Глава 11

Двумерные поверхности.

План. Стандартные симплексы, криволинейные симплексы, триангулируемая поверхность в евклидовом пространстве, триангуляция поверхности, край стандартного симплекса, край криволинейного симплекса, край триангулируемой поверхности, ориентация стандартного симплекса, ориентация криволинейного симплекса, ориентация триангулируемой поверхности, гомеоморфизм поверхностей, склейки из квадрата, цилиндр, тор, бутылка Клейна, проективная плоскость, вырезание и заклейка дырки, вклейка ручки, вклейка пленки Мебиуса, классификация двумерных поверхностей.

Ниже рассматриваются двумерные поверхности в евклидовом пространстве; наша цель — классификация таких поверхностей с точностью до "непрерывной деформации". Прежде всего, надо определить, что мы понимаем под двумерной поверхностью; существует два разных подхода к этому определению. В любом случае, сперва необходимо описать ситуацию локально, т.е. в малой окрестности произвольной точки. То обстоятельство, что поверхность двумерна, означает, что любой достаточно малый ее кусок может быть задан параметрическими уравнениями $x = r(u)$, где $u = (u_1, u_2)$ — параметры (координаты на поверхности), меняющиеся в некоторой области на плоскости. Один из подходов к определению поверхности состоит в том, что она представляется как объединение кусков, каждый из которых задается такими уравнениями, причем считается, что координаты u меняются в открытом множестве (например, круге). В пересечении двух таких кусков возникают две системы координат; требуется, чтобы одни координаты выражались через другие посредством непрерывных (или гладких) функций. Такой подход — "наложение кусков друг на друга" — лежит в основе определения топологического (или гладкого) многообразия; на нем основана, в частности, классическая дифференциальная геометрия многообразий.

Для нас удобнее будет представлять поверхность как объединение стандартных кусков, стыкующихся друг с другом по участку границы. Начнем с определения стандартного куска; сперва опишем множество, в котором меняются координаты.

Определение 11.1. *Стандартным двумерным симплексом* называется (замкнутый) треугольник на плоскости.

Замечание 11.2. Ясно, что для всякого симплекса можно так выбрать систему координат на плоскости, что симплекс будет задаваться соотношениями
$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq 1.$$
Для этого достаточно поместить начало координат в одну из рассматриваемых точек (вершин симплекса) и направить базисные векторы из нее в остальные вершины.

Замечание 11.3. У каждого симплекса есть *одномерные грани* — стороны треугольника и *нульмерные грани* — его вершины. Стороны задаются одним из уравнений вида $u_j = 0$ или $\sum_j u_j = 1$.

Определим теперь криволинейный симплекс — образ стандартного симплекса при гладком отображении.

Определение 11.4. *Криволинейным двумерным симплексом в евклидовом пространстве* называется множество, которое можно задать параметрически в виде
$$x = r(u_1, u_2),$$
где координаты $u = (u_1, u_2)$ пробегают стандартный симплекс, а все координаты $x_i(u)$ вектора $r(u)$ — гладкие функции в этом стандартном симплексе, причем векторы $\partial r/\partial u_i$ линейно независимы во всех его точках. Требуется, кроме того, чтобы заданное такой формулой отображение между точками стандартного и криволинейного симплексов было взаимно-однозначным, т.е. из равенства $r(u) = r(v)$ должно следовать, что $u = v$ (последнее условие, очевидно, означает, что криволинейный симплекс не имеет точек самопересечения).

Замечание 11.5. У каждого криволинейного симплекса есть *одномерные* и *нульмерные грани* — они задаются теми же уравнениями $x = r(u)$, причем координаты u пробегают соответствующую грань стандартного симплекса.

Теперь мы можем определить наш основной геометрический объект — триангулируемую поверхность. Это — множество, правильным образом составленное из криволинейных симплексов.

Определение 11.6. *Триангулируемая поверхность в евклидовом пространстве* — это множество, представимое в виде объединения конечного числа криволинейных симплексов. При этом требуется, чтобы пересечение любых двух входящих в это множество симплексов было либо пустым множеством, либо ровно одной целой гранью (размерности 0 или 1) для обоих пересекающихся симплексов. Кроме того, по каждой одномерной грани может пересекаться не более двух симплексов.

Тринагуляцией поверхности называется ее представление в виде такого объединения криволинейных симплексов.

Замечание 11.7. Таким образом, триангулируемая поверхность состоит из конечного числа криволинейных треугольников, причем пересечение треугольников возможно либо по одной целой стороне, либо по одной вершине.

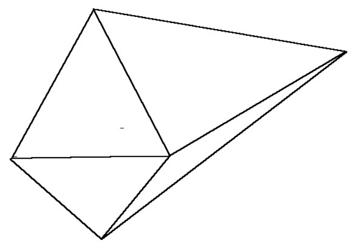

Рис. 11.1: Разрешенное пересечение симплексов.

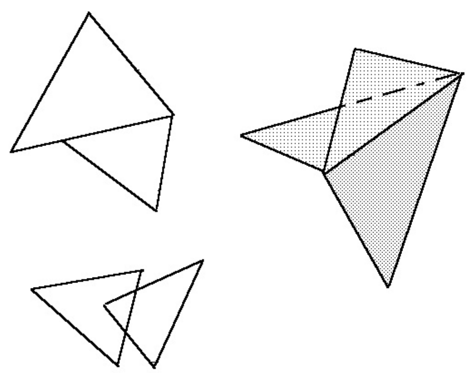

Рис. 11.2: Запрещенные пересечения симплексов.

