (William Wallace) решил ее в 1807 году, Гервин (Paul Gerwien) решил ее вновь в 1833 году, и, наконец, Бойяи, не зная о существовании этих решений, дал свое в 1835 году, см. [1].

Следующий шаг — попробовать обобщить полученные результаты на многогранники. Начнем с соответствующих определений (дословно повторяющих определения 8.1, 8.2 и 8.3 с заменой слов "многоугольник" на "многогранник" и "площадь" на "объем").

Определение 8.6. Пусть W и $W_1, \dots, W_n$ — многогранники, для которых выполняются следующие условия:

(1) при каждом i и $j \neq i$ многогранники W_i и W_j не имеют общих внутренних точек;

(2) $W = \cup_{i=1}^n W_i$.

Тогда говорят, что W *разрезан на многогранники* W_i.

Определение 8.7. Пусть A и B — два многогранника. Если A и B можно так разрезать на многогранники $A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_n$ соответственно, что при каждом $i = 1, \dots, n$ многогранники A_i и B_i равны, то A и B называются *равносоставленными*.

Определение 8.8. Многогранники A и B называются *равновеликими*, если их объемы равны.

Верно ли, что равновеликие многогранники равносоставлены? Ответ на этот вопрос оказался отрицательным, что было показано Деном [2], построившим специальные функции от длин ребер и величин двугранных углов многогранника, которые не меняются при замене многогранника на любой другой, равносоставленный с ним. Такие функции называются теперь *инвариантами Дена*. Оказалось, что для куба и равновеликого ему правильного тетраэдра можно построить такой инвариант Дена, который на кубе и на правильном тетраэдре принимает разные значения, поэтому такие куб и тетраэдр не равносоставлены. Более того, можно показать, что они также и не *равнодополняемы*, т.е. не могут быть дополнены равными многогранниками до равных и даже до равносоставленных многогранников. Кроме того, инварианты Дена позволили доказать существование тетраэдров с равными основаниями и равными высотами, которые не являются равнодополняемыми (в частности, равносоставленными). Таким образом, была решена *третья проблема Гильберта*, в которой поднимался вопрос о существовании таких тетраэдров.

Отметим, что инварианты Дена и сама его работа [2] были трудны для понимания. Ряд математиков упростили доказательство Дена (см. историю вопроса в [3]). Возможно, наиболее простой подход к равносоставленности изложен в [4]. Именно его мы и будем обсуждать. Материалы этой главы частично опираются на [3] и на [5].

8.1 Критерий равносоставленности многогранников

В этом параграфе мы определим инварианты Дена и покажем, как можно их использовать для ответа на вопрос о том, являются ли данные многогранники равносоставленными.

Определение 8.9. Пусть M — какое-нибудь множество вещественных чисел. Каждое соотношение $n_1x_1+\cdots+n_kx_k=0$, где $x_i\in M$, а n_i — целые числа, будем называть *зависимостью на* M. Функцию $f\colon M\to\mathbb{R}$ будем называть *аддитивной*, если она “уважает” зависимости, т.е. для каждой зависимости $n_1x_1+\cdots+n_kx_k=0$ на M выполняется $n_1f(x_1)+\cdots+n_kf(x_k)=0$.

Конструкция 8.10. Пусть W — некоторый многогранник, и E — множество его ребер. Для каждого $e\in E$ через $|e|$ обозначим длину ребра e, а через α_e — величину двугранного угла многогранника W при этом ребре. Положим $\alpha(W)=\{\alpha_e : e\in E\}$ и пусть M — произвольное множество вещественных чисел, содержащее $\alpha(W)$ и число π.

Определение 8.11. Во введенных выше обозначениях, каждую аддитивную функцию $f\colon M\to\mathbb{R}$, для которой $f(\pi)=0$, будем называть *функцией Дена многогранника* W, а число $f(W)=\sum_{e\in E}|e|\,f(\alpha_e)$ — *инвариантом Дена*, отвечающим f.

