

Глава 12

Шарнирные механизмы.

План. Механизмы, шарнирные механизмы, механизм Ватта, стопоходящая машина Чебышева, инверсор Понселе, инверсор Гарта, математическое определение шарнирных механизмов, шарниры и стержни, добавление шарнира (к механизму, на его ребро, на прямую, содержащую ребро), добавление шарнирного механизма, шарнирный ромб, укрепление шарнирного механизма, шарнирные параллелограммы и антипараллелограммы, что и как можно начертить с помощью шарнирных механизмов, подалгебраические множества, теорема Кинга, алгебраические кривые, теорема Кемпе, реверсор Кемпе, сумматор Кемпе, транслятор Кемпе, идея доказательства теоремы Кемпе.

В этой главе мы обсудим геометрию *механизмов*, т.е. совокупностей тел (в основном, деталей различных машин), подвижно связанных друг с другом и совершающих движения, обусловленные этими связями. Обычно механизмы служат для преобразования одного типа движения в другой. Механизмы распространены повсеместно. К ним относятся, например, устройства, реализующие открытие дверей и окон (дверные или оконные петли), устройства, приводящие в действие велосипедные тормоза, степлеры, различные конструкции в автомобиле (кривошипно-шатунный механизм, карданный шарнир, шаровой подвес, механизм, приводящий в движение дворники ветрового стекла, руль, разные части карбюратора и т.д.). Даже человеческий скелет построен по тому же принципу: кости соединяются подвижно друг с другом в достаточно хитрую конфигурацию, называемую суставом, что позволяет менять форму тела и совершать крайне сложные движения.

Нас будут интересовать шарнирные механизмы, в которых составляющие их тела представляют собой твердые стержни (с математической точки зрения — прямолинейные отрезки в некотором объемлющем пространстве), а крепления — шарниры, соединяющие малые области некоторых пар стержней (отождествляющие некоторые пары точек отрезков стержней) так, что скрепленные стержни могут вращаться относительно шарнира. Кроме того, мы будем также допускать шарнирные крепления стержней к внешним объектам (математически это означает фиксирование положений некоторых точек отрезков-стержней в объемлющем пространстве). Если в качестве объемлющего пространства выбрать плоскость, то механизм будет называться *плоским*, а если трехмерное пространство, то —

пространственным.

Более подробно познакомиться с различными механизмами, в частности, с тем, как эти механизмы функционируют, можно на сайтах [1], [2], [3]. В интернете имеется также многочисленная литература, посвященная механизмам, см., например, Википедию или видео-лекции А.Б.Сосинского [4] и [5].

12.1 Параллелограмм Ватта

Начиная с 1763 года, Джеймс Ватт занимался усовершенствованием популярной в то время, но малоэффективной пароатмосферной машины Ньюкомена, которая, в общем-то, годилась только для перекачивания воды, см. рис. 12.1.

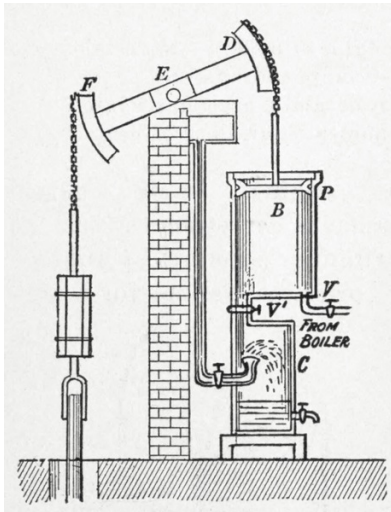


Рис. 12.1: Паровой двигатель Ньюкомена.

Среди многочисленных инженерных улучшений, придуманных Ваттом, для нас наиболее значимым будет модификация приводной системы. В машине Ньюкомена привод, соединявший поршни, которые должны были двигаться вдоль параллельных направляющих, состоял из коромысла с закругленными краями и цепями, связывающими это коромысло со штоками (стержнями), непосредственно прикрепленными к поршням. Наличие цепей приводило к тому, что такая приводная система реагировала только на тягу, что существенно снижало эффективность машины. Чтобы использовать мощность обратного хода поршня, нужно было заметить цепи на жесткие стержни. Но тогда эти стержни должны были двигаться по прямым или почти по прямым. Именно такую конструкцию и удалось придумать Ватту.

Рассмотрим в плоскости механизм, представляющий ломаную $O_1A_1A_2O_2$, крайние ребра которой имеют одинаковую длину, а концы O_1 и O_2 закреплены, см. рис. 12.2. Пусть M — середина A_1A_2 . Ватт заметил, что при движении всей системы в целом точка M незначительно уклоняется от прямой. На самом деле, траектория точки M — вытянутая “восьмерка”.

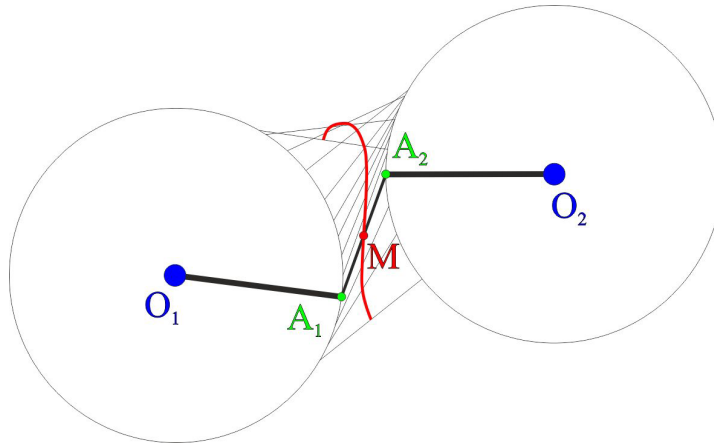


Рис. 12.2: Механизм Ватта упрощенный.

Таким образом, описанный выше механизм позволял переводить вращательное движение стержней в почти прямолинейное. Однако оставалась одна проблема: для создания достаточно протяженной почти прямолинейной части траектории движения точки M необходимо было разнести крепления O_1 и O_2 на большое расстояние, что приводило к недопустимому увеличению размеров машинного отделения. Для решения этой проблемы Ватт применил *пантографическое расширение* (*пантограф* — прибор для перерисовки чертежей в другом масштабе), дополнив среднюю часть A_1A_2 до параллелограмма $A_1A_2B_2B_1$, где A_2 является серединой отрезка B_2O_2 (в дальнейшем такой параллелограмм стали называть *параллелограммом Ватта*), см. рис. 12.3. Теперь вместо M можно взять точку B_1 , у которой траектория движения вдвое больше, чем у M .

Теперь легко собрать механизм, который будет связывать вращательное и поступательные движения. Для этого достаточно продлить стержень B_2O_2 за точку крепления O_2 и к концу C прикрепить с помощью шарнира еще один стержень CD , а точку D закрепить шарниром на колесе. Таким образом, если к точке B_1 прикрепить стержень, связанный с поршнем паровой машины, то прямолинейное движение этого поршня, вызванное паром, будет преобразовываться во вращательное движение колеса, см. рис. 12.4.

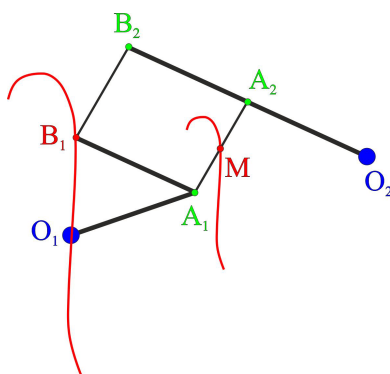


Рис. 12.3: Механизм Ватта. Параллелограмма Ватта.