11.1 Край триангулируемой поверхности

Определенные выше поверхности, вообще говоря, имеют край (например, край диска — это окружность, а край цилиндра — две окружности).

Определение 11.8. *Краем стандартного симплекса* называется объединение его одномерных граней (граница треугольника); аналогично, *краем криволинейного симплекса* называется объединение образов этих граней при соответствующем отображении, т.е. множество, заданное параметрическими уравнениями $x = r(u)$, в которых координаты u пробегают край стандартного симплекса.

Замечание 11.9. Край криволинейного симплекса — это замкнутая цепочка из трех криволинейных отрезков.

Наконец, определим край триангулируемой поверхности. Для этого рассмотрим края всех входящих в нее криволинейных симплексов. Все вместе они составляют набор конечного числа криволинейных отрезков (граней симплексов). Для каждой такой грани возможны две ситуации: либо она принадлежит двум разным симплексам (являясь их пересечением), либо только одному. В первом случае назовем криволинейный отрезок *внутренним*, а во втором — *краевым*.

Определение 11.10. *Краем триангулируемой поверхности* называется объединение ее краевых одномерных граней.

Задача 11.11. Докажите, что край любой поверхности — это объединение нескольких замкнутых цепочек криволинейных отрезков.

Определение 11.12. Каждая такая цепочка называется *компонентой края*.

11.2 Ориентация триангулируемых поверхностей

Поверхности различаются по их ориентируемости; определим сперва это понятие для симплексов.

Определение 11.13. Стандартный симплекс называется *ориентированным*, если задано направление обхода его края. Другими словами, на каждой стороне треугольника должно быть указано направление, причем в каждой вершине встречаются одно входящее и одно выходящее направления.

Замечание 11.14. Пусть вершины симплекса занумерованы; тогда ориентация задается перестановкой из трех чисел (номеров вершин), причем две перестановки задают одну и ту же ориентацию тогда и только тогда, когда их четности совпадают.

Замечание 11.15. Фактически, задание ориентации — это выбор одного из двух направлений вращения — “по часовой стрелке” или “против часовой стрелки”.

Определение 11.16. Криволинейный симплекс называется *ориентированным*, если задана ориентация соответствующего стандартного симплекса. Другими словами, на крае криволинейного симплекса должно быть задано направление обхода.

Рассмотрим теперь триангулируемую поверхность. Ее ориентация получается из ориентации входящих в нее симплексов, при условии правильного согласования ориентаций на их пересечениях.

Определение 11.17. Триангулируемая поверхность называется *ориентированной*, если на каждом входящем в нее криволинейном симплексе задана ориентация, причем если два симплекса пересекаются по одномерной грани, то два направления, индуцированные на этой грани ориентациями двух пересекающихся симплексов, должны быть **противоположными**.

Замечание 11.18. Легко понять, что условие противоположности ориентаций, индуцированных на грани двумя пересекающимися по этой грани симплексами, означает "непрерывность" ориентации при переходе через грань из одного симплекса в другой.

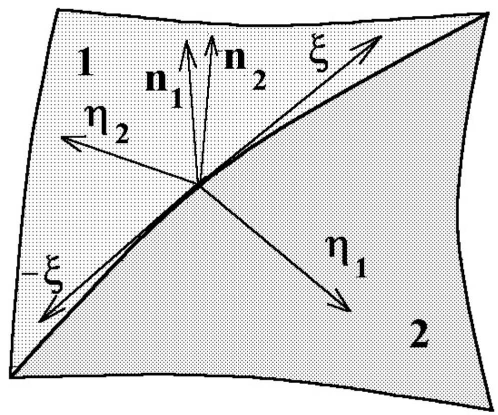

Рис. 11.3: Согласование ориентации симплексов.

Определение 11.19. Поверхность называется *ориентируемой*, если на ней существует ориентация.

Замечание 11.20. Рассмотрим на поверхности замкнутую цепочку симплексов, т.е. набор криволинейных треугольников $M_1, \dots, M_N$, каждый из которых пересекается по одномерной грани с последующим и с предыдущим, причем M_1 пересекается с M_N. Зададим ориентацию на первом симплексе M_1; правило согласования однозначно определяет ориентацию на симплексе M_2, от него — на M_3 и далее по цепочке до M_N, а от него снова на M_1. Таким образом, на первом симплексе возникает две ориентации. Будем говорить, что цепочка симплексов *сохраняет ориентацию*, если эти две ориентации совпадают, и *обращает ориентацию*, если они противоположны. Ясно, что, если на поверхности существует обращающая ориентацию цепочка симплексов, то поверхность неориентируема; легко проверить (докажите!), что верно и обратное утверждение. Таким образом, ориентируемость поверхности эквивалентна отсутствию на ней обращающих ориентацию замкнутых цепочек симплексов.

Замечание 11.21. Нетрудно убедиться (докажите!), что ориентируемость двумерной поверхности *в трехмерном пространстве* эквивалентна следующему свойству. Пусть γ — произвольная замкнутая кривая на поверхности; будем говорить, что кривая сохраняет ориентацию, если в каждой точке этой кривой существует единичный вектор нормали к поверхности (т.е. вектор, перпендикулярный векторам $\partial r/\partial u_j$ — касательным векторам к координатным линиям) и непрерывно зависящий от точки (другими словами, кривая сохраняет ориентацию, если при непрерывном переносе вектора нормали вдоль этой кривой он переходит в себя, а не в противоположный вектор).