Замечание 8.12. Если множество M содержит π и все множества $\alpha(W_i)$, где $W_1,\ldots,W_k$ — некоторое семейство многогранников, то аддитивная функция $f\colon M\to\mathbb{R}$, зануляющаяся на π, является функцией Дена одновременно для всех W_i.

Теорема 8.13. *Пусть A и B — равносоставленные многогранники, а f — произвольная функция Дена для A и B. Тогда $f(A)=f(B)$.*

Прежде, чем доказывать эту теорему, приведем некоторые ее следствия. В частности, покажем, как с ее помощью решается третья проблема Гильберта.

8.2 Примеры вычисления инвариантов Дена

Предложение 8.14. *Каждый инвариант Дена для куба равен нулю.*

Доказательство. Обозначим рассматриваемый куб через K, и пусть a — длина его стороны. Пусть f — произвольная функция Дена для куба K. Так как все двугранные углы куба равны $\pi/2$, и $2\cdot\pi/2-\pi=0$ — зависимость, имеем $0=2f(\pi/2)-f(\pi)=2f(\pi/2)$. Следовательно, $f(K)=\sum_{i=1}^{12}a\cdot f(\pi/2)=0$. □

Предложение 8.15. *Каждый инвариант Дена для призмы равен нулю.*

Доказательство. Обозначим рассматриваемую призму через P. Пусть f — произвольная функция Дена для этой призмы. Обозначим через $e_1,\ldots,e_n$ ребра нижнего основания призмы P, через $e'_1,\ldots,e'_n$ — соответствующие ребра верхнего основания призмы, и через $h_1,\ldots,h_n$ — боковые ребра призмы P. Тогда при каждом i выполняется $|e_i|=|e'_i|$ и $\alpha_{e_i}+\alpha_{e'_i}=\pi$. Кроме того, $|h_1|=\cdots=|h_n|$ и $\sum_i\alpha_{h_i}=\pi(n-2)$ (плоское сечение соответствующего призме цилиндра, перпендикулярное образующим, является плоским n-угольником). Отсюда вытекает, что

$$0=f(\alpha_{e_i})+f(\alpha_{e'_i})-f(\pi)=f(\alpha_{e_i})+f(\alpha_{e'_i}),\quad 0=\sum_i f(\alpha_{h_i})-(n-2)f(\pi)=\sum_i f(\alpha_{h_i}).$$

Используем приведенные только что формулы для вычисления $f(P)$:

$$f(P)=\sum_{i=1}^n|e_i|f(\alpha_{e_i})+\sum_{i=1}^n|e'_i|f(\alpha_{e'_i})+\sum_{i=1}^n|h_i|f(\alpha_{h_i})=\sum_{i=1}^n|e_i|\big(f(\alpha_{e_i})+f(\alpha_{e'_i})\big)+|h_1|\sum_{i=1}^n f(\alpha_{h_i})=0.$$

□

8.3 Некоторые следствия из теоремы Дена

Следствие 8.16. *Правильный тетраэдр и куб не равносоставлены.*

Доказательство. Легко видеть, что все двугранные углы α правильного тетраэдра равны $\arccos(1/3)$. У куба двугранные углы равны $\pi/2$. Зададим на множестве $\{\alpha, \pi/2, \pi\}$ функцию f, положив $f(\alpha) = 1$, $f(\pi/2) = 0$ и $f(\pi) = 0$. Покажем, что f — функция Дена. Так как $f(\pi) = 0$, достаточно доказать аддитивность f.

Рассмотрим произвольную зависимость $n_1\alpha + n_2\pi/2 + n_3\pi = 0$. Докажем, что $n_1 = 0$. Действительно, если это не так, то α/π — рациональное число. Следующая лемма говорит о том, что такого быть не может.

