Глава 3

Теорема Жордана

План. Замкнутая кривая, незамкнутая кривая, незамкнутая кривая без самопересечений, замкнутая кривая без самопересечений, теорема Жордана о кривой без самопересечений, лежащей на евклидовой плоскости, ломаная, вершины ломаной, ребра ломаной, замкнутая ломаная, внутренние и концевые вершины ломаной, незамкнутая ломаная без самопересечений, замкнутая ломаная без самопересечений, теорема Жордана о ломаной без самопересечений, лежащей на евклидовой плоскости, аффинное отображение из отрезка в $\mathbb{R}^n$, невырожденное аффинное отображение из отрезка в $\mathbb{R}^n$, вырожденное аффинное отображение из отрезка в $\mathbb{R}^n$, расстояние между подмножествами $\mathbb{R}^n$, расстояние от точки до подмножества $\mathbb{R}^n$, доказательство теоремы Жордана для ломаных.

В данном разделе мы обсудим знаменитую теорему Жордана о кривых без самопересечений, лежащих на евклидовой плоскости. Мы приведем доказательство этой теоремы в случае, когда кривая является ломаной. Доказательства в общем случае можно изучить, например, по публикациям [1], [2], [3], [4].

3.1 Теорема Жордана

Пусть X — топологическое пространство.

Определение 3.1. Непрерывная кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$ называется *замкнутой*, если $\gamma(a) = \gamma(b)$, и *незамкнутой* в противном случае. Незамкнутая непрерывная кривая γ называется *кривой без самопересечений*, если отображение γ взаимно-однозначно с образом. Замкнутая непрерывная кривая называется *замкнутой кривой без самопересечений*, если единственные две различные точки t_1, t_2 отрезка $[a,b]$, для которых $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, — это точки a и b.

Определение 3.2. Напомним, что *компонентой линейной связности* топологического пространства X или, короче, *компонентой* X называется каждое линейно связное подмножество в X, которое не содержится в большем линейно связном подмножестве. Каждая точка из X лежит в некоторой компоненте, и никакие две компоненты не пересекаются, поэтому X разбивается на компоненты (множество компонент в X определено однозначно).

Теорема 3.3 (Жордан)**.** *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — непрерывная кривая без самопересечений. Обозначим через Γ образ отображения γ, и пусть $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Тогда*

(1) *если кривая γ незамкнутая, то Ω — линейно связно*;

(2) *если кривая γ замкнутая, то Ω состоит ровно из двух компонент.*

Теорема Жордана 3.3 на первый взгляд кажется совершенно очевидной, но ее доказательство далеко нетривиально. Дело в том, что она обязана своим существованием некоторым свойствам, тесно связанным с глобальным "устройством" плоскости. Рассмотрим несколько примеров (без подробных доказательств), наглядно демонстрирующих это наблюдение.

Сфера

Замкнутая кривая без самопересечений разбивает двумерную сферу на две компоненты, а незамкнутая — нет, см. рис. 3.1.

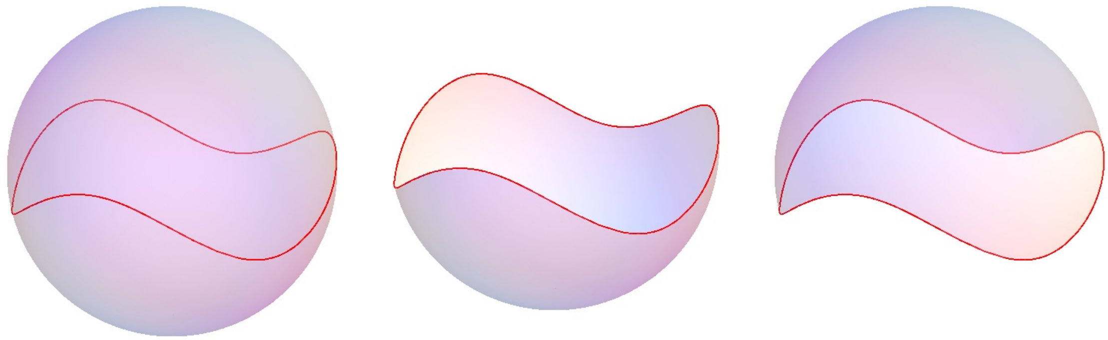

Рис. 3.1: Теорема Жордана верна для сферы.