Замечание 11.22. Не любая триангулируемая поверхность может быть ориентируема. Действительно, рассмотрим квадрат и склеим две его противоположные стороны, закрутив их так, чтобы стрелки совпали. (рис. 11.4).

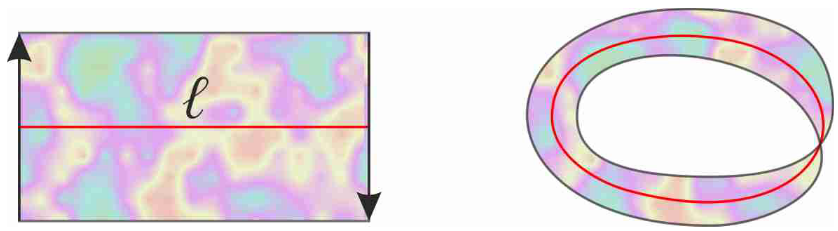

Рис. 11.4: Пленка Мебиуса.

Получим поверхность, называемую *пленкой Мебиуса*. Ясно, что на этой поверхности не существует ориентации; действительно, рассмотрев единичную нормаль к ней в точке средней линии l (рис. 11.5) и непрерывно двигая ее вдоль этой замкнутой кривой, придем в конце концов в исходную точку, причем направление нормали поменяется на противоположное.

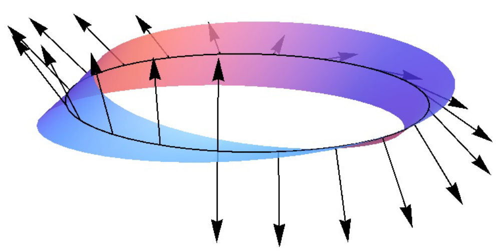

Рис. 11.5: При перемещении нормали к листу Мебиуса вдоль средней линии направление нормали меняется на противоположное.

Задача 11.23. Предъявить на пленке Мебиуса цепочку симплексов, обращающую ориентацию.

11.3 Гомеоморфизм поверхностей

Наша цель — классифицировать двумерные поверхности; для этого надо выяснить, какие из них мы будем считать одинаковыми. Нас не будут интересовать ни размеры, ни форма поверхности; таким образом, допускаются любые деформации без разрывов. Это означает, что поверхности считаются одинаковыми, если они преобразуются друг в друга непрерывными взаимно однозначными отображениями. Определение непрерывности ничем не отличается от соответствующего понятия анализа.

Определение 11.24. Пусть $f : M \to Q$ — отображение триангулируемой поверхности M в триангулируемую поверхность Q, Отображение f называется непрерывным в точке $P \in M$, если для любой окрестности V точки $f(P) \in Q$ найдется окрестность U точки P, для которой $f(U \bigcap M) \subset V$. Отображение называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке.

Определение 11.25. Отображение $f : M \to Q$ называется *гомеоморфизмом*, если f взаимно однозначно (тогда существует обратное отображение f^{-1}) и f и f^{-1} непрерывны. Поверхности M и Q называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм $f : M \to Q$.

Задача 11.26. Докажите, что многоугольник гомеоморфен диску *(*замкнутому кругу*)*.

Задача 11.27. Докажите, что на любой триангулируемой поверхности существует граф, разбивающий ее на куски, гомеоморфные диску.

Задача 11.28. Докажите, что каждая компонента края двумерной поверхности гомеоморфна окружности *(*тем самым, край гомеоморфен объединению нескольких окружностей*)*.

11.4 Склейки из квадрата

Простейшие примеры двумерных поверхностей можно получить, склеивая по различным правилам стороны квадрата. Выше мы видели, как при такой склейке получается пленка Мебиуса; остальные варианты склейки (см. рис. 11.6) приводят к поверхностям, называемым соответственно *цилиндром*, *тором*, *бутылкой Клейна* и *проективной плоскостью.*

Задача 11.29. Построить триангуляции цилиндра, тора, проективной плоскости и бутылки Клейна.

Задача 11.30. Докажите, что цилиндр и тор ориентируемы, а проективная плоскость и бутылка Клейна — нет.

Ясно, что край пленки Мебиуса состоит из одной окружности, цилиндра — из двух, а у остальных поверхностей край пуст.

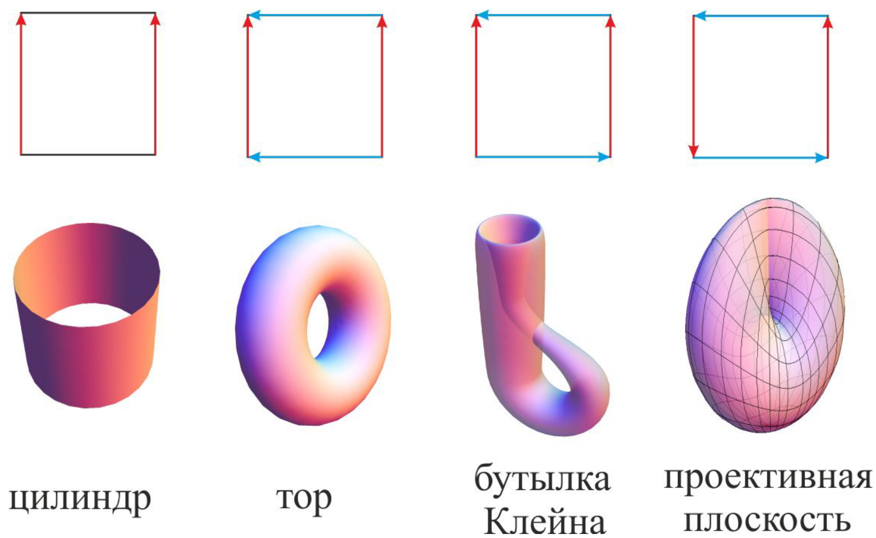

Рис. 11.6: Склейки из квадрата

11.5 Основные операции

Для классификации двумерных поверхностей нам понадобится ряд операций с поверхностями, которые мы сейчас опишем.