Лемма 8.17. *Число* $\frac{1}{\pi}\arccos(1/3)$ *— иррационально.*

Доказательство. Положим $\alpha = \arccos(1/3)$ и покажем, что $\cos(k\alpha)$ при всех натуральных k имеет вид $a_k/3^k$, где a_k — целое, не делящееся на 3. Доказательство проведем индукцией по k. Для $k = 1$ это так. Для $k = 2$ это тоже так в силу того, что $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = -7/9$. Предположим, что утверждение доказано для всех $k < n$, где $n \geq 3$. Тогда

$$\cos(n\alpha) + \cos\big((n-2)\alpha\big) = 2\cos\big((n-1)\alpha\big)\cos\alpha = 2a_{n-1}/3^n,$$

откуда $\cos(n\alpha) = 2a_{n-1}/3^n - a_{n-2}/3^{n-2} = (2a_{n-1} - 9a_{n-2})/3^n$. Осталось заметить, что числитель не делится на 3, так как a_{n-1} не делится на 3 по предположению.

Покажем теперь, что α/π иррационально. Предположим противное, т.е. $\alpha = \frac{p}{q}\pi$, где $p \neq 0$ и $q > 0$ — целые числа, тогда $\cos(q\alpha) = \pm 1$, чего не может быть в силу того, что мы доказали выше. □

Итак, в каждой зависимости $n_1 = 0$, поэтому осталось проверить, что если $n_2\pi/2 + n_3\pi = 0$, то $n_2 f(\pi/2) + n_3 f(\pi) = 0$. Однако это так по определению функции f.

Вычислим теперь инварианты Дена, соответствующие функции f. По предложению 8.14, каждый инвариант Дена для куба равен нулю. Пусть T — рассматриваемый правильный тетраэдр, и a — длина его стороны. Тогда $f(T) = \sum_{i=1}^{6} a\, f(\alpha) = 6a \neq 0$, поэтому, в силу теоремы 8.13, тетраэдр T и куб не равносоставлены. □

Конструкция 8.18. Рассмотрим тетраэдр T_1, основание которого — равнобедренный прямоугольный треугольник, а высота равна катету основания и падает в один из концов гипотенузы основания, см. рис. 8.2, слева.

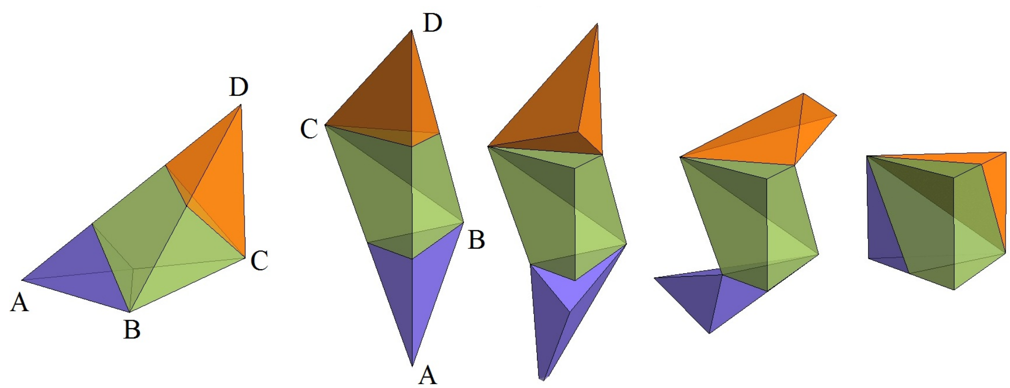

Рис. 8.2: Тетраэдр Хилла равносоставлен с прямоугольной призмой.

Определение 8.19. Многогранник T_1 называется *тетраэдром Хилла*.

Предложение 8.20. *Тетраэдр Хилла равносоставлен с некоторой призмой.*

Доказательство. Разрезание тетраэдра Хилла на три части, из которых составляется прямоугольника призма, также представлено на рис. 8.2 (отметим, что у Хилла было другое разбиение). Преобразование тетраэдра Хилла в прямоугольную призму можно хорошо изучить с помощью презентации, подготовленной в пакете Mathematica [8]. □

Следствие 8.21. *Каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю.*

Доказательство. Из предложения 8.20 и теоремы 8.13 вытекает, что у тетраэдра Хилла каждый инвариант Дена — такой же, как и у призмы. Следовательно, по предложению 8.15, каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю. □

8.4 Доказательство теоремы Дена

На понадобится следующий технический результат.