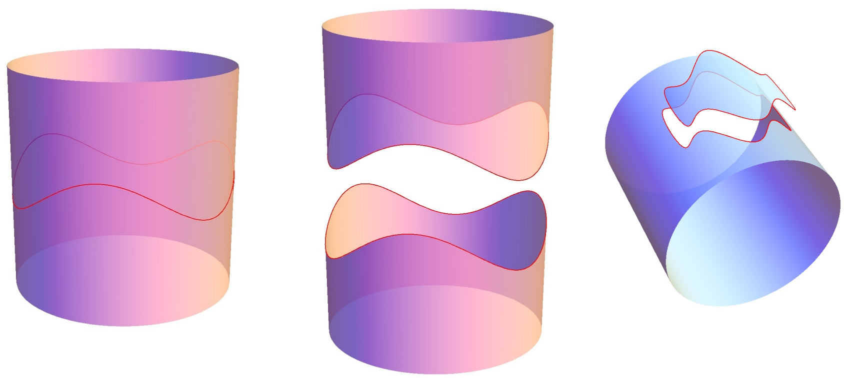

Рис. 3.2: Теорема Жордана верна для цилиндра.

Цилиндр

То же самое верно и для цилиндра, см. рис. 3.2.

Тор

Незамкнутая кривая без самопересечений по-прежнему не разбивает тор на компоненты. А вот среди замкнутых кривых есть как разбивающие, так и не разбивающие, см. рис. 3.3.

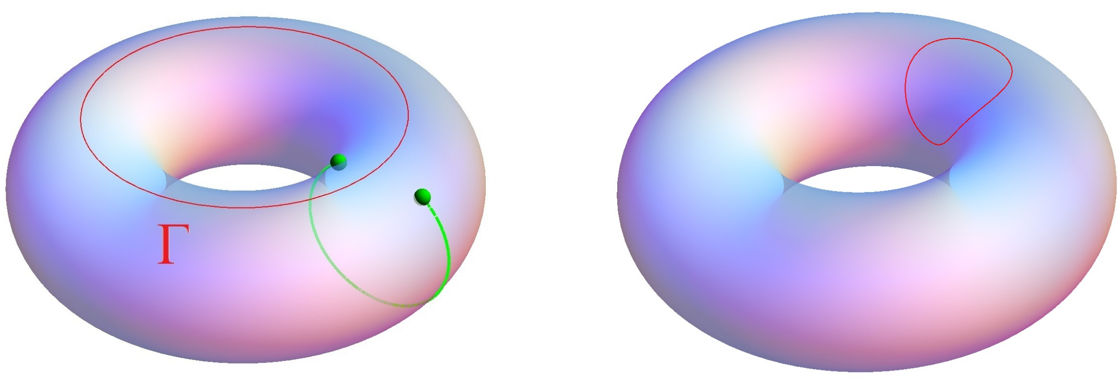

Рис. 3.3: На торе теорема Жордана не верна.

Лист Мебиуса

“Физическая реализация” листа Мебиуса получается, если склеить противоположные два края прямоугольной полоски бумаги с перекручиванием на 180°, см. рис. 3.4, слева. Рассмотрим на листе Мебиуса среднюю линию Г, см. рис. 3.4, справа. Как показано на этом же рисунке, Г не разбивает лист Мёбиуса.

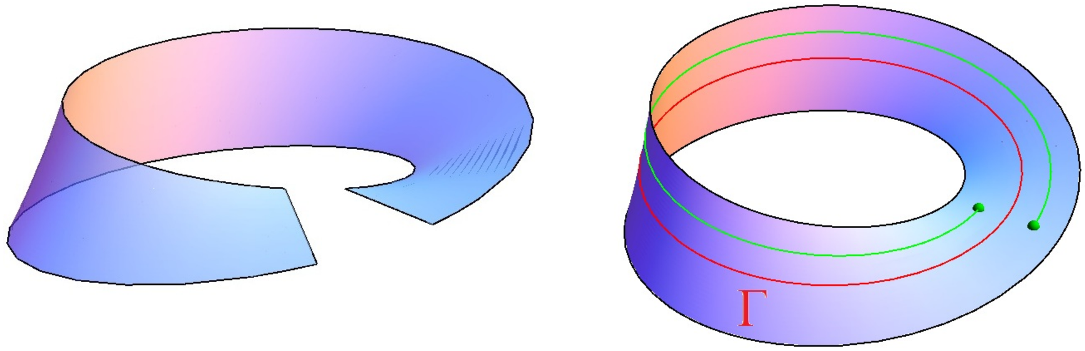

Рис. 3.4: На листе Мёбиуса теорема Жордана не верна.

Мы докажем теорему Жордана в частном случае: для ломаных. Дадим соответствующие определения.

