

## Глава 3

# Теорема Жордана

**План.** Замкнутая кривая, незамкнутая кривая, незамкнутая кривая без самопересечений, замкнутая кривая без самопересечений, теорема Жордана о кривой без самопересечений, лежащей на евклидовой плоскости, ломаная, вершины ломаной, ребра ломаной, замкнутая ломаная, внутренние и концевые вершины ломаной, незамкнутая ломаная без самопересечений, замкнутая ломаная без самопересечений, теорема Жордана о ломаной без самопересечений, лежащей на евклидовой плоскости, аффинное отображение из отрезка в  $\mathbb{R}^n$ , невырожденное аффинное отображение из отрезка в  $\mathbb{R}^n$ , вырожденное аффинное отображение из отрезка в  $\mathbb{R}^n$ , расстояние между подмножествами  $\mathbb{R}^n$ , расстояние от точки до подмножества  $\mathbb{R}^n$ , доказательство теоремы Жордана для ломаных.

В данном разделе мы обсудим знаменитую теорему Жордана о кривых без самопересечений, лежащих на евклидовой плоскости. Мы приведем доказательство этой теоремы в случае, когда кривая является ломаной. Доказательства в общем случае можно изучить, например, по публикациям [1], [2], [3], [4].

### 3.1 Теорема Жордана

Пусть  $X$  — топологическое пространство.

**Определение 3.1.** Непрерывная кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  называется *замкнутой*, если  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , и *незамкнутой* в противном случае. Незамкнутая непрерывная кривая  $\gamma$  называется *кривой без самопересечений*, если отображение  $\gamma$  взаимно-однозначно с образом. Замкнутая непрерывная кривая называется *замкнутой кривой без самопересечений*, если единственные две различные точки  $\{t_1, t_2\} \subset [a, b]$ , для которых  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ , — это точки  $\{a, b\}$ .

**Определение 3.2.** Напомним, что *компонентой линейной связности* топологического пространства  $X$  или, короче, *компонентой*  $X$  называется каждое линейно связанное подмножество в  $X$ , которое не содержится в большем линейно связанном подмножестве. Каждая точка из  $X$  лежит в некоторой компоненте и никакие две компоненты не пересекаются, поэтому  $X$  разбивается на компоненты (множество компонент в  $X$  определено однозначно).

**Теорема 3.3** (Жордан). Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  — непрерывная кривая без самопересечений. Обозначим через  $\Gamma$  образ отображения  $\gamma$ , и пусть  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Тогда

- (1) если кривая  $\gamma$  не замкнута, то  $\Omega$  — линейно связно;
- (2) если кривая  $\gamma$  замкнута, то  $\Omega$  состоит ровно из двух компонент.

Теорема Жордана 3.3 на первый взгляд кажется совершенно очевидной, но ее доказательство далеко нетривиально. Дело в том, что она обязана своим существованием некоторым свойствам, тесно связанным с глобальным “устройством” плоскости. Рассмотрим несколько примеров (без подробных доказательств) наглядно демонстрирующих это наблюдение.

### Сфера

Замкнутая кривая без самопересечений разбивает двумерную сферу на две компоненты, а не замкнутая — нет, см. рис. 3.1.

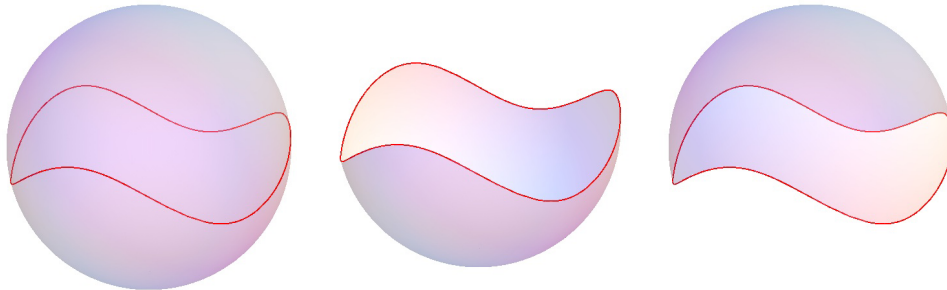


Рис. 3.1: Теорема Жордана верна для сферы.

### Цилиндр

То же самое верно и для цилиндра, см. рис. 3.2.

### Тор

Незамкнутая кривая без самопересечений по-прежнему не разбивает тор на компоненты. А вот среди замкнутых кривых есть как разбивающие, так и не разбивающие, см. рис. 3.3.