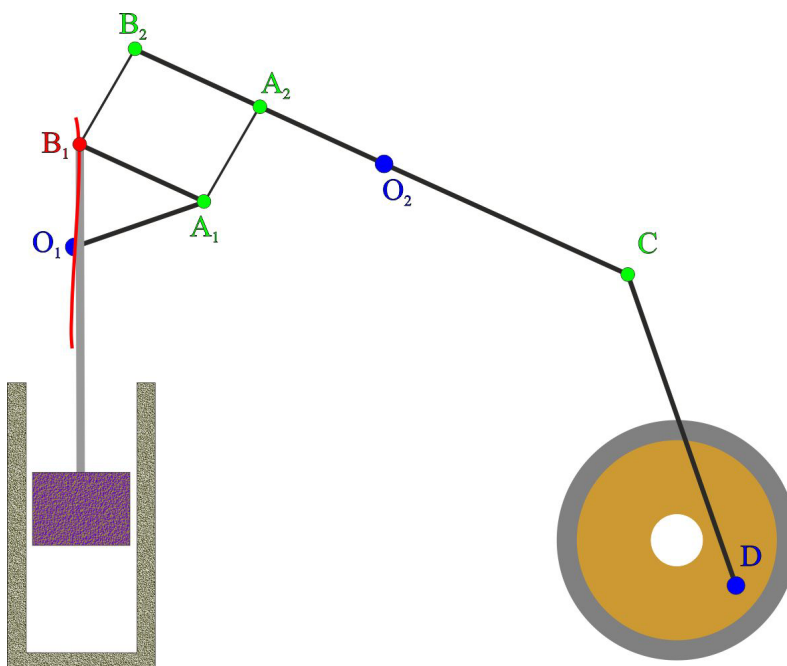


Рис. 12.4: Преобразование поступательного движения во вращательное.

12.2 Стопоходящая машина Чебышева

Другой интересный классический шарнирный механизм, переводящий вращательное движение в почти прямолинейное, был изобретен П.Л.Чебышевым и называется “стопоходящая машина Чебышева” (хранится в Политехническом музее г. Москвы). Вот ее внешний вид, см. рис. 12.5.

Чтобы разобраться, как “ходит” машина Чебышева, начнем с простейшей составной части этой машины — лямбда-механизма, см. рис. 12.6. В нем точки O_1 и O_2 — закрепленные шар-

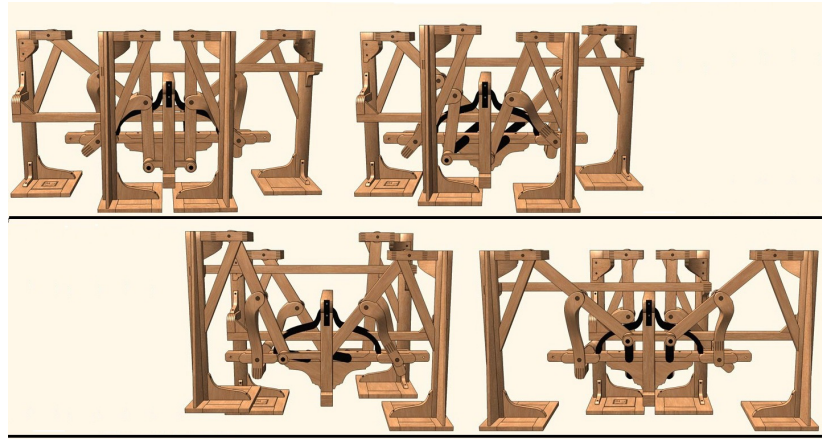


Рис. 12.5: Один шаг стопоходящей машины Чебышева.

ниры; A_1 и A_2 — подвижные шарниры; A_1 — середина стержня A_2B ; длина стержня A_1A_2 равна половине длины стержня A_2B ; точка A_2 движется по окружности, при этом свободный конец B описывает замкнутую кривую γ , изображенную на рисунке.

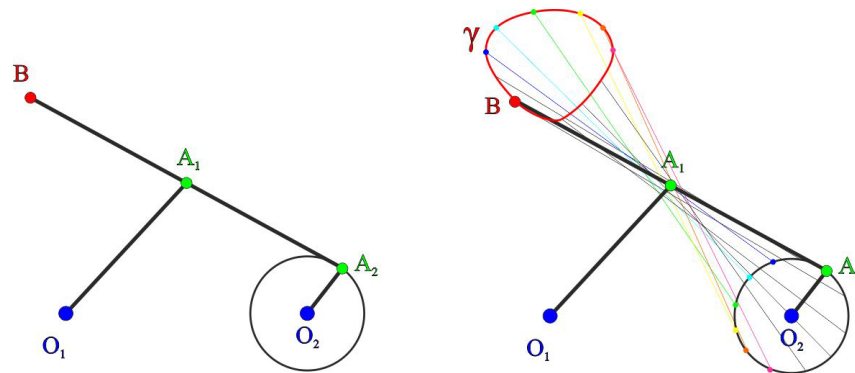


Рис. 12.6: Лямбда-механизм стопоходящей машины Чебышева.

Отметим, что верхняя часть кривой γ достаточно прямолинейна (подбирая соотношения между длинами стержней и расстоянием между точками O_1 и O_2 , можно добиться более наглядной прямолинейности соответствующего участка кривой γ .) Кроме того, верхняя часть кривой γ соответствует левой части окружности, по которой вращается точка A_2 .

Прикрепим теперь к точке B “ногу”. Добавим к полученной конструкции ее копию, которая получается если переместить A_2 в диаметрально противоположную точку. Теперь в нашем механизме уже две ноги, рис. 12.7.

Добавив симметричную копию и соединив ее с исходной, получим механизм на четырех ногах. Это и есть стопоходящая машина Чебышева, рис. 12.8.

На рис. 12.9 показано трехмерное изображение полученной конфигурации стержней и шарниров.

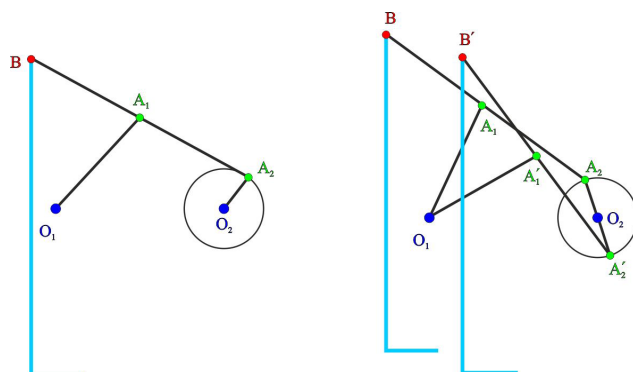


Рис. 12.7: Лямбда-механизм с ногой, а также его удвоение.

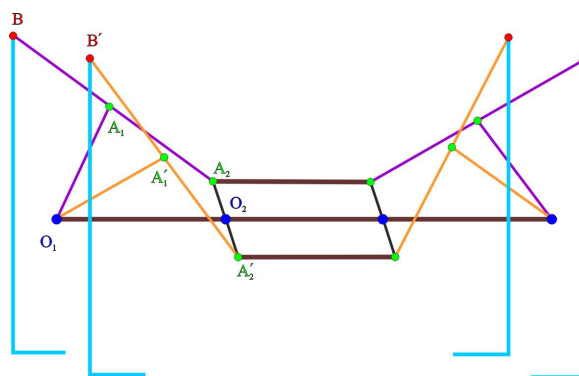


Рис. 12.8: План стопоходной машины Чебышева.