3.2 Ломаные и теорема Жордана

Определение 3.4. *Ломаной в* $\mathbb{R}^n$ называется последовательность точек $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ и отрезков $[A_k, A_{k+1}]$, $k = 0, \dots, m-1$, последовательно их соединяющих.

Точки $A_0, A_1, \dots, A_m$ называются *вершинами ломаной*, а отрезки $e_k = [A_k, A_{k+1}]$, $k = 0, \dots, m-1$, — ее *ребрами*.

Ломаная называется *замкнутой*, если A_0 совпадает с A_m, и *незамкнутой* в противном случае.

Для незамкнутой ломаной вершины A_0 и A_m, а также ребра e_0 и e_{m-1} называются *концевыми*, а все остальные вершины и ребра — *внутренними*. У замкнутой ломаной все вершины и ребра называются *внутренними*.

Определение 3.5. Незамкнутая ломаная называется *ломаной без самопересечений*, если никакие два отрезка ломаной не имеют общих точек, за исключением $[A_{k-1}, A_k] \cap [A_k, A_{k+1}] = A_k$, где $k = 1, \dots, m-1$.

Замкнутая ломаная называется *замкнутой ломаной без самопересечений*, если никакие два отрезка ломаной не имеют общих точек, за исключением $[A_{k-1}, A_k] \cap [A_k, A_{k+1}] = A_k$, где $k = 1, \dots, m-1$, и $[A_0, A_1] \cap [A_{m-1}, A_m] = A_0 = A_m$.

Замечание 3.6. Так как ломаная однозначно задается последовательностью своих вершин, мы будем иногда говорить “$L = A_0 A_1 \cdots A_m$ — ломаная в $\mathbb{R}^n$”, понимая под этим, что $A_0, A_1, \dots, A_m$ — последовательность вершин ломаной L.

Также мы иногда будем рассматривать ломаную в $\mathbb{R}^n$ как подмножество $\mathbb{R}^n$, равное объединению всех ее ребер. В этом смысле, например, мы будем понимать выражение “$L \subset \mathbb{R}^2$ — ломаная на плоскости”.

Теорема 3.7 (теорема Жордана для ломаных)**.** *Пусть* $L \subset \mathbb{R}^2$ *— ломаная без самопересечений. Положим* $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$. *Тогда*

(1) *если* L *незамкнутая, то* Ω *— линейно связно*;

(2) *если* L *замкнутая, то* Ω *состоит ровно из двух компонент.*

Замечание 3.8. Разберемся, почему теорема Жордана 3.7 для ломаных является частным случаем общей теоремы Жордана 3.3. Для этого достаточно по данной ломаной L построить непрерывную кривую, образом которой служит L.

Определение 3.9. *Аффинным отображением* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется любое отображение вида

$$f\colon t \mapsto P + t \cdot \vec{v},$$

где P, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

При $\vec{v} \neq 0$ аффинное отображение называется *невырожденным*, а при $\vec{v} = 0$ — *вырожденным*.

Предложение 3.10. *Для любого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и любых двух точек A, $B \in \mathbb{R}^n$ существует единственное аффинное отображение $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, для которого $A = f(a)$, $B = f(b)$. Это отображение задается формулой*

$$f\colon t \mapsto A\,\frac{b-t}{b-a} + B\,\frac{t-a}{b-a}.$$

Отметим, что заданное такой формулой отображение невырождено в точности при $A \neq B$. В этом случае f-образом отрезка $[a,b]$ является отрезок $[A,B]$, по которому точка $f(t)$ движется равномерно (скорость движения этой точки постоянна). Если $A = B$, то f-образ отрезка $[a,b]$ состоит из одной точки $A = B$.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ дана ломаная $L = A_0A_1\ldots A_m$. Определим отображение $\gamma_L : [0,m] \to \mathbb{R}^n$ на отрезке $[k,k+1]$ для каждого $k = 0,\ldots,m-1$ формулой

$$\gamma_L\colon t \mapsto A_k(k+1-t) + A_{k+1}(t-k).$$

Из сказанного выше следует, что γ_L отображает отрезок $[k,k+1]$ на ребро $e_k = [A_k, A_{k+1}]$ ломаной L. Из леммы 2.38 вытекает, что отображение γ_L непрерывно. Ломаная L и непрерывная кривая γ_L одновременно замкнуты или незамкнуты; кроме того, они одновременно или являются ломаной и кривой без самопересечений, или нет. Образ отображения γ_L совпадает с L. Поэтому утверждение общей теоремы Жордана 3.3 о кривой γ_L — это в точности утверждение теоремы Жордана 3.7 для ломаных L.

Замечание 3.11. На самом деле, при доказательстве теоремы 3.7 мы покажем, что любые две точки из одной компоненты множества Ω можно соединить ломаной.