Вырезание и заклейка дырки.

Удалим из поверхности ее пересечение с шаром достаточно малого радиуса, центр которого — точка поверхности, не принадлежащая краю. Получим новую поверхность, край которой содержит на одну окружность больше, чем край исходной поверхности. Эта операция называется *вырезанием дырки*, а обратная к ней — *заклейкой дырки диском*.

Замечание 11.31. Вырезание дырки эквивалентно удалению из поверхности одного внутреннего симплекса (т.е. симплекса, не пересекающегося с краем); заклейка дырки — присоединение к поверхности многоугольника, стороны которого отождествляются с гранями симплексов, лежащими на некоторой выделенной компоненте края.

Вклейка ручки.

Ручкой называется поверхность, полученная из тора вырезанием дырки (рис. 11.7).

Вырежем в поверхности дырку и отождествим новую компоненту края (край вырезанного диска) с краем ручки. Такая операция называется *вклейкой ручки*.

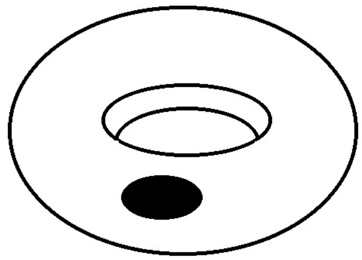

Рис. 11.7: Ручка.

Вклейка пленки Мебиуса.

Вырежем в поверхности дырку и отождествим новую компоненту края с краем пленки Мебиуса (напомним, что он состоит из одной окружности). Такая операция называется *вклейкой пленки Мебиуса.*

Задача 11.32. Описать операции вклейки ручки и пленки Мебиуса в терминах триангуляции поверхности *(*т.е. представить их как удаление или присоединение некоторого набора симплексов*)*.

11.6 Классификация ориентируемых поверхностей

Наша цель — классифицировать двумерные поверхности с точностью до гомеоморфизма. Прежде всего отметим, что достаточно ограничиться поверхностями, "состоящими из одного куска"; такие поверхности называются связными.

Определение 11.33. Поверхность M называется *связной*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной кривой, лежащей на M.

Замечание 11.34. Ясно, что на каждой связной поверхности существует связный граф, разбивающий ее на куски, гомеоморфные диску.

Начнем с классификации ориентируемых поверхностей без края. Обозначим через M_g поверхность, полученную из сферы приклейкой g ручек.

Теорема 11.35. *Каждая связная ориентируемая триангулируемая поверхность без края гомеоморфна одной из поверхностей M_g.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Пусть дана поверхность Q. Мы будем выполнять с этой поверхностью ряд операций (заменяющих ее на *не гомеоморфную*), в результате чего получится поверхность, гомеоморфная диску, т.е. сфере с вырезанной дыркой. Затем мы проследим, как восстанавливается по этой поверхности наша исходная поверхность Q и убедимся, что в процессе восстановления получается сфера, в которой вырезано несколько дырок и некоторые из них заклеены ручками. Вспоминая, что исходная поверхность края не имела, мы заключим, что свободных дырок в нашей поверхности Q нет, т.е. она получается из сферы приклейкой некоторого числа ручек.

Перейдем к реализации этой программы. Рассмотрим на Q связный граф Γ, разбивающий ее на конечное число областей, каждая из которых гомеоморфна диску. Окружим каждую вершину графа маленьким "кружком", а каждое ребро заключим в узкую полоску, соединяющую построенные "кружки" (рис. 11.8). Другими словами, рассмотрим поверхность Q_ε, состоящую из точек $P \in Q$, находящихся от Γ на расстоянии, не большем ε; здесь $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

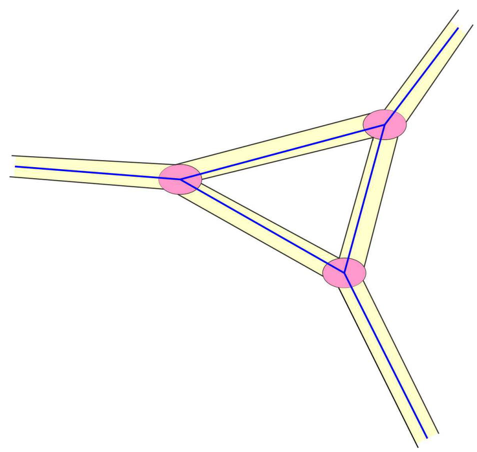

Рис. 11.8: Доказательство теоремы 11.35, шаг 1.

Вырежем теперь из поверхности Q все оставшиеся куски областей (внутренности); каждый кусок гомеоморфен диску, так что эта процедура сводится к вырезанию в поверхности нескольких дырок, а обратная к ней — к заклеиванию дырок дисками.