### Лист Мебиуса

“Физическая реализация” листа Мебиуса получается, если склеить противоположные края прямоугольной полоски бумаги с перекручиванием на  $180^\circ$ , см. рис. 3.4, слева. Рассмотрим на листе Мебиуса среднюю линию

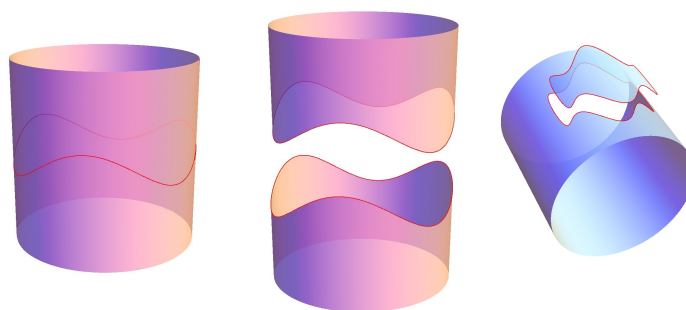


Рис. 3.2: Теорема Жордана верна для цилиндра.

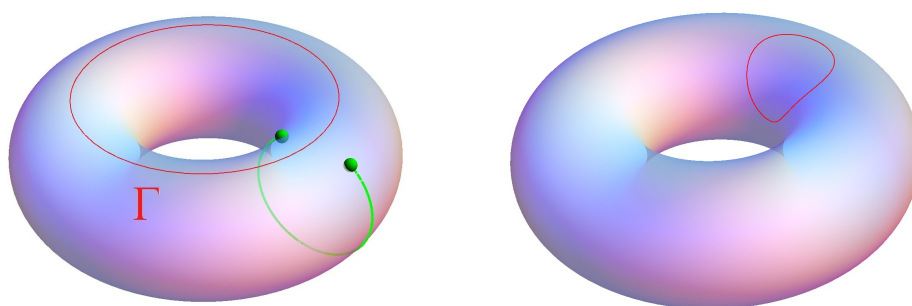


Рис. 3.3: На торе теорема Жордана не верна.

$\Gamma$ , см. рис. 3.4, справа. Как показано на этом же рисунке,  $\Gamma$  не разбивает лист Мёбиуса.

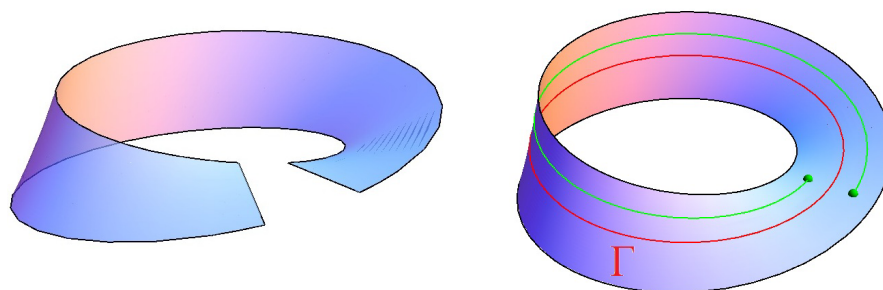


Рис. 3.4: На листе Мёбиуса теорема Жордана не верна.

Мы докажем теорему Жордана в частном случае: для ломаных. Дадим соответствующие определения.

## 3.2 Ломаные и теорема Жордана

**Определение 3.4.** Ломаной в  $\mathbb{R}^n$  называется последовательность точек  $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$  и отрезков  $[A_k, A_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ , последовательно их соединяющих.

Точки  $A_0, A_1, \dots, A_m$  называются *вершинами ломаной*, а отрезки  $e_k = [A_k, A_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ , — ее *ребрами*.

Ломаная называется *замкнутой*, если  $A_0$  совпадает с  $A_m$ , и *незамкнутой* в противном случае.

Для незамкнутой ломаной вершины  $A_0$  и  $A_m$ , а также ребра  $e_0$  и  $e_{m-1}$  называются *концевыми*, а все остальные вершины и ребра — *внутренними*. У замкнутой ломаной все вершины и ребра называются *внутренними*.

**Определение 3.5.** Незамкнутая ломаная называется *ломаной без самопересечений*, если никакие два отрезка ломаной не имеют общих точек, за исключением  $[A_{k-1}, A_k] \cap [A_k, A_{k+1}] = A_k$ , где  $k = 1, \dots, m-1$ .

Замкнутая ломаная называется *замкнутой ломаной без самопересечений*, если никакие два отрезка ломаной не имеют общих точек, за исключением  $[A_{k-1}, A_k] \cap [A_k, A_{k+1}] = A_k$ , где  $k = 1, \dots, m-1$ , и  $[A_0, A_1] \cap [A_{m-1}, A_m] = A_0 = A_m$ .

**Замечание 3.6.** Так как ломаная однозначно задается последовательностью своих вершин, мы будем иногда говорить “пусть  $L = A_0A_1 \dots A_m$  — ломаная в  $\mathbb{R}^n$ ”, понимая под этим, что  $A_0, A_1, \dots, A_m$  — последовательность вершин ломаной  $L$ .

Также мы иногда будем рассматривать ломаную в  $\mathbb{R}^n$  как подмножество  $\mathbb{R}^n$ , равное объединению всех ее ребер. В этом смысле, например, мы будем понимать выражение “пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — ломаная на плоскости”.