3.3 Доказательство теоремы Жордана для ломаных

Нам нужно проделать некоторую подготовительную работу.

Определение 3.12. Пусть A и B — два произвольных непустых подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, тогда *расстоянием $\rho(A,B)$ между A и B* назовем величину $\inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$, где как обычно $|ab|$ обозначает длину отрезка, соединяющего точки a и b. В частности, так определяется *расстояние от точки a до множества B*, а именно, оно равно $\rho\bigl(\{a\}, B\bigr)$.

Ясно, что для одноточечных подмножеств $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$ имеем $\rho(A,B) = |ab|$.

Замечание 3.13. Заметим, что определенная только что функция на непустых подмножествах $\mathbb{R}^n$ не задает метрику. В самом деле, хотя она симметрична, т.е. $\rho(A,B) = \rho(B,A)$, остальные аксиомы не выполняются. Например, существуют непересекающиеся подмножества A, $B \subset \mathbb{R}^n$, для которых $\rho(A,B) = 0$ (приведите пример таких подмножеств). Кроме того, неравенство треугольника выполняется не для всех A, B, C: например, для подмножеств прямой $A = [0,1]$, $B = [1,2]$ и $C = [2,3]$ имеем $1 = \rho(A,C) \not\leq 0 + 0 = \rho(A,B) + \rho(B,C)$.

Лемма 3.14. *Расстояние между двумя отрезками в $\mathbb{R}^n$ равно 0 тогда и только тогда, когда они пересекаются.*

Доказательство. Докажем единственную нетривиальную часть леммы, а именно, что расстояние между непересекающимися отрезками $[A_1,B_1]$ и $[A_2,B_2]$ положительно. Отрезок $[A_i,B_i]$ состоит из точек $P_i(t_i) = A_i + (B_i - A_i)\,t_i$, где $t_i \in [0,1]$, поэтому функция $\rho(t_1,t_2) = \bigl|P_1(t_1)P_2(t_2)\bigr|$ непрерывна. Эта функция определена на квадрате $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, являющемся замкнутым и ограниченным множеством, а, значит, компактом по теореме 2.55. Поэтому, в силу следствия 2.58, функция $\rho(t_1,t_2)$ принимает свое наименьшее значение в некоторой точке (x,y). Так как отрезки не пересекаются, $\rho(x,y) = \bigl|P_1(x)P_2(y)\bigr| > 0$, поэтому $\rho(t_1,t_2)$ — всюду положительная функция. □

Следствие 3.15. *Расстояние между двумя ломаными в $\mathbb{R}^n$ равно 0 тогда и только тогда, когда ломаные пересекаются.*

Доказательство. Очевидным образом вытекает из предыдущего леммы 3.14, поскольку ломаная представляет собой объединение конечного числа отрезков. □

Доказательство теоремы 3.7.
Стратегия нашего доказательства такова.

(1) Мы подберем для каждой точки P нашей ломаной L достаточно маленькую круговую окрестность U_P. При этом для внутренней точки P ломаная L разбивает U_P на две компоненты, а для концевой точки P (если L — незамкнутая) ломаная L не разбивает U_P.

(2) Мы докажем, что для каждой точки P нашей ломаной L любую точку из $U_P\setminus L$ можно соединить ломаной, не пересекающей L, с точкой из $U_{A_0}\setminus L$.

(3) Мы докажем, что любую точку плоскости, не лежащую на L, можно соединить отрезком, не пересекающим L, с точкой из некоторой окрестности вида U_P.

Из пунктов (2) и (3) следует, что для незамкнутой ломаной L дополнение $\mathbb{R}^2\setminus L$ состоит из одной компоненты, так как любую точку этого дополнения можно соединить ломаной с некоторой точкой множества $U_{A_0}\setminus L$, которое линейно связно.

Также из пунктов (2) и (3) следует, что для замкнутой ломаной L дополнение $\mathbb{R}^2\setminus L$ состоит не более чем из двух компонент, так как любую точку этого дополнения можно соединить ломаной с некоторой точкой множества $U_{A_0}\setminus L$, которое состоит из двух компонент.

(4) Наконец, мы докажем, что замкнутая ломаная разбивает плоскость не менее чем на две компоненты. Для этого мы построим на $\mathbb{R}^2\setminus L$ локально постоянную функцию, принимающую два значения: точки, в которых эта функция принимает различные значения, лежат в разных компонентах.

Перейдем к реализации стратегии.