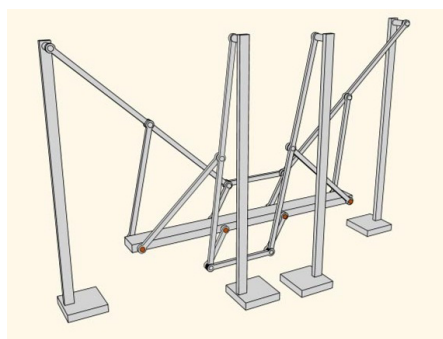


Рис. 12.9: Трехмерный вид машины Чебышева.

12.3 Инверсор Понселе и инверсор Гарта

Ни Ватту, ни Чебышеву, ни многим другим исследователям так и не удалось построить шарнирный механизм, который превращал бы круговое движение в точное прямолинейное. Тем большее изумление вызвало в кругах математиков изобретение такого механизма, сделанное морским офицером Понселе (Charles-Nicolas Peaucellier) в 1864 году. Это изобретение использует механизм, реализующий инверсию, и потому называется *инверсором Понселе*.

12.3.1 Инверсор Понселе

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ ромб $ABCD$, и пусть O — точка на луче CA , лежащая вне ромба. Соединим точку O с точками B и D . Выберем на плоскости еще одну точку R и соединим ее отрезком с точкой A . Точки O и R будем считать неподвижными шарнирами, а все остальные концы проведенных отрезков — подвижными. Сами отрезки будем считать жесткими стержнями. Полученная конструкция и называется *инверсором Понселе*, рис. 12.10.

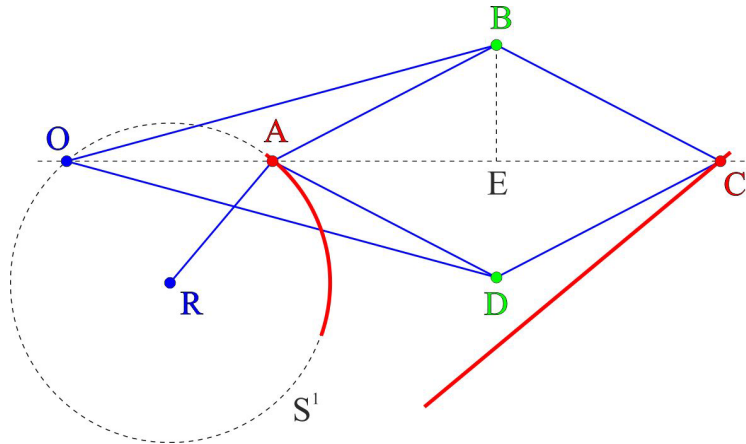


Рис. 12.10: Инверсор Понселе.

Это название объясняется тем, что при движении точки P по окружности S^1 с центром в точке R точка C двигается по образу этой окружности при инверсии относительно некоторой окружности с центром в точке O . В частности, если $|RA| = |RO|$, то окружность S^1 проходит через центр инверсии и, поэтому, ее образ — прямая. В этом, собственно, и состоит идея открытия, сделанного Понселе.

Докажем, что при любом расположении точки A на окружности S^1 точки A и C связаны инверсией относительно одной и той же окружности с

центром в O . Для этого достаточно показать, что $|OA| \cdot |OC|$ не зависит от положения точки A . Опустим из вершины B равнобедренного треугольника ABC высоту на его основание AC , и пусть E — основание этой высоты. Имеем

$$\begin{aligned} |OA| \cdot |OC| &= (|OE| - |AE|)(|OE| + |AE|) = |OE|^2 - |AE|^2 = \\ &= (|OE|^2 + |BE|^2) - (|AE|^2 + |BE|^2) = |OB|^2 - |AB|^2, \end{aligned}$$

однако последняя величина не зависит от положения точки A , так как длины отрезков-стержней OB и AB фиксированы, что и требовалось.

Замечание 12.1. Первые сообщения о построении инверсора были в частном письме офицера инженерного корпуса французской армии Понселе, датированном 1864 годом. Однако письмо подробностей построения не содержало. В 1868 году студент П.Л. Чебышева Липман Липкин изобретает инверсор и в 1870 публикует подробную статью. Наконец, в 1873 году появляется статья Понселе с описанием такого же инверсора и со ссылкой на работу Липкина (это замечание взято из [1]).

12.3.2 Инверсор Гарта

Приведем пример еще одного инверсора, изобретенного Гартом (Harty) в 1875 году. Этот шарнирный механизм состоит из 5 отрезков-стержней. Он представляет собой конструкцию, составленную из боковых сторон и диагоналей равнобокой трапеции $ABCD$ (с основанием AD). На интервалах AB , AC и BD фиксированы точки O , P и Q , лежащие на прямой, параллельной основаниям трапеции. Точка S выбрана так, что вместе с точками O и P образует равнобедренный треугольник, причем S и P соединены стержнем. Точки O и S соответствуют неподвижным шарнирам, а все остальные — подвижным, рис. 12.11.

Задача 12.2. Покажите, что при движении точки P (по окружности с центром в S) точка Q движется по прямой.

12.4 Формализация

В данном параграфе мы дадим математические определения шарнирных механизмов. Помимо усиления уровня строгости, формализация позволяет отвечать на инженерно не очевидные вопросы, например на то, что можно начертить с помощью шарнирных механизмов, а что нет (этими проблемами мы займемся в следующих параграфах).

Итак, определим, что же такое математический шарнирный механизм. Рассмотрим граф (G, ℓ) , где $G = (V, E)$ — граф с множеством вершин V и множеством ребер E , а $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}$ — положительная вещественная функция на множестве ребер этого графа. Вершины графа G будем называть *шарнирами*, его ребра — *стержнями*, а значения функции ℓ на стервне — *длиной*

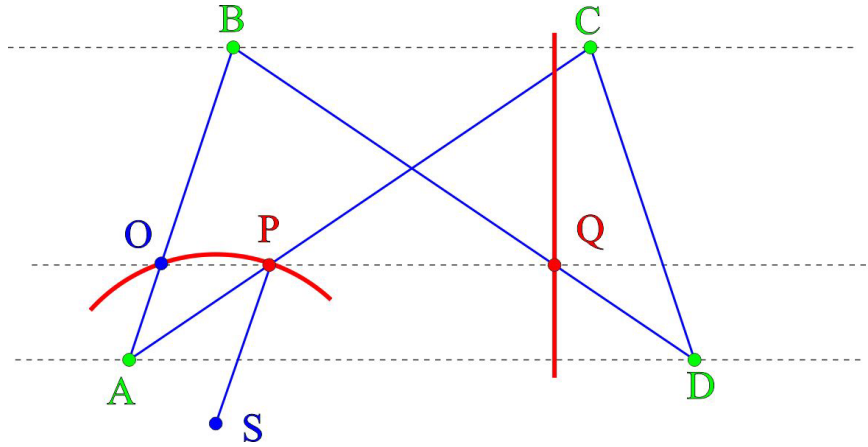


Рис. 12.11: Инверсор Гарта.