**Теорема 3.7** (теорема Жордана для ломаных). Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — ломаная без самопересечений. Положим  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ . Тогда

- (1) если  $L$  незамкнута, то  $\Omega$  — линейно связно;
- (2) если  $L$  замкнута, то  $\Omega$  состоит ровно из двух компонент.

**Замечание 3.8.** Разберемся, почему теорема Жордана 3.7 для ломаных является частным случаем общей теоремы Жордана 3.3. Для этого достаточно по данной ломаной  $L$  построить непрерывную кривую, образом которой служит  $L$ .

**Определение 3.9.** Аффинным отображением  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется любое отображение вида

$$f: t \mapsto P + t \cdot \vec{v},$$

где  $P, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

При  $\vec{v} \neq 0$  аффинное отображение называется *невыврожденным*, а при  $\vec{v} = 0$  — *вырожденным*.

**Утверждение 3.10.** Для любого отрезка  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  и любых двух точек  $A, B \in \mathbb{R}^n$  существует единственное аффинное отображение  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которого  $A = f(a)$ ,  $B = f(b)$ . Это отображение задается формулой

$$f: t \mapsto A \frac{b-t}{b-a} + B \frac{t-a}{b-a}.$$

Отметим, что заданное такой формулой отображение невырождено в точности при  $A \neq B$ . В этом случае  $f$ -образом отрезка  $[a, b]$  является отрезок  $[A, B]$ , по которому точка  $f(t)$  движется равномерно (скорость движения этой точки постоянна). Если  $A = B$ , то  $f$ -образ отрезка  $[a, b]$  состоит из одной точки  $A = B$ .

Пусть в  $\mathbb{R}^n$  дана ломаная  $L = A_0A_1 \dots A_m$ . Определим отображение  $\gamma_L: [0, m] \rightarrow \mathbb{R}^n$  на отрезке  $[k, k+1]$  для каждого  $k = 0, \dots, m-1$  формулой

$$\gamma_L: t \mapsto A_k(k+1-t) + A_{k+1}(t-k).$$

Из сказанного выше следует, что  $\gamma_L$  отображает отрезок  $[k, k+1]$  на ребро  $e_k = [A_k, A_{k+1}]$  ломаной  $L$ . Из леммы 2.36 вытекает, что отображение  $\gamma_L$  непрерывно. Ломаная  $L$  и непрерывная кривая  $\gamma_L$  одновременно замкнуты или незамкнуты; кроме того, они одновременно или являются ломаной и кривой без самопересечений, или нет. Образ отображения  $\gamma_L$  совпадает с  $L$ . Поэтому утверждение общей теоремы Жордана 3.3 о кривой  $\gamma_L$  — это в точности утверждение теоремы Жордана 3.7 для ломаных  $L$ .

**Замечание 3.11.** На самом деле, при доказательстве теоремы 3.7 мы покажем, что любые две точки из одной компоненты множества  $\Omega$  можно соединить ломаной.

### 3.3 Доказательство теоремы Жордана для ломаных

Нам нужно проделать некоторую подготовительную работу.

**Определение 3.12.** Пусть  $A$  и  $B$  — два произвольных непустых подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$ , тогда *расстоянием*  $\rho(A, B)$  между  $A$  и  $B$  назовем величину  $\inf\{|ab| : a \in A, b \in B\}$ , где как обычно  $|ab|$  обозначает длину отрезка, соединяющего точки  $a$  и  $b$ . В частности, так определяется *расстояние от точки  $a$  до множества  $B$* , а именно, оно равно  $\rho(\{a\}, B)$ .

Ясно, что для одноточечных подмножеств  $A = \{a\}$  и  $B = \{b\}$  имеем  $\rho(A, B) = |ab|$ .

**Замечание 3.13.** Заметим, что определенная только что функция на непустых подмножествах  $\mathbb{R}^n$  не задает метрику. В самом деле, хотя она симметрична, т.е.  $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ , остальные аксиомы не выполняются. Например, существуют непересекающиеся подмножества  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , для которых

$\rho(A, B) = 0$  (приведите пример таких подмножеств). Кроме того, неравенство треугольника выполняется не для всех  $A, B, C$ : например, для подмножеств прямой  $A = [0, 1]$ ,  $B = [1, 2]$  и  $C = [2, 3]$  имеем  $1 = \rho(A, C) \not\leq 0 + 0 = \rho(A, B) + \rho(B, C)$ .