3.3.1 Реализация пункта (1)

Для каждой точки P ломаной $L\subset\mathbb{R}^2$ обозначим через ε_P произвольное положительное число, меньшее, чем расстояние от P до объединения всех вершин ломаной L (если P — вершина, то расстояния рассматриваем только до вершин, отличных от P), и меньше, чем расстояния от P до всех ребер ломаной L, не содержащих P.

Положим $U_P=U_{\varepsilon_P}(P)$, рис. 3.5. Ясно, что в U_P могут попасть только точки ребер, содержащих P, следовательно, $U_P\cap L$ представляет собой

(1) радиус круга U_P, если P — концевая вершина;

(2) два различных радиуса круга U_P, если P — внутренняя вершина;

(3) диаметр круга U_P, если P — внутренняя точка ребра.

Как было отмечено в предыдущей лекции, в первом случае множество $U_P\setminus L$ линейно связно, а в оставшихся двух случаях состоит из двух компонент.

Замечание 3.16. Обратите внимание, что ε_P можно брать настолько малым, насколько нам нужно, так как ограничение на это число установлено только сверху.

3.3.2 Реализация пункта (2)

Определение 3.17. Пусть X — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$, и $\varepsilon>0$. Тогда *ε-окрестностью множества* X будем называть множество $U_\varepsilon(X)=\cup_{x\in X}U_\varepsilon(x)$.

Лемма 3.18. *Пусть P — внутренняя точка ребра e ломаной L, а S — одна из вершин ребра e. Тогда каждую точку $Q\in U_P\setminus L$ можно соединить с некоторой точкой $T\in U_S\setminus L$ ломаной, не пересекающей L. Обратно, каждую точку $T\in U_S\setminus L$ можно соединить с некоторой точкой $Q\in U_P\setminus L$ ломаной, не пересекающей L. Более того, эту соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в $U_\varepsilon(e)$, где $\varepsilon=\max(\varepsilon_P,\varepsilon_S)$.*

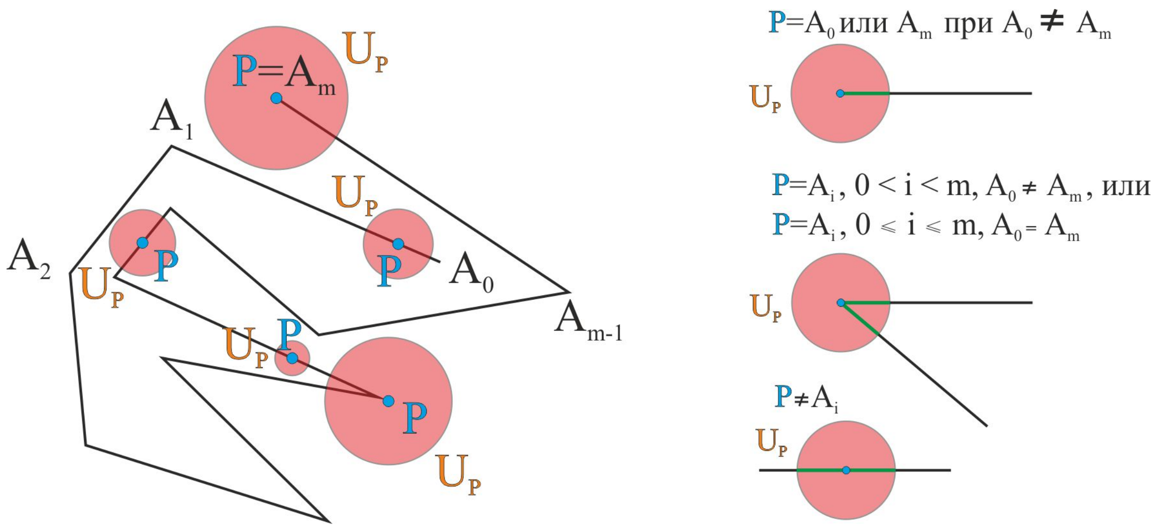

Рис. 3.5: Окрестность U_P.

Доказательство. Пусть A — точка на интервале (P, S), отстоящая от S менее чем на $\varepsilon_S/2$. Обозначим через L' объединение всех ребер ломаной L, кроме e. Тогда $[A, P] \cap L' = \emptyset$, поэтому, по следствию 3.15, $\delta = \rho\big([A, P], L'\big) > 0$. Отсюда вытекает, что каждый отрезок $[A', P']$, полученный из $[A, P]$ смещением в перпендикулярном e направлении на положительное расстояние, меньшее, чем δ, не пересекает L, так как смещенный отрезок не пересекает ни e, ни L'. Заметим, что $A' \in U_S$ при любом смещении, меньшем δ, так как $\delta < |AS| < \varepsilon_S/2$ и, значит, $|A'S|^2 = |A'A|^2 + |AS|^2 < (\varepsilon_S/2)^2 + (\varepsilon_S/2)^2 < \varepsilon_S^2$. Кроме того, $P' \in U_P$ при любом смещении, меньшем ε_P. Зададим положительную величину смещения меньшей, чем δ и ε_P, тогда $A' \in U_S$ и $P' \in U_P$. В частности, при таком смещении имеем $[A', P'] \subset U_\varepsilon(e)$.