этого *стержня*. В качестве объемлющего пространства, в котором мы будем располагать шарнирный механизм, рассмотрим $\mathbb{R}^d$. В этих лекциях нас будет интересовать в основном плоский случай, т.е. когда $d = 2$. Чтобы смоделировать закрепление некоторых шарниров в объемлющем пространстве, рассмотрим подмножество $W \subset V$, элементы которого будем называть *неподвижными* или *граничными шарнирами*, а элементы из $V \setminus W$, — *подвижными* или *внутренними шарнирами*. Множество W будем обозначать через ∂G и называть *границей*. Отображение $\partial: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^d$ будем называть *граничным отображением*. Именно ∂ задает крепление шарниров в объемлющем пространстве. *Шарнирным механизмом* $\mathcal{L}$ назовем каждую тройку (G, ℓ, ∂) в сделанных выше обозначениях. Шарнирный механизм можно представлять себе конструкцией, собранной отдельно, в стороне, из шарниров и стержней (взвешенный граф (G, ℓ)), для которой запланировано, в каких местах объемлющего пространства будут крепиться граничные шарниры (отображение ∂). (Отметим, что не при всякой функции ℓ шарнирный механизм можно “собрать в стороне”, т.е. реализовать хоть в каком-нибудь объемлющем пространстве. Действительно, если такой механизм реализован, то для каждой тройки попарно смежных шарниров должно, по крайней мере, выполняться неравенство треугольника, что, вообще говоря, априори не предполагается).

Следующее понятие моделирует конкретное расположение шарнирного механизма. *Конфигурацией* шарнирного механизма $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$ назовем отображение $\mathcal{C}: V \rightarrow \mathbb{R}^d$, продолжающее ∂ , т.е. $\mathcal{C}|_{\partial G} = \partial$, и уважающее ℓ , т.е. для любого ребра uv графа G имеем $|\mathcal{C}(u)\mathcal{C}(v)| = \ell(uv)$. Множество всех конфигураций шарнирного механизма $\mathcal{L}$ назовем *конфигурационным пространством* этого механизма и будем обозначать через $\mathcal{S}(\mathcal{L})$. Точку $\mathcal{C}(v) \in \mathbb{R}^d$ назовем *положением шарнира* v в конфигурации $\mathcal{C}$.

Подмножество объемлющего пространство, составленное из всевозможных положений $\mathcal{C}(v)$, $\mathcal{C} \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$, шарнира v обозначим через $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$ и назовем *конфигурационным множеством шарнира v* . Если понятно, о каком шарнирном механизме идет речь, то вместо $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$ будем писать $\mathcal{S}(v)$. Отметим, что шарнир может иметь одинаковые положения в разных конфигурациях. Количество всех конфигураций, приводящих к положению $s \in \mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$ шарнира v , т.е. число элементов во множестве $\{\mathcal{C} \in \mathcal{S}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{C}(v) = s\}$, назовем *кратностью положения s* .

Приводимые ниже определения, вплоть до конца этого параграфа, понадобятся нам в основном для описания понятия укрепления шарнирного механизма (параграф 12.4.2).

Если для некоторого шарнирного механизма $\mathcal{L} = (G, \ell, \partial)$ и множества $M \subset \mathbb{R}^d$ существует конфигурация $\mathcal{C} \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$, для которой $M = \mathcal{C}(\partial G)$, то говорят, что M можно соединить шарнирным механизмом $\mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$ — некоторый шарнирный механизм, и u не является элементом множества V . Рассмотрим шарнирный механизм $\mathcal{L}' = (G' = (V \cup \{u\}, E), \ell, \partial)$ и будем говорить, что $\mathcal{L}'$ получен из $\mathcal{L}$ добавлением шарнира u .

Представление о шарнирном механизме как о конструкции, собранной из жестких стержней, приводит к интуитивному представлению об операции добавления шарнира на стержень, или даже на прямую, содержащую стержень. Однако мы, в формальном определении, вместо стержней рассматриваем просто пары точек — “пары концов стержней”, как это принято в теории графов, поэтому, чтобы эти понятия имели смысл, дадим соответствующие определения.

Пусть $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$ — произвольный шарнирный механизм, и $vw \in E$ — некоторый его стержень. Построим новый шарнирный механизм $\mathcal{L}' = (G' = (V', E'), \ell', \partial')$ следующим образом. Пусть u не является элементом из V . Положим $V' = V \cup \{u\}$, $\partial G' = \partial G$ и $\partial' = \partial$. Рассмотрим несколько вариантов.

(1) Пусть $E' = (E \setminus \{vw\}) \cup \{uv, uw\}$. Функцию ℓ' зададим равной ℓ на $E \setminus \{vw\}$, а на $\{uv, uw\}$ удовлетворяющей условию $\ell'(uv) + \ell'(uw) = \ell(vw)$ (таких функций бесконечно много). Тогда будем говорить, что шарнирный механизм $\mathcal{L}'$ получен из $\mathcal{L}$ добавлением шарнира u на стержень vw . Кроме того, будем говорить, что шарнир u делит стержень vw в отношении $\ell'(uv) : \ell'(uw)$. В частности, если это отношение равно 1, то говорят, что шарнир u помещен в середину стержня vw .

(2) Пусть $E' = E \cup \{uv, uw\}$. Функцию ℓ' зададим равной ℓ на E , а на $\{uv, uw\}$ удовлетворяющей условию $\ell'(uv) + \ell'(uw) = \ell(vw)$ (таких функций бесконечно много). Тогда будем говорить, что шарнирный механизм $\mathcal{L}'$ получен из $\mathcal{L}$ добавлением шарнира u на луч vw вне стержня vw .

(2') Если реализуется или случай (1), или случай (2), то говорим, что шарнирный механизм $\mathcal{L}'$ получен из $\mathcal{L}$ добавлением шарнира u на луч vw .

(3) Пусть $E' = E \cup \{uv, vw\}$. Функцию ℓ' зададим равной ℓ на E , а на $\{uv, vw\}$ удовлетворяющей условию $\ell'(uv) + \ell'(vw) = \ell(vw)$ (таких функций бесконечно много). Тогда будем говорить, что шарнирный механизм $\mathcal{L}'$ получен из $\mathcal{L}$ добавлением шарнира u на луч vw вне стержня vw .

(3') Если реализуется или случай (1), или случай (3), то говорим, что шарнирный механизм $\mathcal{L}'$ получен из $\mathcal{L}$ добавлением шарнира u на луч vw .

(4) Если известно, что реализуется один из случаев (1), (2) или (3), то говорим, что шарнирный механизм $\mathcal{L}'$ получен из $\mathcal{L}$ добавлением шарнира u на прямую vw .

Пусть $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ — некоторое множество точек на стержнях шарнирного механизма $\mathcal{L}$, и механизм $\mathcal{L}_U$ получается подразбиением механизма $\mathcal{L}$ с помощью вершин u_i (последовательным подразбиением ребер, на которых лежат точки u_i). Пусть $\mathcal{L}'$ — другой шарнирный механизм, множество вершин которого содержит U . Про такой $\mathcal{L}'$ будем говорить, что он соединяет точки из U . Предположим дополнительно, что ограничения граничных отображений механизмов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ на U совпадают. Тогда, объединив множества вершин и множества ребер механизмов $\mathcal{L}_U$ и $\mathcal{L}'$, мы построим новый механизм, про который будем говорить, что он получен добавлением механизма $\mathcal{L}'$ к механизму $\mathcal{L}$. Аналогичным образом можно определить более общее понятие суммы двух механизмов (сделайте это самостоятельно).