**Лемма 3.14.** *Расстояние между двумя отрезками в  $\mathbb{R}^n$  равно 0 тогда и только тогда, когда они пересекаются.*

*Доказательство.* Докажем единственную нетривиальную часть леммы, а именно, что расстояние между непересекающимися отрезками  $[A_1, B_1]$  и  $[A_2, B_2]$  положительно. Отрезок  $[A_i, B_i]$  состоит из точек  $P_i(t_i) = A_i + (B_i - A_i)t_i$ , где  $t_i \in [0, 1]$ , поэтому функция  $\rho(t_1, t_2) = |P_1(t_1)P_2(t_2)|$  непрерывна. Эта функция определена на квадрате  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ , являющемся замкнутым и ограниченным множеством, а, значит, компактом по теореме 2.53. Поэтому, в силу следствия 2.56, функция  $\rho(t_1, t_2)$  принимает свое наименьшее значение в некоторой точке  $(x, y)$ . Так как отрезки не пересекаются,  $\rho(x, y) = |P_1(x)P_2(y)| > 0$ , поэтому  $\rho(t_1, t_2)$  — всюду положительная функция.  $\square$

**Следствие 3.15.** *Расстояние между двумя ломаными в  $\mathbb{R}^n$  равно 0 тогда и только тогда, когда ломаные пересекаются.*

*Доказательство.* Очевидным образом вытекает из предыдущего леммы 3.14, поскольку ломаная представляет собой объединение конечного числа отрезков.  $\square$

*Доказательство теоремы 3.7.*

**Стратегия** нашего доказательства такова.

- (1) Мы подберем для каждой точки  $P$  нашей ломаной  $L$  достаточно маленькую круговую окрестность  $U_P$ . При этом для внутренней точки  $P$  ломаная  $L$  разбивает  $U_P$  на две компоненты, а для концевой точки  $P$  (если  $L$  — не замкнута) ломаная  $L$  не разбивает  $U_P$ .
- (2) Мы докажем, что для каждой точки  $P$  нашей ломаной  $L$  любую точку из  $U_P \setminus L$  можно соединить ломаной, не пересекающей  $L$  с точкой из  $U_{A_0} \setminus L$ .
- (3) Мы докажем, что любую точку плоскости, не лежащую на  $L$ , можно соединить отрезком, не пересекающим  $L$ , с точкой из какой-то окрестности вида  $U_P$ .

Из пунктов (2) и (3) следует, что для незамкнутой ломаной  $L$  дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  состоит из одной компоненты, так как любую точку этого дополнения можно соединить ломаной с некоторой точкой множества  $U_{A_0} \setminus L$ , которое линейно связно.

Также из пунктов (2) и (3) следует, что для замкнутой ломаной  $L$  дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  состоит не более чем из двух компонент, так как любую точку этого дополнения можно соединить ломаной с некоторой точкой множества  $U_{A_0} \setminus L$ , которое состоит из двух компонент.

- (4) Наконец, мы докажем, что замкнутая ломаная разбивает плоскость не менее чем на две компоненты. Для этого мы построим на  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  локально постоянную функцию, принимающую два значения: точки, в которых эта функция принимает различные значения, лежат в разных компонентах.

Перейдем к реализации стратегии.

### 3.3.1 Реализация пункта (1)

Для каждой точки  $P$  ломаной  $L \subset \mathbb{R}^2$  обозначим через  $\varepsilon_P$  произвольное положительное число, меньшее, чем расстояние от  $P$  до объединения всех вершин ломаной  $L$  (если  $P$  — вершина, то расстояния рассматриваем только до вершин, отличных от  $P$ ), и меньше, чем расстояния от  $P$  до всех ребер ломаной  $L$ , не содержащих  $P$ .

Положим  $U_P = U_{\varepsilon_P}(P)$ , рис. 3.5. Ясно, что в  $U_P$  могут попасть только точки ребер, содержащих  $P$ , следовательно,  $U_P \cap L$  представляет собой

- (1) радиус круга  $U_P$ , если  $P$  — концевая вершина;
- (2) два различных радиуса круга  $U_P$ , если  $P$  — внутренняя вершина;
- (3) диаметр круга  $U_P$ , если  $P$  — внутренняя точка ребра.

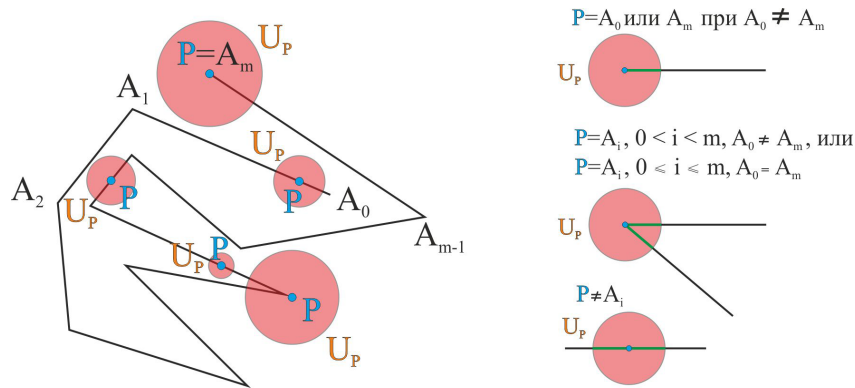


Рис. 3.5: Окрестность  $U_P$ .