Предложение 8.22. *Пусть M — множество вещественных чисел и $x \in \mathbb{R}$. Тогда каждая аддитивная функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ продолжается до некоторой аддитивной функции на $M \cup \{x\}$.*

Доказательство. Если $x \in M$, то функцию f менять не будем. Пусть теперь $x \notin M$.

Если в каждую зависимость элементов множества $M \cup \{x\}$ число x входит с нулевым коэффициентом, то при любом значении $f(x)$ продолженная функция f уважает все зависимости (так как они являются зависимостями на M).

Пусть теперь для некоторых целых n_i и $n \neq 0$, а также вещественных $x_i \in M$, имеем $n\,x + \sum n_i x_i = 0$. Положим $f(x) = -\frac{\sum n_i f(x_i)}{n}$ и покажем, что так продолженная f является аддитивной. Последнее означает, что для любой зависимости $m\,x + \sum m_j y_j = 0$ должно иметь место $m\,f(x) + \sum m_j f(y_j) = 0$. Докажем, что это так и есть. Для этого заметим, что $m \sum n_i x_i - n \sum m_j y_j = 0$ — зависимость на M, поэтому $m \sum n_i f(x_i) - n \sum m_j f(y_j) = 0$, откуда

$$m\,f(x) + \sum m_j f(y_j) = \frac{-m \sum n_i f(x_i) + n \sum m_j f(y_j)}{n} = 0.$$

□

Следствие 8.23. *Пусть W — некоторый многогранник и f — его функция Дена. Рассмотрим произвольные многогранники $W_1, \dots, W_n$. Тогда f продолжается до функции Дена для всех многогранников W_i.*

Доказательство. Будем расширять область определения функции f, последовательно добавляя величины двугранных углов многогранников W_i и продолжая f до аддитивной функции, что можно сделать в силу предложения 8.22. □

Пример 8.24. Покажем, как работает следствие 8.23.

Следствие 8.25. *Тетраэдр Хилла и правильный тетраэдр не равносоставлены.*

Доказательство. Пусть f — функция Дена, построенная в доказательстве следствия 8.16. Тогда ее значение на правильном тетраэдре отлично от нуля. Продолжим f до функции Дена для тетраэдра Хилла, что можно сделать в силу следствия 8.23. По следствию 8.21, значение f на тетраэдре Хилла равно нулю. Поэтому, в силу теоремы 8.13, рассматриваемые тетраэдры не равносоставлены. □

В формулировке приводимого ниже предложения также используется следствие 8.23.

Предложение 8.26 (аддитивность инварианта Дена)**.** *Пусть W — произвольный многогранник, разбитый на многогранники $W_1, \dots, W_n$, и f — некоторая функция Дена для W. Обозначим той же буквой произвольное продолжение f до функции Дена для всех многогранников $W_1, \dots, W_n$. Тогда $f(W) = \sum_{i=1}^n f(W_i)$.*

Доказательство. Пусть e — ребро многогранника W или одного из многогранников W_i. Рассмотрим все вершины этих многогранников, попавшие на e, а также все точки пересечения ребра e с другими ребрами этих многогранников. Тогда ребро e разобьется этими точками на отрезки, которые будем называть *звеньями.*

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех звеньев, каждое из которых лежит в некотором ребре многогранника W. Покажем, что

$$f(W) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon). \tag{8.1}$$

Действительно, ребро e многогранника W дает вклад $|e|\, f(\alpha_e)$ в левую часть формулы (8.1), т.е. в $f(W)$, а все звенья $\varepsilon \in \mathcal{E}$, лежащие в e, дают вклад в правую часть формулы (8.1), равный $\sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon|\, f(\alpha_e) = |e|\, f(\alpha_e)$.

Покажем теперь, что величина $\sum_{i=1}^{n} f(W_i)$ равна правой части формулы 8.1. Для этого рассмотрим сначала все звенья, не попавшие в $\mathcal{E}$, и покажем, что они дают нулевой вклад в величину $\sum_{i=1}^{n} f(W_i)$. Действительно, они могут быть двух типов: (1) звенья, лежащие в гранях многогранника W, и (2) звенья, внутренности которых лежат внутри многогранника W.