Пусть $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$ и $\mathcal{L}' = (G' = (V' E'), \ell', \partial')$ — два шарнирных механизма, причем $V \subset V'$, $E \subset E'$, $\ell'|_E = \ell$ и $\partial'|_V = \partial$. Тогда будем говорить, что $\mathcal{L}$ лежит в $\mathcal{L}'$, или $\mathcal{L}'$ содержит $\mathcal{L}$, или $\mathcal{L}'$ расширяет $\mathcal{L}$. Отметим, что механизм, полученный из $\mathcal{L}$ добавлением некоторого механизма, содержит $\mathcal{L}$.

Пусть, во введенных в предыдущем абзаце обозначениях, механизм $\mathcal{L}$ лежит в $\mathcal{L}'$. Если $\mathcal{C}' \in \mathcal{S}(\mathcal{L}')$ — некоторая конфигурация механизма $\mathcal{L}'$, то ее ограничение на V является конфигурацией механизма $\mathcal{L}$, которую будем называть *ограничением $\mathcal{C}'$ на механизм $\mathcal{L}$* . При

этом множество всех ограничений конфигураций механизма $\mathcal{L}'$ на $\mathcal{L}$ будем называть *конфигурационным пространством модифицированного (с помощью $\mathcal{L}'$) механизма $\mathcal{L}$* . Нас будет особенно интересовать ситуация, когда $\mathcal{L}'$ получен из $\mathcal{L}$ добавлением некоторого механизма (см. параграф 12.4.2). Посмотрим некоторые примеры.

12.4.1 Ромб

Рассмотрим взвешенный граф (G, ℓ) , который содержит четыре вершины O, A, B и C и четыре ребра OA, AB, BC и CO ; функция ℓ принимает одно значение $a > 0$. Неподвижным будет у нас ровно один шарнир O . Как выглядят всевозможные конфигурации этого шарнирного механизма? Легко видеть, что они могут быть или ромбом (невырожденным или вырожденным), или замкнутой ломаной, у которой совпадают первое и четвертое, а также второе и третье звенья; или же первое и второе, а также третье и четвертое звенья. Для каждой конфигурации C мы будем отождествлять шарниры с их положениями. Иными словами, положения шарниров будем обозначать теми же буквами, что и сами шарниры, рис. 12.12.

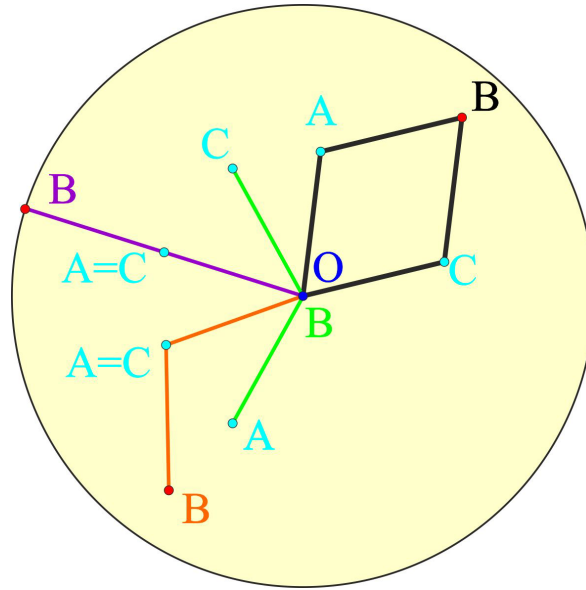


Рис. 12.12: Шарнирный ромб, параметризующий круг.

Изучим конфигурационное множество $\mathcal{S}(B)$ шарнира B . Ясно, что это множество представляет собой круг с центром в O и радиусом $2a$. Выясним, чему равны кратности разных положений шарнира B . Каждая точка, лежащая на граничной окружности конфигурационного множества $\mathcal{S}(B)$, встречается ровно в одной конфигурации, а именно, когда ромб вырожден, поэтому такие положения имеют кратность 1. Кратность каждого негра-

ничного положения, отличного от O , равна 4 (мы различаем ромб $OABC$ и ромб, симметричный ему относительно диагонали OB ; также мы учитываем конфигурации, в которых точки A и C совпадают). Наконец, когда положение точки B совпадает с точкой O , такую ситуацию реализуют ломанные, в которых совпадают первое и второе, а также третье и четвертое звенья (среди них встречаются и вырожденные ромбы), так что кратность положения $O \in \mathcal{S}(B)$ равна бесконечности.

12.4.2 Укрепление шарнирного механизма

Наличие положений высокой кратности часто приводит к чрезвычайному усложнению анализа конфигураций шарнирного механизма. Например, в случае с ромбом из раздела 12.4.1, если конфигурация задает обычный ромб, то тогда вектор OB равен сумме векторов OA и OC . Однако в случае, когда конфигурация представляет собой ломаную с совпадающими звеньями, такого равенства уже нет.

Чтобы избежать подобных проблем, часто пытаются уменьшить кратность положений, пользуясь следующим приемом. Предположим, что конфигурационное пространство механизма $\mathcal{L}$ разбито на две части $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, причем существует такой конечный набор точек на стержнях из $\mathcal{L}$ и такой шарнирный механизм $\mathcal{L}'$, для которых во всех конфигурациях из $\mathcal{S}_1$ положения выбранных точек можно соединить механизмом $\mathcal{L}'$, а для каждой конфигурации из $\mathcal{S}_2$ положения выбранных точек соединить механизмом $\mathcal{L}'$ нельзя. Тогда если к $\mathcal{L}$ добавить механизм $\mathcal{L}'$, соединяющий описанные выше точки, то конфигурационное пространство модифицированного так механизма $\mathcal{L}$ станет равным $\mathcal{S}_1$. Тем самым, мы, фактически, уменьшили конфигурационное пространство исходного механизма. Такая операция называется *укреплением* части $\mathcal{S}_1$ конфигурационного пространства $\mathcal{S}(\mathcal{L})$. Обычно конфигурации, образующие часть $\mathcal{S}_1$, называются тем или иным образом, например, часть конфигураций шарнирного механизма $\mathcal{L}$ из раздела 12.4.1 называются ромбами. Если описанным выше методом семейство $\mathcal{S}_1$ таких конфигураций укреплено, то говорят, что укреплен ромб.

Опишем, как можно укрепить ромб $\mathcal{L}$ из раздела 12.4.1. Добавим на ребра OA и BC их середины M и N . Отметим, что в каждой конфигурации, реализующей ромб, расстояние между точками M и N равно a . Если же реализуется замкнутая ломаная с совпадающими звеньями и эта ломаная не равна вырожденному ромбу, то расстояние между точками M и N меньше a . Таким образом, укрепляя $\mathcal{L}$ добавлением ребра MN длины a (однореберного шарнирного механизма), мы получим механизм, который можно рассматривать как “настоящий ромб” (возможно, вырожденный). Именно такой механизм мы будем называть *ромбом*, хотя изображать будем лишь его часть, без добавленного “укрепляющего” ребра.

12.4.3 Параллелограмм и антипараллелограмм

В примере параграфа 12.4.1 изменим функцию ℓ , разрешив ей принимать два различных значения $a = \ell(OA) = \ell(BC) > 0$ и $b = \ell(AB) = \ell(CO) > 0$. Возможные конфигурации такого шарнирного механизма — это параллелограммы (невыврожденные или вырожденные), а также *антипараллелограммы*, каждый из которых получается из параллелограмма отражением одного из треугольников, на которые его разбивает диагональ, относительно этой диагонали, рис. 12.13.