Рассмотрим теперь получившуюся после такого удаления поверхность Q_ε — она состоит из кружков, окружающих вершины графа, соединенных ленточками, содержащими ребра. Рассмотрим в графе максимальное дерево и соответствующие перемычки. Каждую полоску, соответствующую перемычкам, разрежем поперек; в результате получится новая поверхность $\widehat{Q}$ (рис. 11.9).

Убедимся в том, что эта поверхность гомеоморфна диску. Действительно, максимальное дерево рассматриваемого графа можно строить, начиная

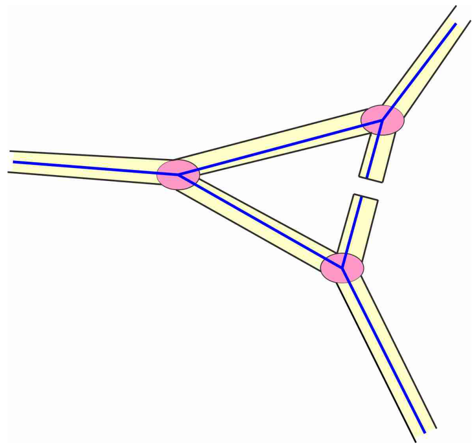

Рис. 11.9: Доказательство теоремы 11.35, шаг 2.

с одного ребра, соединяющего две вершины, и добавляя каждый раз по одному ребру и одной вершине так, чтобы все время получалось дерево. Два кружка, соединенных полоской, очевидно, гомеоморфны диску; добавление полоски с кружком эквивалентно приклеиванию к диску прямоугольника по одной его стороне; в результате снова получается поверхность, гомеоморфная диску. Таким образом, получая на каждом шаге поверхность, гомеоморфную диску, мы построим максимальное дерево, окруженное полосками и кружками. Для того, чтобы получить поверхность $\widehat{Q}$, осталось приклеить куски, образовавшиеся при разрезании перемычек. Каждый такой кусок гомеоморфен прямоугольнику, который приклеивается по одной стороне; при этом снова получается поверхность, гомеоморфная диску.

Итак, вырезав внутренности областей и разрезав полоски, соответствующие перемычкам, мы получили из Q поверхность, гомеоморфную диску. Посмотрим теперь, к чему приводит разрезание полосок и, главное, что представляет собой обратная процедура их склейки. Рассмотрим произвольную полоску; пусть, разрезая ее, мы соединяем точки a и b на разных сторонах. Ясно, что эти точки лежат на крае поверхности Q_ε (край Q_ε состоит из границ полосок и кружков); при этом a и b могут лежать как на разных окружностях, образующих край, так и на одной.

Если они лежат на разных окружностях, разрезание по соединяющей две окружности дуге приводит к уменьшению на единицу числа дырок в поверхности (рис. 11.10); значит, обратный процесс склейки должен приводить к вырезанию одной дырки.

Если точки a и b лежат на одной окружности, процесс разрезания можно представить себе следующим образом. Прежде всего, сдвинем точки a и b в одну точку на крае; тогда разрезать придется по замкнутой кривой, начинающейся и заканчивающейся на крае. Такую процедуру можно раз-

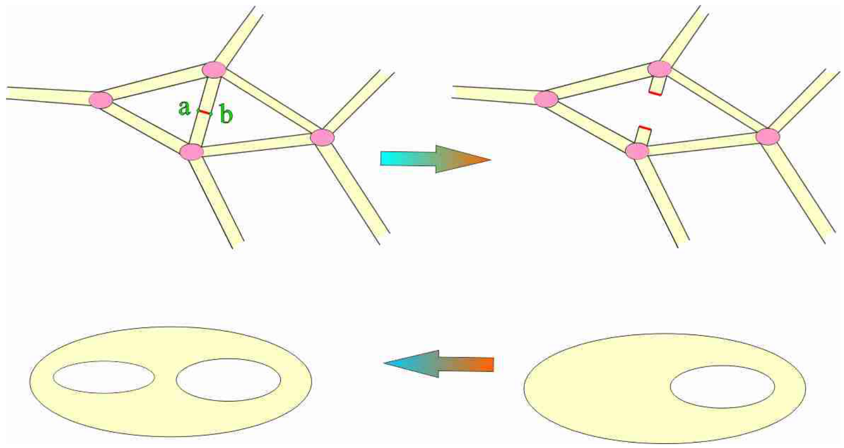

Рис. 11.10: Доказательство теоремы 11.35, шаг 3.

бить на два этапа: сперва мы разрежем поверхность по замкнутой кривой q, не пересекающейся с краем, а затем соединим этот разрез с краем по дуге (рис. 11.11).

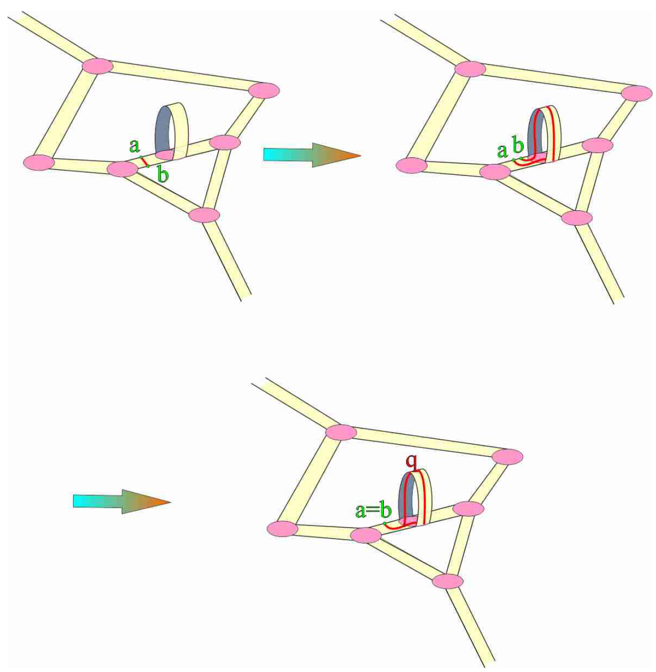

Рис. 11.11: Доказательство теоремы 11.35, шаг 4.