Для доказательства первого утверждения леммы, выберем направление смещения так, чтобы точки P' и Q оказались в одной компоненте множества $U_P \setminus L$, соединим точки Q и P' отрезком (он целиком лежит в $U_P \setminus L$), а в качестве T возьмем точку A'. Для доказательства второго утверждения леммы, выберем направление смещения так, чтобы точки A' и T оказались в одной компоненте множества $U_S \setminus L$, соединим точки T и A' непрерывной кривой (это можно сделать ломаной), лежащей в $U_S \setminus L$, а в качестве Q возьмем точку P', рис. 3.6.

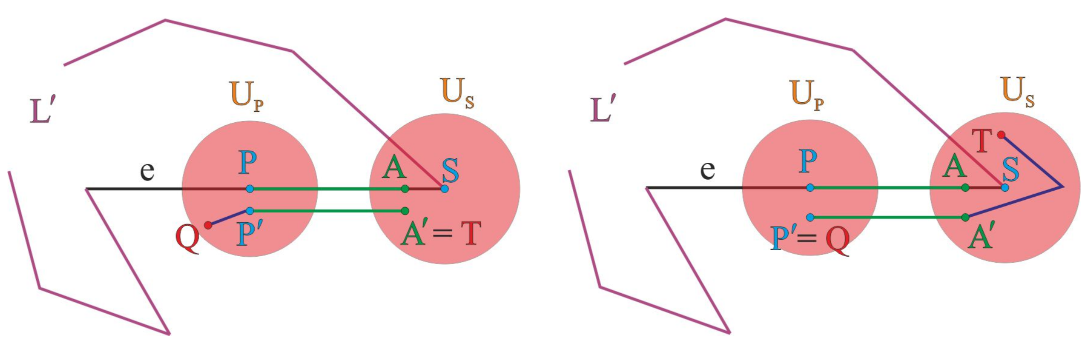

Рис. 3.6: Доказательство леммы 3.18.

Осталось заметить, что все фрагменты построенной ломаной лежат в $U_\varepsilon(e)$. □

Следствие 3.19. *Пусть P — произвольная точка ломаной L, а Q — произвольная точка из $U_P \setminus L$. Тогда существует такая точка $T \in U_{A_0} \setminus L$, что Q и T соединяются ломаной γ, не пересекающей L. Более того, эту соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в $U_\varepsilon(L)$, где $\varepsilon = \max(\varepsilon_P, \varepsilon_{A_0})$.*

Доказательство. Если $P = A_0$, то γ — это 0-звенная ломаная Q (или кривая, которая является отображением отрезка в точку $Q = T$).

Пусть теперь $P \neq A_0$. Тогда $P \in (A_i, A_{i+1}]$ для некоторого i. Если $P = A_{i+1}$, выберем произвольную точку $P_i \in (A_i, A_{i+1})$ и соединим Q с некоторой точкой $Q_i \in U_{P_i} \setminus L$ ломаной, не пересекающей L, что можно сделать в силу леммы 3.18. Затем, по этой же лемме, соединим Q_i и некоторую $T_i \in U_{A_i}$ ломаной, не пересекающей L. В результате, получим ломаную, не пересекающую L и соединяющую Q с некоторой точкой $T_i \in U_{A_i}$. Если же $P \neq A_{i+1}$, то сразу получим такую ломаную.

Затем будем последовательно соединять не пересекающимися с L ломаными точку T_i и некоторую $Q_{i-1} \in U(P_{i-1})$, $P_{i-1} \in (A_{i-1}, A_i)$, точку Q_{i-1} и некоторую $T_{i-1} \in U_{A_{i-1}}$, и т.д., пока не дойдем до точки $T_0 \in U_{A_0}$. Остается заметить, что радиусы ε_X всех встречающихся кругов U_X (кроме U_P и U_{A_0}) мы можем выбирать сколь угодно малыми, а именно, выберем их меньшими, чем ε. Тогда, по лемме 3.18, каждый построенной по этой лемме фрагмент ломаной будет лежать в ε-окрестности ребра, которому принадлежат центры кругов, так что вся ломаная лежит в $U_\varepsilon(L)$. □