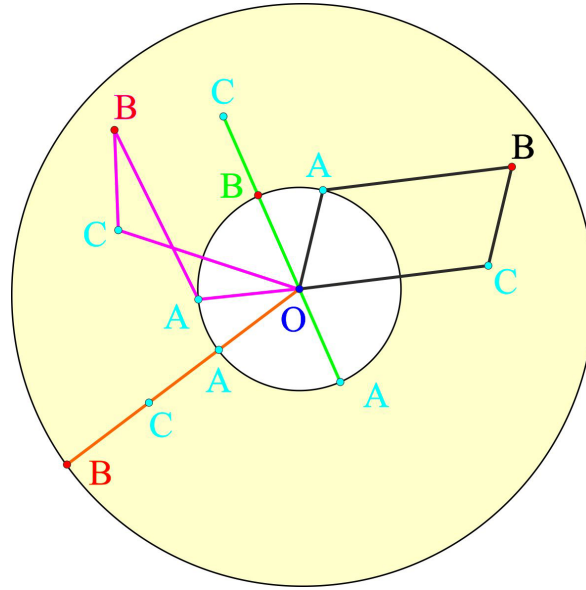


Рис. 12.13: Шарнирные параллелограмм и антипараллелограмм.

Вновь изучим конфигурационное множество точки B . Так как $a \neq b$, то $\mathcal{S}(B)$ — это кольцо с центром в O , внутренним радиусом $|a - b|$ и внешним радиусом $a + b$. Все точки внешней окружности имеют кратность 1, так как каждая из них реализуется в единственном вырожденном параллелограмме. Все неграничные точки имеют кратность 4, причем для каждой такой точки B она реализуется в двух симметричных относительно OB параллелограммах, и в двух симметричных относительно OB антипараллелограммах (для ромба эти антипараллелограммы вырождаются). Наконец, все точки внутренней окружности имеют кратность 1. Таким образом, для параллелограммов с разными длинами сторон в множестве $\mathcal{S}(B)$ отсутствуют точки бесконечной кратности.

По аналогии с тем, как мы укрепили ромб, можно также укрепить и параллелограмм, добавив такую же среднюю линию. Из сказанного выше вытекает, что у так модифицированного параллелограмма конфигурационное

пространство совпадает в точности с множеством конфигураций, отвечающих настоящим (возможно, вырожденным) параллелограммам. Именно такой механизм мы будем в дальнейшем называть *параллелограммом*, хотя изображать будем лишь его часть, без добавленного “укрепляющего” ребра.

Укрепить антипараллелограмм несколько сложнее. Чтобы это сделать, прикрепим к серединам его сторон “звезду”, т.е. шарнирный механизм, состоящий из четырех стержней, выходящих из общей точки X . Длины стержней подберем так. Пусть для определенности $a < b$. Обозначим через K и M середины ребер антипараллелограмма $OABC$ длины a , а через L и N — середины его ребер длины b . Положим $\ell'(XK) = \ell'(XM) = R_2$, $\ell'(XN) = \ell'(XL) = R_1$, причем выберем R_i достаточно большими и удовлетворяющими соотношению $R_2^2 - R_1^2 = \frac{1}{4}(b^2 - a^2)$.

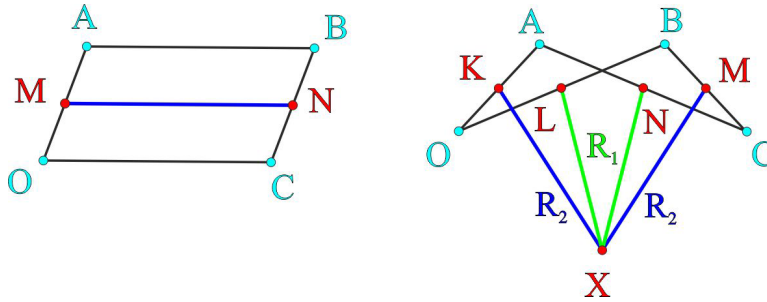


Рис. 12.14: Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма.

Отметим, что после укрепления параллелограмма и антипараллелограмма кратности внутренних точек конфигурационного пространства (отличных от начала координат в случае ромба) станут равными 2.

Задача 12.3. Проверьте, что конфигурационное пространство укрепленного антипараллелограмма совпадает в точности с множеством всех конфигураций, являющихся антипараллелограммами (возможно, вырожденными).

12.5 Что и как можно начертить с помощью шарнирных механизмов

Мы обсудим одну общую идею, позволяющую чертить самые разные множества с помощью шарнирных механизмов. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x и y задан шарнирный механизм $\mathcal{L}$, и пусть v — некоторый подвижный шарнир из $\mathcal{L}$. Рассмотрим на конфигурационном множестве $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$ шарнира v некоторую функцию $f(x, y)$ и предположим, что мы хотим расширить $\mathcal{L}$ до такого шарнирного механизма $\mathcal{L}'$, в котором шарнир v двигался бы по множеству, заданному уравнением $f(x, y) = 0$. Как эту задачу можно было бы решить?

Постараемся сначала расширить $\mathcal{L}$ до промежуточного шарнирного механизма $\mathcal{L}''$ такого, что $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v) = \mathcal{S}(\mathcal{L}'', v)$ и существует шарнир w из $\mathcal{L}''$, обладающий следующим свойством: для каждого положения $s \in \mathcal{S}(\mathcal{L}'', v)$ шарнира v абсцисса (x -координата) всех положений шарнира w в конфигурациях $\mathcal{C}'' \in \mathcal{S}(\mathcal{L}'')$, для которых $\mathcal{C}''(v) = s$, одна и та же и равна $f(s)$.

Соединив $\mathcal{L}''$ с инверсором Понселе, в котором шарнир w может двигаться только по прямой $x = 0$, получим механизм $\mathcal{L}'$, в котором точка v движется по множеству, заданному уравнением $f(x, y) = 0$.

Ниже мы применим эту идею для доказательства того, что, по образному выражению Терстона, подпись каждого из нас можно нарисовать с помощью некоторого шарнирного механизма. А пока-что сформулируем без доказательства результат Г. Кинга, который полностью описывает те множества, которые можно изобразить с помощью шарнирных механизмов. Дадим предварительно необходимые определения.

Множество $A \subset \mathbb{R}^d$ называется *полуалгебраическим*, если оно является конечным объединением множеств, каждое из которых представляет собой решение конечной системы полиномиальных равенств и неравенств. Легко видеть, что конечные объединения, конечные пересечения, а также дополнения полуалгебраических множеств являются также полуалгебраическими множествами.

Будем говорить, что шарнирный механизм *рисует множество* A , если A равно конфигурационному множеству некоторой вершины этого механизма. Множество $A \subset \mathbb{R}^d$ называется *рисуемым*, если существует шарнирный механизм, который рисует множество A .

Теорема 12.4 (Кинг [9], [10]). *При $d \geq 2$ множество $A \subset \mathbb{R}^d$ рисуемо, если только если A — или все $\mathbb{R}^d$, или компактное полуалгебраическое множество.*

В частности, теорема 12.4 утверждает, что с помощью шарнирных механизмов можно нарисовать любой многогранник, а также конечное объединение многогранников, или же любой компактный фрагмент поверхности, заданной как решение полиномиального уравнения, например, эллипсоид, параболоид или гиперболоид, в частности, эллипс, гиперболу и параболу.