На втором этапе мы соединяем разрезом две точки, лежащие на разных окружностях, образующих край (одна из этих окружностей возникла при разрезании по замкнутой кривой); как мы видели выше, эта процедура сводится к заклеиванию дырки диском, а обратная — к вырезанию диска.

Наконец, осталось рассмотреть процедуру разрезания поверхности вдоль замкнутой кривой q, не пересекающейся с краем. Если мы заключим эту кривую в узкую полоску и вырежем эту полоску из нашей поверхности, вырезанный кусок будет гомеоморфен цилиндру. Действительно, если такую полоску разрезать поперек, ее можно будет распрямить в прямоугольник. При склеивании прямоугольника по двум противоположным сторонам получается либо цилиндр, либо лента Мебиуса; последняя содержит цепочку симплексов, обращающую ориентацию, а таких в нашей поверхности быть не может (напомним, что Q предполагается ориентируемой). Итак, полоска, содержащая рассматриваемую замкнутую кривую q, гомеоморфна цилиндру, а ее разрезание по нашей кривой — разрезанию цилиндра по средней окружности, в результате чего он распадается на два (рис. 11.12).

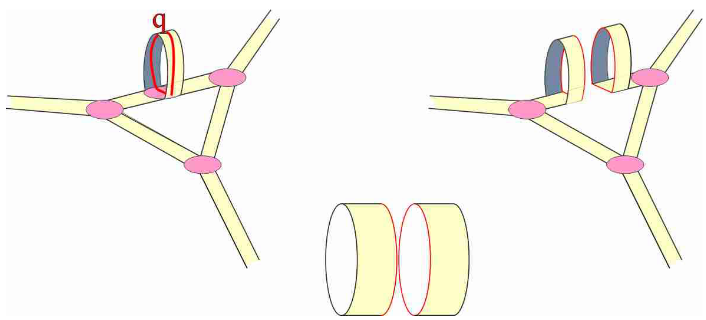

Рис. 11.12: Доказательство теоремы 11.35, шаг 5.

После такого разрезания на поверхности образуется две новых окружности, входящих в край; склеивание вдоль нашей замкнутой кривой q эквивалентно склейке двух таких окружностей. Если при склейке направление обхода “против часовой стрелки” на одной окружности перейдет в такое же направление на другой, узкая полоска, соединяющая окружности, склеится в ленту Мебиуса (рис. 11.13), что запрещено условием ориентируемости поверхности.

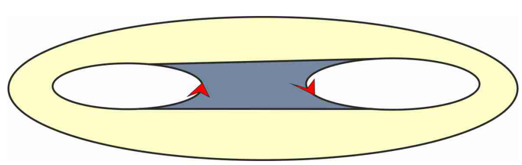

Рис. 11.13: Доказательство теоремы 11.35, шаг 6.

Таким образом, направление "против часовой стрелки" на одной из склеиваемых окружностей соединяется с направлением "по часовой стрелке" на другой; такая операция эквивалентна приклейке ручки (рис. 11.14).

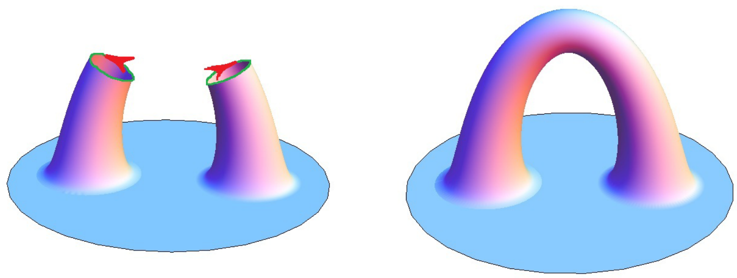

Рис. 11.14: Доказательство теоремы 11.35, шаг 7.

Подведем итог. Исходная поверхность Q получается из поверхности $\widehat{Q}$, гомеоморфной диску, при помощи серии операций (склейка полосок, соответствующих перемычкам в графе, и приклейка внутренностей областей), каждая из которых эквивалентна одной из следующих:

а) вырезание дырки;

б) заклеивание дырки диском;

в) вклейка ручки.

Значит, поверхность Q гомеоморфна сфере с некоторым количеством дырок и некоторым количеством ручек. Отсутствие края гарантирует отсутствие дырок, поэтому Q гомеоморфна одной из поверхностей M_g. □

Задача 11.36. Проследить, в каких местах доказательства использовалась ориентируемость поверхности.

Задача 11.37. Проследить, в каких местах доказательства использовалось отсутствие края.

Задача 11.38. Обозначим через M_g^m поверхность, полученную из M_g вырезанием m дырок *(*сфера с g ручками и m дырками*)*. Докажите, что любая связная ориентируемая триангулируемая поверхность с краем гомеоморфна одной из поверхностей M_g^m.