Пусть ε — звено первого типа, и пусть $W_{i_1}, \dots, W_{i_k}$ — все многогранники W_i, в ребрах которых лежит ε. Обозначим через α_{i_j} двугранный угол в многограннике W_{i_j} при звене ε, тогда $\sum_j \alpha_{i_j} = \pi$, поэтому $0 = \sum_j f(\alpha_{i_j}) - f(\pi) = \sum_j f(\alpha_{i_j})$. Отсюда вытекает, что вклад звена ε в величину $\sum_i f(W_i)$ равен

$$\sum_j |\varepsilon|\, f(\alpha_{i_j}) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha_{i_j}) = 0.$$

Если ввести такие же обозначения для ребра ε второго типа, то получим $\sum_j \alpha_{i_j} = 2\pi$ и, из тех же самых соображений, его вклад в $\sum_i f(W_i)$ равен нулю.

Осталось выяснить, какой вклад в величину $\sum_i f(W_i)$ дают звенья из $\mathcal{E}$. Пусть ε — такое звено. Опять, в тех же самых обозначениях, имеем $\sum_j \alpha_{i_j} = \alpha_\varepsilon$, поэтому $0 = \sum_j f(\alpha_{i_j}) - f(\alpha_\varepsilon)$. Отсюда вытекает, что вклад звена ε в величину $\sum_i f(W_i)$ равен

$$\sum_j |\varepsilon|\, f(\alpha_{i_j}) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha_{i_j}) = |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon),$$

т.е. он равен вкладу этого же звена в величину $f(W)$. Следовательно, $f(W) = \sum_i f(W_i)$. □

Доказательство теоремы 8.13. Так как A и B — равносоставленные многогранники, их можно разрезать на многогранники $A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_n$ соответственно так, что A_i равен B_i при всех $i = 1, \dots, n$. Продолжим f до функции Дена для всех многогранников A_i (а, значит, и всех B_i). Так как у равных многогранников инварианты Дена равны, имеем $f(A_i) = f(B_i)$. Кроме того, по предложению 8.26 имеем

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(B_i) = f(B).$$

□

8.5 Решение Третьей проблемы Гильберта

Третья проблема Гильберта имеет дело с обобщением понятия равносоставленности.

Определение 8.27. Многогранники A и B называются *равнодополняемыми*, если они имеют одинаковые объемы и существуют равносоставленные многогранники W^A и W^B, которые можно так разрезать на многогранники $W_0^A, W_1^A, \dots, W_n^A$ и $W_0^B, W_1^B, \dots, W_n^B$, что многогранник W_0^A равен A, многогранник W_0^B равен B, а при всех $i = 1, \dots, n$ многогранники W_i^A и W_i^B равны.

Замечание 8.28. Если многогранники A и B равносоставлены, то они и равнодополняемы. Действительно, в качестве W^A и W^B можно взять их самих. Таким образом, равнодополняемость действительно является обобщением равносоставленности.

Следствие 8.29. *У равнодополняемых многогранников все инварианты Дена совпадают.*

Доказательство. В обозначениях определения 8.27, пусть f — произвольная функция Дена для A и B, продолженная до функции Дена для всех W_i^A и W_j^B. Тогда $f(A) = f(W_0^A)$, $f(B) = f(W_0^B)$, и $f(W_i^A) = f(W_i^B)$ при всех $i = 1, \dots, n$. По предложению 8.26, $f(W^A) = \sum_{i=0}^{n} f(W_i^A)$ и $f(W^B) = \sum_{i=0}^{n} f(W_i^B)$. Так как W^A и W^B равносоставлены, то, по теореме 8.13, имеем $f(W^A) = f(W^B)$, откуда

$$f(A) = f(W_0^A) = f(W^A) - \sum_{i=1}^{n} f(W_i^A) = f(W^B) - \sum_{i=1}^{n} f(W_i^B) = f(W_0^B) = f(B).$$

□

Из приведенных выше результатов мгновенно получаем следующее утверждение.