Задача 12.5. Модифицируйте инверсор Понселе и постройте шарнирный механизм, рисующий треугольник на плоскости.

12.6 Универсальная теорема Кемпе, или как изобразить Вашу подпись с помощью шарнирного механизма

В этом параграфе мы приведем идеи доказательства того, что с помощью шарнирных механизмов можно начертить каждую ограниченную некоторым кругом часть любой *алгебраической кривой*, т.е. кривой, заданной как множество нулей произвольного многочлена от двух переменных

(в силу теоремы Вейерштрасса, с помощью алгебраических кривых можно сколь угодно хорошо приблизить любую непрерывную кривую, в связи с чем Терстон интерпретировал этот результат как то, что шарнирные механизмы могут расписаться за любого из нас). Эта теорема возникла в трудах Альфреда Кемпе (Kempe) в 1876 году (см. [6]), однако в 1984 в доказательстве была обнаружена ошибка, которую удалось залатать лишь в 2002 году М. Каповичу и Дж. Миллсону [7], см. также [8]. Приведем точную формулировку теоремы.

Теорема 12.6 (Кемпе [6], Капович и Миллсон [7]). *Пусть f — вещественный многочлен от двух переменных и D^2 — замкнутый диск на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда существует плоский шарнирный механизм, который рисует множество $D^2 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.*

В этом параграфе мы приведем основные идеи доказательства этой теоремы. Начнем со описания ряда шарнирных механизмов, которые будут использованы.

12.6.1 Шарнирные механизмы из теоремы Кемпе

Часть механизмов, встречающихся в доказательстве, мы уже описали. К ним относятся ромб, параллелограмм (как обычный, так и антипараллелограмм), а также инверсор Понселе. Еще нам понадобятся механизмы для умножения углов на целые числа и деления углов на равные части (*реверсор Кемпе*), сложения углов (*сумматор Кемпе*) и сложение векторов (*транслятор Кемпе*), к описанию которых мы сейчас и перейдем.

Умножение углов на целые числа и деление углов на равные части: реверсор Кемпе

Для заданных вещественных чисел $a > 0$, $b > 0$ и целого числа $k \neq 0$ требуется построить такие шарнирные механизмы $\mathcal{L} = (G, \ell, \partial)$, в которых имеется три стержня OA , OB и OC , удовлетворяющих условиям $\ell(OA) = a$, $\ell(OB) = b$, и связанных в каждой конфигурации следующим соотношением: если угол от вектора OC к вектору OA равен α , то угол от вектора OC к вектору OB или (1) равен $k\alpha$, или (2) равен α/k .¹

Мы будем решать обе задачи одновременно. Для наглядности будем “собирать” шарнирный механизм прямо на плоскости $\mathbb{R}^2$, поэтому вместо $\ell(X, Y)$ пишем $|XY|$.

Рассмотрим для начала (укрепленный) антипараллелограмм $ОХРУ$ с вершиной O , закрепленной в начале координат. Добавим к нему некоторый шарнир Z , а также прикрепим на его луч $УР$ шарнир W , а затем свяжем добавленные шарниры стержнями с O и Y так, чтобы $OYWZ$ оказался антипараллелограммом, подобным исходному. Укрепим антипараллелограмм

¹Мы говорим, что угол от ненулевого вектора v с направлением $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ к ненулевому вектору w равен $\beta \in \mathbb{R}$, если направление вектора w равно $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$. Таким образом, для каждой пары векторов v и w угол β определен неоднозначно.

$OYWZ$. Из соображений подобия вытекает, что углы YOX и ZOY равны между собой, а $|OY|^2 = |OX| \cdot |OZ|$, рис. 12.15. Покажем, как полученный шарнирный механизм решает наши задачи для $k = -1$ и $k = 2$.

Положим $|OY| = a$ и $|OZ| = b$. Тогда Y, Z и X можно интерпретировать как положения шарниров A, B и C в задаче (1), случай $k = 2$, в силу того, что угол от OX к OZ вдвое больше угла от OX к OY .

Если же поменять Y и Z местами, т.е. положить $|OY| = b, |OZ| = a$, то Z, Y и X можно интерпретировать как положения шарниров A, B и C в задаче (2), случай $k = 2$, в силу того, что угол от OX к OY вдвое меньше угла от OX к OZ .

Наконец, если положить $|OZ| = a, |OX| = b$, то Z, X и Y можно интерпретировать как положения шарниров A, B и C в задаче (1), случай $k = -1$, в силу того, что угол от OY к OX равен минус угол от OY к OZ , рис. 12.15.

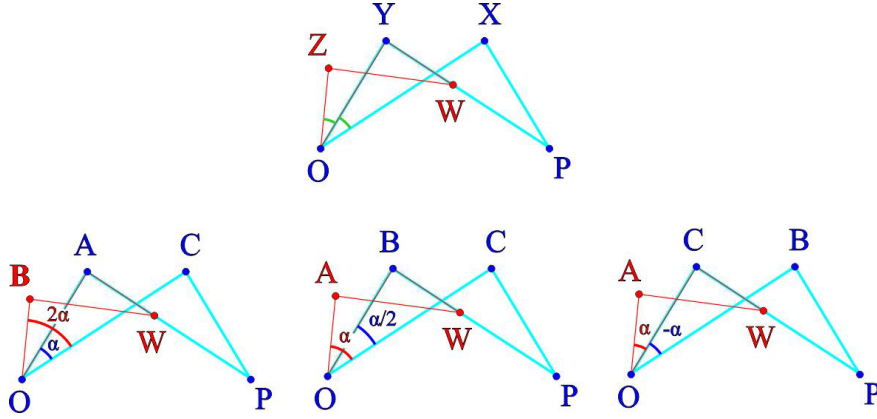


Рис. 12.15: Реверсор Кемпе.

Чтобы получить решение в общем случае, нужно повторить проделанную процедуру, добавив к антипараллелограмму $OYWZ$ еще один подобный ему антипараллелограмм, в последнем также добавить подобный антипараллелограмм и т.д. Построенный механизм Кемпе называл *реверсором* в силу того, что он умеет строить отрицательные углы.

Механизм для сложения углов: сумматор Кемпе

Используя реверсор Кемпе, можно построить сумматор углов.

Для заданных вещественных чисел $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ требуется построить такой шарнирный механизм $\mathcal{L} = (G, \ell, \partial)$, в котором имеется четыре стержня OA, OB, OC и OD , удовлетворяющих условиям $\ell(OA) = a$, $\ell(OB) = b$, $\ell(OC) = c$ и связанных в каждой конфигурации следующим соотношением: если угол от вектора OD к вектору OA равен α , а угол от

вектора OD к вектору OB равен β , то угол от вектора OD к вектору OC равен $\alpha + \beta$.

Рассмотрим реверсор Кемпе, который делит угол XOZ пополам, и пусть OY — “биссектриса” этого угла, где Y — соответствующий шарнир рассматриваемого реверсора (см. предыдущий пункт). Прикрепим к этому реверсору еще один, который удваивает угол UOY , превращая его в угол UOW . Положим $|OX| = a$, $|OZ| = b$, $|OW| = c$. По a и b однозначно вычисляется $|OY|$, а по c и $|OY|$ однозначно вычисляется $|OU|$.