3.3.3 Реализация пункта (3)

Рассмотрим теперь произвольную точку $R \in \Omega$. Отрезок $[R, A_0]$ пересекает ломаную L по конечному числу отрезков и точек. Обозначим через P ближайшую к R точку из $[R, A_0] \cap L$. Пусть Q — произвольная точка из $U_P \cap [R, P)$, тогда $Q \in \Omega$, причем отрезок $[R, Q]$ не пересекает L. По следствию 3.19, существует ломаная γ, соединяющая Q с некоторой точкой $T \in U_{A_0} \setminus L$ и не пересекающая L. Последовательно проходя отрезок $[R, Q]$ и ломаную γ, мы получим ломаную, соединяющую R и T и не пересекающую L. Таким образом, каждая точка $R \in \Omega$ лежит в той же компоненте, что и некоторая точка из $U_{A_0} \setminus L$, рис. 3.7.

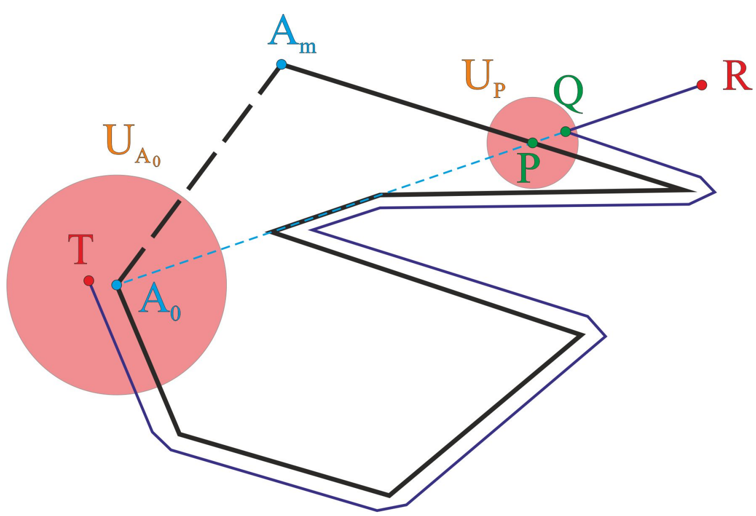

Рис. 3.7: Реализация пункта (3).

Итак, как было отмечено выше в описании стратегии доказательства, если ломаная L незамкнутая, то множество $U_{A_0} \setminus L$ линейно связно, поэтому Ω состоит из одной компоненты. Если же L замкнута, то $U_{A_0} \setminus L$ состоит из двух компонент, поэтому Ω состоит не более чем из двух компонент.

3.3.4 Реализация пункта (4)

Покажем теперь, что Ω состоит не менее чем из двух компонент. Введем на плоскости декартову систему координат Oxy, для которой все вершины ломаной L имеют разные абсциссы (такая система координат существует, так как это условие запрещает лишь конечное число направлений оси Oy). Для каждой точки $P \in \Omega$ рассмотрим луч ℓ_P, выходящий из P и сонаправленный с осью y. Пусть e — произвольное ребро ломаной L. Тогда $\ell_P \cap e$ состоит не более чем из одной точки, в частности, $\ell_P \cap L$ представляет собой конечное число точек.

Точку $Q \in \ell_P \cap L$ назовем *существенной*, если выполняется одно из двух условий:

(1) точка Q лежит внутри некоторого ребра ломаной L;

(2) точка Q — вершина ломаной L, и выходящие из Q ребра ломаной L лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через ℓ_P, рис. 3.8.

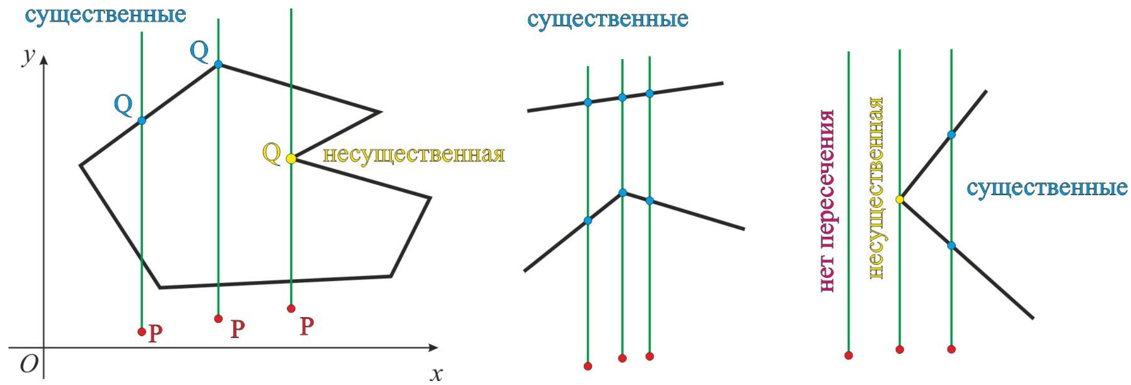

Рис. 3.8: Реализация пункта (4).