Как было отмечено в предыдущей лекции, в первом случае множество  $U_P \setminus L$  линейно связно, а в оставшихся двух случаях состоит из двух компонент.

**Замечание 3.16.** Обратите внимание, что  $\varepsilon_P$  можно брать настолько малым, насколько нам нужно, так как ограничение на это число установлено только сверху.

### 3.3.2 Реализация пункта (2)

**Определение 3.17.** Пусть  $X$  — произвольное подмножество  $\mathbb{R}^n$ , и  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\varepsilon$ -окрестностью множества  $X$  будем называть множество  $U_\varepsilon(X) = \cup_{x \in X} U_\varepsilon(x)$ .

**Лемма 3.18.** Пусть  $P$  — внутренняя точка ребра  $e$  ломаной  $L$ , а  $S$  — одна из вершин ребра  $e$ . Тогда каждую точку  $Q \in U_P \setminus L$  можно соединить с некоторой точкой  $T \in U_S \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ . Обратно, каждую точку  $T \in U_S \setminus L$  можно соединить с некоторой точкой  $Q \in U_P \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ . Более того, эту соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в  $U_\varepsilon(e)$ , где  $\varepsilon = \max(\varepsilon_P, \varepsilon_S)$ .

*Доказательство.* Пусть  $A$  — точка на интервале  $(P, S)$ , отстоящая от  $S$  менее чем на  $\varepsilon_S/2$ . Обозначим через  $L'$  объединение всех ребер ломаной  $L$ , кроме  $e$ . Тогда  $[A, P] \cap L' = \emptyset$ , поэтому, по следствию 3.15,  $\delta = \rho([A, P], L') > 0$ . Отсюда вытекает, что каждый отрезок  $[A', P']$ , полученный из  $[A, P]$  смещением в перпендикулярном  $e$  направлении на положительное расстояние, меньшее, чем  $\delta$ , не пересекает  $L$ , так как смещенный отрезок не пересекает ни  $e$ , ни  $L'$ . Заметим, что  $A' \in U_S$  при любом смещении, меньшем  $\delta$ , так как  $\delta < |AS| < \varepsilon_S/2$  и, значит,  $|A'S|^2 = |A'A|^2 + |AS|^2 < (\varepsilon_S/2)^2 + (\varepsilon_S/2)^2 < \varepsilon_S^2$ . Кроме того,  $P' \in U_P$  при любом смещении, меньшем  $\varepsilon_P$ . Зададим положительную величину смещения меньшей, чем  $\delta$  и  $\varepsilon_P$ , тогда  $A' \in U_S$  и  $P' \in U_P$ . В частности, при таком смещении имеем  $[A', P'] \subset U_\varepsilon(e)$ .

Для доказательства первого утверждения леммы, выберем направление смещения так, чтобы точки  $P'$  и  $Q$  оказались в одной компоненте множества  $U_P \setminus L$ , соединим точки  $Q$  и  $P'$  отрезком (он целиком лежит в  $U_P \setminus L$ ), а в качестве  $T$  возьмем точку  $A'$ . Для доказательства второго утверждения леммы, выберем направление смещения так, чтобы точки  $A'$  и  $T$  оказались в одной компоненте множества  $U_S \setminus L$ , соединим точки  $T$  и  $A'$  непрерывной кривой (это можно сделать ломаной), лежащей в  $U_S \setminus L$ , а в качестве  $Q$  возьмем точку  $P'$ , рис. 3.6.

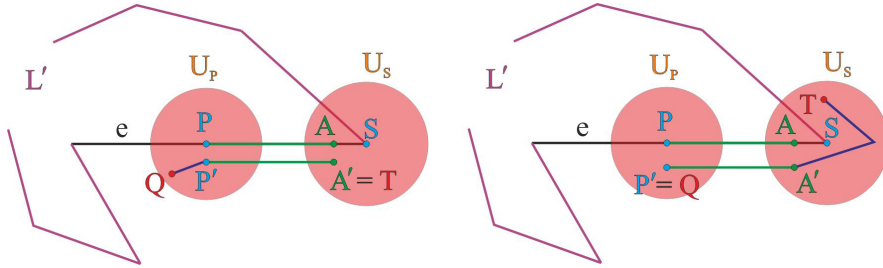


Рис. 3.6: Доказательство леммы 3.18.

Осталось заметить, что все фрагменты построенной ломаной лежат в  $U_\varepsilon(e)$ .  $\square$



**Следствие 3.19.** Пусть  $P$  — произвольная точка ломаной  $L$ , а  $Q$  — произвольная точка из  $U_P \setminus L$ . Тогда существует такая точка  $T \in U_{A_0} \setminus L$ , что  $Q$  и  $T$  соединяются ломаной  $\gamma$ , не пересекающей  $L$ . Более того, эту соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в  $U_\varepsilon(L)$ , где  $\varepsilon = \max(\varepsilon_P, \varepsilon_{A_0})$ .