11.7 Классификация неориентируемых поверхностей

Из доказательства предыдущей теоремы видно, что, если отказаться от требования ориентируемости, в поверхности могут появиться куски, гомеоморфные пленке Мебиуса. Оказывается, это единственный эффект неориентируемости, так что любая неориентируемая поверхность получается из сферы при помощи применения конечного числа основных операций, перечисленных в конце предыдущей лекции (вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки, вклейка пленки Мебиуса). Более того, мы докажем, что в неориентируемом случае можно обойтись без ручек, так что главной операцией будет вклейка пленки Мебиуса. Приведем новое удобное описание этой операции. Прежде, чем вклеивать пленку Мебиуса в поверхность, разрежем ее по средней линии; получим поверхность, гомеоморфную цилиндру. Обратную склейку средней линии можно представлять себе как отождествление диаметрально противоположных точек одного из оснований цилиндра (рис. 11.15; на рисунке одинаковыми буквами обозначены точки, которые требуется отождествить). Тем самым, вклейку пленки Мебиуса в поверхность можно представлять себе следующим образом: сперва в поверхности вырезается дырка и в нее вклеивается цилиндр (одно из его оснований приклеивается к краю дырки), а затем на оставшемся основании цилиндра отождествляются диаметрально противоположные точки. Ясно, что вклейка цилиндра заменяет поверхность на гомеоморфную (дырка просто уменьшается в размере); таким образом, *чтобы вклеить пленку Мебиуса, надо вырезать в поверхности дырку и отождествить на возникшей компоненте края диаметрально противоположные точки.*

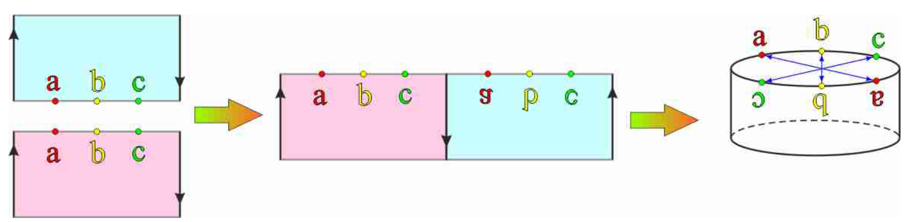

Рис. 11.15: Пленка Мебиуса.

Задача 11.39. Описать операцию отождествления диаметрально противоположных точек компоненты края поверхности в терминах триангуляции; убедиться, что при этом к поверхности присоединяется пленка Мебиуса.

Теперь мы можем описать неориентируемые поверхности. Обозначим через N_k поверхность, полученную из сферы вклейкой k пленок Мебиуса.

Теорема 11.40. *Каждая связная неориентируемая триангулируемая поверхность без края гомеоморфна одной из поверхностей N_k.*

Доказательство. Будем действовать по тому же плану, что и при доказательстве предыдущей теоремы; легко понять, что ориентируемость поверхности в этом доказательстве используется в двух местах, причем оба относятся к операции вырезания из поверхности ленточной окрестности замкнутой кривой (и к обратной операции вклейки).

Во-первых, сама вырезаемая ленточка может быть гомеоморфна либо цилиндру, либо пленке Мебиуса; в ориентируемом случае возможен только первый вариант, тогда как сейчас мы должны допустить и второй. Тем самым, к перечисленным выше операциям (вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки), при помощи которых из сферы получается исходная поверхность Q, добавляется еще одна — вклейка пленки Мебиуса.

Во-вторых, если ленточка все же гомеоморфна цилиндру, вклейка этого цилиндра в поверхность эквивалентна склейке краев двух дырок; эта склейка может осуществляться двумя различными способами, причем, если направление обхода “против часовой стрелки” на одной окружности переходит в такое же направление на второй, получается неориентируемая поверхность. Нам осталось выяснить, что именно происходит при такой операции. Рассмотрим поверхность, в которой вырезаны две дырки, а затем края этих дырок склеены с учетом одинаковой ориентации на них. Представим эту процедуру следующим образом. Сперва разрежем поверхность по двум отрезкам, соединяющим края дырок; при этом из поверхности выпадет связный кусок. Вклеим этот кусок назад в поверхность, склеив сперва края дырок по нужному правилу (для этого кусок придется “вывернуть наизнанку”); в результате снова получим поверхность с двумя дырками (край каждой дырки — вновь проведенный разрез), но теперь требуется склеить диаметрально противоположные точки на краях дырок. Выше мы видели, что такая операция эквивалентна вклейке пленки Мебиуса; таким образом, вклейка в поверхность нашего цилиндра эквивалентна приклеиванию к ней двух пленок Мебиуса. На рис. 11.16 вырезаемый и вновь вклеиваемый кусок закрашен; одинаковыми буквами обозначены точки, которые требуется отождествить.

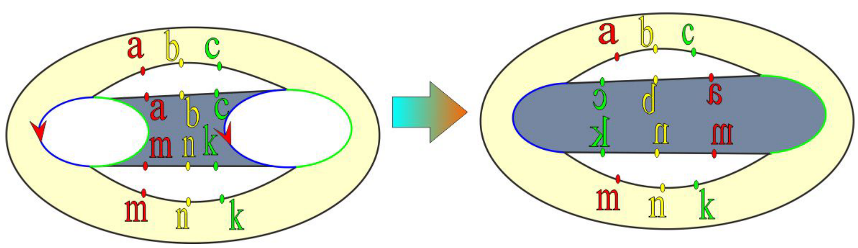

Рис. 11.16: Склейка двух дырок эквивалентна вклейке двух пленок Мебиуса.