Положим $\eta(P) = 0$, если число существенных пересечений луча ℓ_P с ломаной L четно, и $\eta(P) = 1$ в противном случае.

Выясним, что происходит с числом $\eta(P)$ при изменении положения точки P внутри множества Ω. Предположим, что $Q \in \ell_P \cap L$ — внутренняя точка некоторого ребра e ломаной L. Выберем $\delta_Q > 0$ так, что оно было меньше минимума абсолютных величин разностей между x-координатой точки Q и x-координатами вершин ломаной, а также меньше расстояния от P до ломаной L. Тогда при смещениях точки P на расстояние, меньшее δ_Q, ребро e по-прежнему пересекается со смещенным лучом ℓ_P, так что вклад ребра e в четность числа $\eta(P)$ не меняется.

Пусть теперь Q — вершина ломаной L, а e и f — выходящие из Q ребра ломаной L, так что $Q = (e \cup f) \cap \ell_P$.

Если Q — существенное пересечение, то выберем число $\delta_Q > 0$ так, чтобы оно было меньше абсолютных величин разностей между x-координатой вершины Q и x-координатами остальных вершин ломаной, а также меньше расстояния от P до ломаной L. Тогда при сдвиге точки P на расстояние, меньшее δ, смещенный луч ℓ_P продолжает пересекать $e \cup f$ ровно по одной точке, причем это пересечение остается существенным, поэтому вклад пары ребер e и f в четность числа $\eta(P)$ не меняется.

Осталось разобрать случай, когда Q — несущественное пересечение. Выберем $\delta_Q > 0$ как в предыдущем абзаце. Обозначим через ℓ прямую, проходящую через ℓ_P. Пусть P смещается на расстояние, меньшее δ_Q. Если P смещается вдоль ℓ, то Q остается несущественным пересечением. Если P смещается в ту ограниченную ℓ полуплоскость, которая содержит ребра e и f, то вместо несущественного пересечения Q возникают два существенных пересечения (с ребрами e и f), так что их суммарный вклад в $\eta(P)$ равен нулю. Если же P смещается в противоположную полуплоскость (не содержащую e и f), то ребра e и f перестают пересекаться со смещенным ℓ_P и, значит, вклад этих ребер в $\eta(P)$ также равен нулю.

Пусть $\delta > 0$ меньше любого из конечного числа чисел δ_Q, где Q пробегает все точки из $\ell_P \cap L$. Из приведенных выше рассуждений следует, что если $P' \in U_\delta(P)$, то $\eta(P) = \eta(P')$; иными словами, функция η на Ω локально постоянна. Так как η принимает конечное число значений, применимо следствие 2.43, в соответствии с которым η постоянна на каждой компоненте.

Покажем теперь, что существуют точки, в которых η принимает различные значения. Пусть Q — середина некоторого ребра e ломаной L. Напомним, что круг U_Q имеет радиус ε_Q и не пересекает ребра ломаной L отличные от e. Обозначим через Q_1 и Q_2 соответственно результат смещения точки Q в направлении оси y и в противоположном направлении на расстояние $\varepsilon_Q/2$. Тогда точки Q_i лежат в Ω, $[Q_1, Q_2] \cap L = Q$ и $\ell_{Q_1} \subset \ell_{Q_2}$. Таким образом, $\ell_{Q_2} \cap L = (\ell_{Q_1} \cap L) \cup \{Q\}$ и Q является существенной точкой из $\ell_{Q_2} \cap L$, поэтому $\eta(Q_1) \neq \eta(Q_2)$ и, значит, точки Q_1 и Q_2 лежат в разных компонентах множества Ω. Тем самым, множество Ω имеет не менее двух компонент. Последнее наблюдение завершает доказательство теоремы 3.7. $\square$

Литература к главе 3

[1] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, 2004, изд-во МЦНМО.

[2] Вольперт А.И. *Элементарное доказательство теоремы Жордана.* УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 168–172.

[3] Филиппов А.Ф. *Элементарное доказательство теоремы Жордана.* УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 173–176.

[4] Парамонов П.В.*Теорема Жордана*, http://www.math.msu.su/tffa/lectures/JORDANThlec2012.pdf