*Доказательство.* Если  $P = A_0$ , то  $\gamma$  — это 0-звенная ломаная  $Q$  (или кривая, которая является отображением отрезка в точку  $Q = T$ ).

Пусть теперь  $P \neq A_0$ . Тогда  $P \in (A_i, A_{i+1}]$  для некоторого  $i$ . Если  $P = A_{i+1}$ , выберем произвольную точку  $P_i \in (A_i, A_{i+1})$  и соединим  $Q$  с некоторой точкой  $Q_i \in U_{P_i} \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ , что можно сделать в силу леммы 3.18. Затем, по этой же лемме, соединим  $Q_i$  и некоторую  $T_i \in U_{A_i}$  ломаной, не пересекающей  $L$ . В результате, получим ломаную, не пересекающую  $L$  и соединяющую  $Q$  с некоторой точкой  $T_i \in U_{A_i}$ . Если же  $P \neq A_{i+1}$ , то сразу получим такую ломаную.

Затем будем последовательно соединять не пересекающимися с  $L$  ломаными точку  $T_i$  и некоторую  $Q_{i-1} \in U(P_{i-1})$ ,  $P_{i-1} \in (A_{i-1}, A_i)$ , точку  $Q_{i-1}$  и некоторую  $T_{i-1} \in U_{A_{i-1}}$ , и т.д., пока не дойдем до точки  $T_0 \in U_{A_0}$ . Остается заметить, что радиусы  $\varepsilon_X$  всех встречающихся кругов  $U_X$  (кроме  $U_P$  и  $U_{A_0}$ ) мы можем выбирать сколь угодно малыми, а именно, выберем их меньшими, чем  $\varepsilon$ . Тогда, по лемме 3.18, каждый построенной по этой лемме фрагмент ломаной будет лежать в  $\varepsilon$ -окрестности ребра, которому принадлежат центры кругов, так что вся ломаная лежит в  $U_\varepsilon(L)$ .  $\square$

### 3.3.3 Реализация пункта (3)

Рассмотрим теперь произвольную точку  $R \in \Omega$ . Отрезок  $[R, A_0]$  пересекает ломаную  $L$  по конечному числу отрезков и точек. Обозначим через  $P$  ближайшую к  $R$  точку из  $[R, A_0] \cap L$ . Пусть  $Q$  — произвольная точка из  $U_P \cap [R, P)$ , тогда  $Q \in \Omega$ , причем отрезок  $[R, Q]$  не пересекает  $L$ . По следствию 3.19, существует ломаная  $\gamma$ , соединяющая  $Q$  с некоторой точкой  $T \in U_{A_0} \setminus L$  и не пересекающая  $L$ . Последовательно проходя отрезок  $[R, Q]$  и ломаную  $\gamma$ , мы получим ломаную, соединяющую  $R$  и  $T$  и не пересекающую  $L$ . Таким образом, каждая точка  $R \in \Omega$  лежит в той же компоненте, что и некоторая точка из  $U_{A_0} \setminus L$ , рис. 3.7.

Итак, как было отмечено выше в описании стратегии доказательства, если ломаная  $L$  не замкнута, то множество  $U_{A_0} \setminus L$  линейно связно, поэтому  $\Omega$  состоит из одной компоненты. Если же  $L$  замкнута, то  $U_{A_0} \setminus L$  состоит из двух компонент, поэтому  $\Omega$  состоит не более чем из двух компонент.

### 3.3.4 Реализация пункта (4)

Покажем теперь, что  $\Omega$  состоит не менее чем из двух компонент. Введем на плоскости декартову систему координат  $Oxy$ , для которой все вершины ломаной  $L$  имеют разные абсциссы (такая система координат существует, так как это условие запрещает лишь конечное число направлений оси  $Oy$ ).

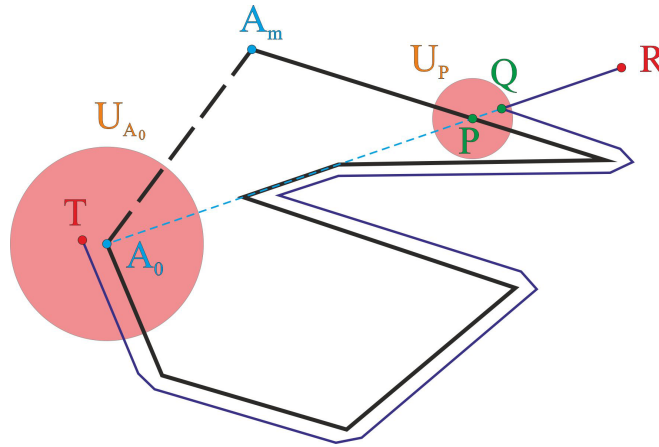


Рис. 3.7: Реализация пункта (3).