Теперь будем интерпретировать точки X, Z, W и U как положения шарниров A, B, C и D . Тогда угол от вектора OX к вектору OZ равен $\beta - \alpha$, от вектора OX к вектору OY равен $(\beta - \alpha)/2$, поэтому от вектора OU к вектору OY равен $(\beta + \alpha)/2$ и, значит, от вектора OU к вектору OW равен $\beta + \alpha$. Тем самым, построенный механизм, называемый *сумматором Кемпе*, реализует поставленную задачу, рис. 12.16.

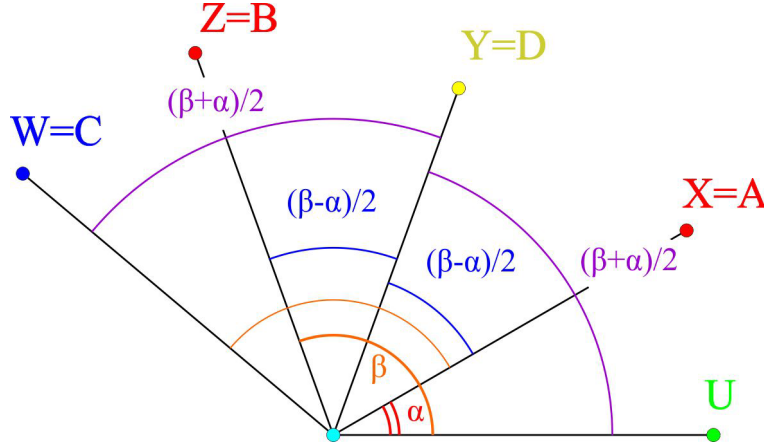


Рис. 12.16: Сумматор Кемпе.

Параллельный перенос и сложение векторов: транслятор Кемпе

Для заданных вещественных чисел $a > 0$ и $b > 0$ требуется построить шарнирный механизм, который содержит стержень OX , удовлетворяющий условию $\ell(OX) = a$, а также шарниры Y и Z такие, что в каждой конфигурации $|OY| \leq b$ и вектор OZ равен сумме векторов OX и OY . $OZ = OX + OY$.

Заметим, что если $OZ = OX + OY$, то точка Z является концом вектора YZ , равного вектору OX . Это соображение является ключевым для построения соответствующего механизма.

Рассмотрим два (укрепленных) параллелограмма $OXNM$ и $MNZY$, у которых $|OX| = |MN| = |YZ| = a$ и $|XN| = |OM| = |NZ| = |MY| = R$, где

$2R = b$. Этот механизм и есть *транслятор Кемпе*, выполняющий требуемое действие (проверьте это), рис. 12.17.

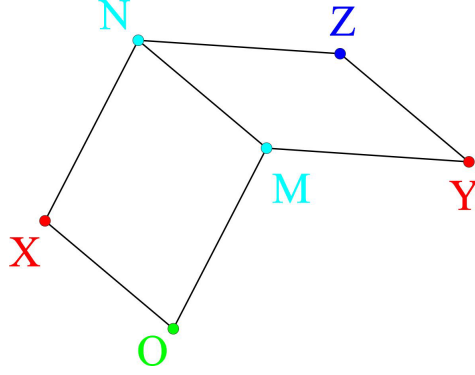


Рис. 12.17: Транслятор Кемпе.

12.6.2 Идея доказательства теоремы Кемпе

Будем считать, что на плоскости введены стандартные координаты x и y , а центр O круга D^2 совпадает с началом координат. Воспользуемся методом, описанным в параграфе 12.5. Главная наша цель — показать, как этот метод может быть реализован в случае, когда функция $f(x, y)$ — многочлен.

“Параметризуем” точки круга D^2 с помощью положений точки B (укрепленного) шарнирного ромба $OABC$ (см. параграф 12.4.2), у которого точка O совпадает с центром круга D^2 , а длина стороны a равна половине радиуса круга D^2 . Для каждой конфигурации положим $OA = a(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $OC = a(\cos \beta, \sin \beta)$, откуда $B = (x, y) = a(\cos \alpha + \cos \beta, \sin \alpha + \sin \beta)$.

Пусть

$$f = \sum_{0 \leq i+j \leq n} c_{ij} x^i y^j.$$

Подставив в предыдущую формулу выражения для координат точки B , получим

$$f = \sum_{0 \leq i+j \leq n} c_{ij} a^{i+j} (\cos \alpha + \cos \beta)^i (\sin \alpha + \sin \beta)^j. \quad (12.1)$$

Раскроем скобки и воспользуемся формулами, преобразующими произведение двух косинусов, косинуса и синуса, а также двух синусов в сумму косинусов и синусов от суммы и разности углов. Тогда формула (12.1) при-

обретет следующий вид:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{|r|+|s|\leq n} d_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta) + e_{rs} \sin(r \cdot \alpha + s \cdot \beta) = \\ &= \sum_{|r|+|s|\leq n} f_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta + \gamma_{rs}). \end{aligned}$$

Реализуем по отдельности слагаемые $f_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta + \gamma_{rs})$, построив точки с абсциссами, равными этим слагаемым, а затем сложим все эти точки с помощью транслятора Кемпе. Тем самым, получим точку с абсциссой, равной $f(x, y)$.

Чтобы реализовать каждое слагаемое, мы, используя реверсоры Кемпе с одной и той же точкой O , получим требуемые углы $r\alpha$ и $s\beta$ для всех пар (r, s) целых чисел, удовлетворяющих $|r| + |s| \leq n$. Кроме того, построим также фиксированные углы γ_{rs} , задав их с помощью соответствующих треугольников. Наконец, используя сумматор Кемпе, сложим углы $r\alpha$, $s\beta$ и γ_{rs} для каждой допустимой пары (r, s) . При этом позаботимся также, чтобы у полученных точек расстояния до O равнялись f_{rs} . Получим точки с искомыми абсциссами, что и требовалось.

Литература к главе 12

- [1] <http://www.etudes.ru/ru/mov/>
- [2] <http://jeanlouis.blanchard.pagesperso-orange.fr>
- [3] <http://tcheb.ru/>
- [4] Сосинский А.Б. *Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция первая.*
http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130
- [5] Сосинский А.Б. *Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция вторая.*
http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus
- [6] Kempe A.B. *How to draw a straight line: a lecture on linkages.* — Macmillan & Co., 1877.
- [7] Kapovich M., Millson J.J. *Universality theorems for configurations of planar linkages.* Topology, v. 41 (2002), N 6, pp. 1051–1107.
- [8] Abbott T.G. *Generalizations of Kempe's Universality Theorem* (2008)
<http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf>
- [9] H. King, Semiconfiguration spaces of planar linkages,
[arXiv.org:math/9810130](http://arXiv.org/math/9810130).
- [10] H. King, Configuration spaces of linkages in R^n , [arXiv.org:math/9811138](http://arXiv.org/math/9811138).

Упражнения к главе 12.

Упражнение 12.1. Покажите, что при движении по окружности точки P из инверсора Гарта точка Q движется по прямой.

Упражнение 12.2. Проверьте, что конфигурационное пространство укрепленного антипараллелограмма совпадает в точности с множеством всех конфигураций, являющихся антипараллелограммами (возможно, вырожденными).

Упражнение 12.3. Модифицируйте инверсор Понселе и постройте шарнирный механизм, рисующий заполненный треугольник на плоскости.

Упражнение 12.4. Постройте шарнирный механизм, рисующий эллипс с заданными полуосями.