Итак мы доказали, что любая поверхность получается из сферы при помощи четырех операций: вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки и и вклейка пленки Мебиуса. В результате получится сфера с некоторым количеством дырок, ручек и пленок Мебиуса. Поскольку мы рассматриваем поверхности без края, дырок быть не может; кроме того, поскольку поверхность неориентируема, хотя бы одна пленка Мебиуса присутствует. Таким образом, наша поверхность гомеоморфна сфере с $g \geq 0$

ручками и $s \geq 1$ пленками Мебиуса. Оказывается, такая поверхность гомеоморфна сфере, к которой приклеено $s+2g$ пленок Мебиуса (ручки приклеивать не надо). Другими словами, в присутствии хотя бы одной пленки Мебиуса, любая ручка на поверхности эквивалентна двум пленкам Мебиуса. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим на поверхности ручку и пленку Мебиуса; напомним, что приклейка ручки эквивалентна вырезанию двух дырок и последующей склейке их краев с учетом противоположной ориентации, а приклейка пленки Мебиуса — вырезанию дырки и последующему отождествлению диаметрально противоположных точек ее края. Вырежем сперва все три дырки и затем разрежем поверхность по кривой, соединяющей точки на краю дырки, отвечающей пленке Мебиуса; при этом кривая должна охватывать одну из двух дырок, отвечающих ручке. Из поверхности выпадет связный кусок; вклеим его назад так, чтобы совпали диаметрально противоположные точки на крае дырки, соответствующей пленке Мебиуса (для этого вырезанный кусок надо “вывернуть наизнанку”). В результате на поверхности образуются три дырки — две были изначально и соответствовали ручке, а третья образовалась из вновь проведенного разреза. Края этих дырок надо склеить следующим образом: две бывшие ранее дырки склеить по краю с учетом *одинаковой ориентации* (направление изменилось в результате переворачивания вырезанного куска) и на крае третьей отождествить диаметрально противоположные точки. Как мы видели выше, в результате этих операций к поверхности присоединяются три пленки Мебиуса.

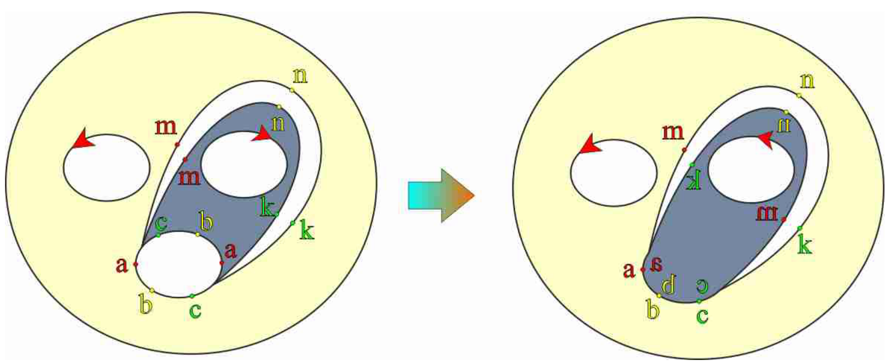

Рис. 11.17: Замена ручки на две пленки Мебиуса.

□

Задача 11.41. Сформулируйте и докажите теорему классификации неориентируемых поверхностей с краем.

Упражнения к главе 11.

Упражнение 11.1. Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. *Эйлеровой характеристикой* такой карты называется число $v-e+f$, где v — число вершин, e — число ребер и f — число областей. Докажите, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание: рассмотрите карту, получающуюся "наложением" двух карт, т.е. объединением их границ.

Упражнение 11.2. *Эйлеровой характеристикой поверхности* называется число

$$\chi = v - e + f,$$

где v, e и f — числа вершин, ребер и областей любой карты, нарисованной на поверхности (согласно утверждению из упражнения *11.1*, это число не зависит от карты и, тем самым, характеризует саму поверхность). Вычислите эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мебиуса.

Упражнение 11.3. Поверхность M получается из поверхности N вырезанием k дисков. Выразите $\chi(M)$ через $\chi(N)$.

Упражнение 11.4. Каждая из двух поверхностей M и N имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска. Поверхность Q получается из поверхностей M и N склеиванием краев. Выразите $\chi(Q)$ через $\chi(M)$ и $\chi(N)$.

Упражнение 11.5. Вычислите эйлерову характеристику

(1) поверхности M_g^m, полученной из сферы с g ручками вырезанием m дырок;

(2) поверхности N_h^m, полученной из сферы с h пленками Мебиуса вырезанием m дырок.

Упражнение 11.6. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, $c, \dots$ в следующем порядке*:* a, b, a, b, c, d, c, $d, \dots$ Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Докажите, что, если число разных букв равно $2g$, то полученная поверхность гомеоморфна сфере с g ручками.

Упражнение 11.7. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, $c, \dots$ в следующем порядке*:* a, a, b, b, c, c, d, $d, \dots$ Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода. Докажите, что, если число разных букв равно h, то полученная поверхность гомеоморфна сфере с h пленками Мебиуса.

Упражнение 11.8. На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, причем каждая страна представляет собой некоторый n-угольник, и в каждой вершине сходится по k ребер. Докажите, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e},$$

где χ — эйлерова характеристика поверхности, а e — число ребер карты. Приведите пример такой карты на сфере при $n = 2$, $k = 4$.

Упражнение 11.9. Вычислите эйлеровы характеристики бутылки Клейна и проективной плоскости.