Следствие 8.30. *Правильный тетраэдр не является равнодополняемым ни с кубом, ни с тетраэдром Хилла.*

Третья проблема Гильберта спрашивала, существуют ли тетраэдры с равными основаниями и высотами, не являющиеся равнодополняемыми? Оказывается, ответ положительный.

Определение 8.31. *Координатным тетраэдром* назовем тетраэдр с вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$, а также каждый тетраэдр, ему подобный.

Предложение 8.32. *У координатного тетраэдра имеется ненулевой инвариант Дена.*

Доказательство. Обозначим через α величину двугранных углов координатного тетраэдра при ребрах грани, являющейся правильным треугольником. Тогда, как легко видеть, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$. Дословно повторяя рассуждения из доказательства леммы 8.17, можно показать, что при любом натуральном k имеем $\cos(k\alpha) = a_k/(\sqrt{3})^k$, где a_k — целое число, не делящееся на 3, откуда тем же способом заключаем, что число $\frac{1}{\pi}\arccos(1/\sqrt{3})$ — иррационально. Отсюда вытекает, что множество $\{\alpha, \pi/2, \pi\}$ не имеет зависимостей, в которые α входит с ненулевым коэффициентом. Поэтому, положив $f(\alpha) = 1$, $f(\pi/2) = 0$ и $f(\pi) = 0$, мы получим функцию Дена для координатного тетраэдра. Легко видеть, что соответствующий ей инвариант Дена отличен от нуля. □

Замечание 8.33. Если в качестве основания координатного тетраэдра взять прямоугольный треугольник, то он будет отличаться от тетраэдра Хилла с таким же основанием лишь тем, что высота последнего падает не в вершину прямого угла основания, а в вершину острого. При этом высоты у таких тетраэдров будут равны.

Следствие 8.34 (решение Третьей проблемы Гильберта)**.** *Тетраэдр Хилла и координатный тетраэдр не являются равнодополняемыми.*

Доказательство. Пусть f — функция Дена, построенная в доказательстве предложения 8.32. Тогда ее значение на координатном тетраэдре отлично от нуля. Продолжим f до функции Дена для тетраэдра Хилла. По следствию 8.21, значение f на тетраэдре Хилла равно нулю. Поэтому, в силу следствия 8.29, рассматриваемые тетраэдры не являются равнодополняемыми. □

8.6 Дальнейшее развитие

В 1965 Сидлер [7] доказал, что равенство инвариантов Дена достаточно для равносоставленности многогранников в $\mathbb{R}^3$. Тем самым, имеет место следующая теорема.

Теорема 8.35 (Ден–Сидлер)**.** *Для равносоставленности многогранников в $\mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно, чтобы совпадали их объемы и все инварианты Дена.*

Замечание 8.36. Теорему Дена–Сидлера на четырехмерный случай обобщили Б. Джессен (B. Jessen) и А. Торуп (A. Thorup), см. [9].

Литература к главе 8

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Bolyai%E2%80%93Gerwien_theorem

[2] Dehn M. *Uber den Rauminhalt*. Göttingen Nachr. Math. Phys., 1900, pp. 345–354; Math. Ann., 1902, v. 55, pp. 465–478.

[3] Болтянский В.Г. *Третья проблема Гильберта*. М.:Наука, 1977.

[4] Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Гостехиздат, 1956.

[5] http://ium.mccme.ru/f10/teoriyamery.html

[6] Hadwiger H. Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder. Math. Ann. 1954, 127, 170–174.

[7] Sydler J.-P. Conditions nécessaries et sufficantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. Comment. math. Helv. 1965, v. 40, pp. 43–80.

[8] http://demonstrations.wolfram.com/DissectionOfHillsTetrahedronOfType1/

[9] Jessen B., Thorup A. *The Algebra of Polytopes in Affine Spaces*. Math. Scand., 1978, v. 43, pp. 211—240.