Для каждой точки  $P \in \Omega$  рассмотрим луч  $\ell_P$ , выходящий из  $P$  и сонаправленный с осью  $y$ . Пусть  $e$  — произвольное ребро ломаной  $L$ . Тогда  $\ell_P \cap e$  состоит не более чем из одной точки, в частности,  $\ell_P \cap L$  представляет собой конечное число точек.

Точку  $Q \in \ell_P \cap L$  назовем *существенной*, если выполняется одно из двух условий:

- (1) точка  $Q$  лежит внутри некоторого ребра ломаной  $L$ ;
- (2) точка  $Q$  — вершина ломаной  $L$ , и выходящие из  $Q$  ребра ломаной  $L$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через  $\ell_P$ , рис. 3.8.

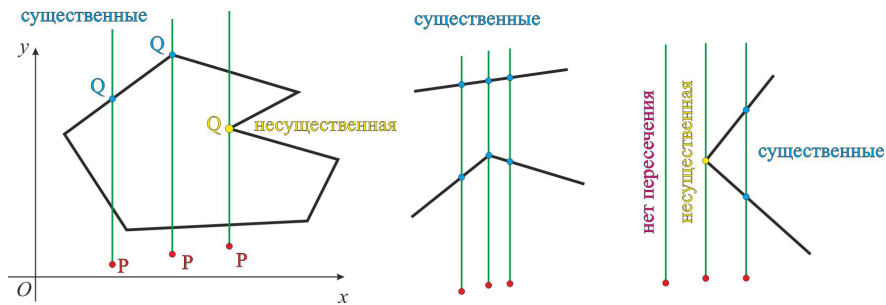


Рис. 3.8: Реализация пункта (3).

Положим  $\eta(P) = 0$ , если число существенных пересечений луча  $\ell_P$  с ломаной  $L$  четно, и  $\eta(P) = 1$  в противном случае.

Выясним, что происходит с числом  $\eta(P)$  при изменении положения точки  $P$  внутри множества  $\Omega$ . Предположим, что  $Q \in \ell_P \cap L$  — внутренняя точка некоторого ребра  $e$  ломаной  $L$ . Выберем  $\delta_Q > 0$  так, что оно было меньше минимума абсолютных величин разностей между  $x$ -координатой точки  $Q$  и  $x$ -координатами вершин ломаной, а также меньшее расстояния от  $P$  до ломаной  $L$ . Тогда при смещениях точки  $P$  на расстояние, меньшее  $\delta_Q$ , ребро  $e$  по-прежнему пересекается со смещенным лучом  $\ell_P$ , так что вклад ребра  $e$  в четность числа  $\eta(P)$  не меняется.

Пусть теперь  $Q$  — вершина ломаной  $L$ , а  $e$  и  $f$  — выходящие из  $Q$  ребра ломаной  $L$ , так что  $Q = (e \cup f) \cap \ell_P$ .

Если  $Q$  — существенное пересечение, то выберем число  $\delta_Q > 0$  так, чтобы оно было меньше абсолютных величин разностей между  $x$ -координатой вершины  $Q$  и  $x$ -координатами остальных вершин ломаной, а также меньшее расстояния от  $P$  до ломаной  $L$ . Тогда при сдвиге точки  $P$  на расстояние, меньшее  $\delta$ , смещенный луч  $\ell_P$  продолжает пересекать  $e \cup f$  ровно по одной точке, причем это пересечение остается существенным, поэтому вклад пары ребер  $e$  и  $f$  в четность числа  $\eta(P)$  не меняется.

Осталось разобрать случай, когда  $Q$  — несущественное пересечение. Выберем  $\delta_Q > 0$  как в предыдущем абзаце. Обозначим через  $\ell$  прямую, проходящую через  $\ell_P$ . Пусть  $P$  смещается на расстояние, меньшее  $\delta_Q$ . Если  $P$  смещается вдоль  $\ell$ , то  $Q$  остается несущественным пересечением. Если  $P$  смещается в ту ограниченную  $\ell$  полуплоскость, которая содержит ребра  $e$  и  $f$ , то вместо несущественного пересечения  $Q$  возникают два существенных пересечения (с ребрами  $e$  и  $f$ ), так что их суммарный вклад в  $\eta(P)$  равен нулю. Если же  $P$  смещается в противоположную полуплоскость (не содержащую  $e$  и  $f$ ), то ребра  $e$  и  $f$  перестают пересекаться со смещенным  $\ell_P$  и, значит, вклад этих ребер в  $\eta(P)$  также равен нулю.

Пусть  $\delta > 0$  меньше любого из конечного числа чисел  $\delta_Q$ , где  $Q$  пробегает все точки из  $\ell_P \cap L$ . Из приведенных выше рассуждений следует, что если  $P' \in U_\delta(P)$ , то  $\eta(P) = \eta(P')$ ; иными словами, функция  $\eta$  на  $\Omega$  локально постоянна. Так как  $\eta$  принимает конечное число значений, применимо следствие 2.41, в соответствии с которым  $\eta$  постоянна на каждой компоненте.

Покажем теперь, что существуют точки, в которых  $\eta$  принимает различные значения. Пусть  $Q$  — середина некоторого ребра  $e$  ломаной  $L$ . Напомним, что круг  $U_Q$  имеет радиус  $\varepsilon_Q$  и не пересекает ребра ломаной  $L$  отличные от  $e$ . Обозначим через  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно результат смещения точки  $Q$  в направлении оси  $y$  и в противоположном направлении на расстояние  $\varepsilon_Q/2$ . Тогда точки  $Q_i$  лежат в  $\Omega$ ,  $[Q_1, Q_2] \cap L = Q$  и  $\ell_{Q_1} \subset \ell_{Q_2}$ . Таким образом,  $\ell_{Q_2} \cap L = (\ell_{Q_1} \cap L) \cup \{Q\}$  и  $Q$  является существенной точкой из  $\ell_{Q_2} \cap L$ , поэтому  $\eta(Q_1) \neq \eta(Q_2)$  и, значит, точки  $Q_1$  и  $Q_2$  лежат в разных компонентах множества  $\Omega$ . Тем самым, множество  $\Omega$  имеет не менее двух компонент. Последнее наблюдение завершает доказательство теоремы 3.7.  $\square$

## Литература к главе 3

- [1] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, 2004, изд-во МЦНМО.
- [2] Вольперт А.И. *Элементарное доказательство теоремы Жордана*. УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 168–172.
- [3] Филиппов А.Ф. *Элементарное доказательство теоремы Жордана*. УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 173–176.
- [4] Парамонов П.В. *Теорема Жордана*,  
<http://www.math.msu.su/tffa/lectures/JORDANThlec2012.pdf>

## Упражнения к главе 3

### Упражнение 3.1.

- (1) Приведите пример непересекающихся подмножеств на прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (2) Приведите пример непересекающихся замкнутых подмножеств прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (3) Существуют ли два замкнутых непересекающихся подмножества окружности, находящиеся на нулевом расстоянии?

**Упражнение 3.2.** Пусть  $A$  — некоторое подмножество плоскости. Рассмотрим функцию  $f(x) = \inf\{|xy| : y \in A\}$  (расстояние от  $x$  до  $A$ ). Докажите, что  $f$  непрерывна.

**Упражнение 3.3.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — непрерывные функции, заданные на топологическом пространстве  $X$ . Докажите, что функция  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  также непрерывна.

**Упражнение 3.4.** Докажите, не используя теорему Жордана, что квадрат (стороны квадрата) разбивает плоскость на 2 компоненты.

**Упражнение 3.5.** Докажите, не используя теорему Жордана, что треугольник (замкнутая трехзвенная ломаная) разбивает плоскость на 2 компоненты.

**Упражнение 3.6.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — замкнутая ломаная без самопересечений такая, что для каждого ее ребра ломаная  $L$  лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через это ребро (такие ломаные иногда называют *выпуклыми*). Не используя теорему Жордана, докажите, что  $L$  разбивает плоскость на 2 компоненты.

**Упражнение 3.7.** Докажите, что открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$  линейно связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить ломаной.

**Упражнение 3.8.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — незамкнутая ломаная без самопересечений. Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность  $U_\varepsilon(L)$  ломаной  $L$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — произвольные точки из  $U_\varepsilon(L) \setminus L$ . Покажите, что их можно соединить ломаной, не пересекающей  $L$  и лежащей в  $U_\varepsilon(L)$ .

**Упражнение 3.9.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из некоторого круга  $U_r(A)$  выбрасыванием трех различных его радиусов. Докажите, что  $X$  состоит из трех компонент.

**Упражнение 3.10.** Пусть  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  — три отрезка, причем любые два из них имеют только одну общую точку  $O$ . Докажите, что объединение этих отрезков не разбивает плоскость, т.е. что  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (OA \cup OB \cup OC)$  линейно связно.

**Упражнение 3.11.** Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — незамкнутые ломаные без самопересечений, лежащие на плоскости  $\mathbb{R}^2$  и не имеющие общих точек. Докажите, что  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$  линейно связно.

**Упражнение 3.12.** Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_m, B_m]$$

отрезков  $[A_i, B_i] \subset \mathbb{R}^2$  и положим  $X_k = \cup_{i=1}^k [A_i, B_i]$ . Предположим, что для каждого  $k = 2, \dots, m$  выполняется или  $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$ , или  $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$ . Докажите, что любые две точки из каждого множества  $\Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus X_k$  можно соединить ломаной, лежащей в  $\Omega_k$ . В частности, каждое множество  $\Omega_k$  — линейно связно.