

Семинары 3-4. Двумерные поверхности

1. Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. Эйлеровой характеристикой такой карты называется число $f + v - e$, где f – число областей, e – число ребер, и v – число вершин. Доказать, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание: рассмотреть карту, получающуюся “наложением” двух карт, т.е. объединением их границ.

2. Эйлеровой характеристикой поверхности называется число

$$\chi = f + v - e,$$

где f, v и e – числа областей, вершин и ребер любой карты, нарисованной на поверхности (согласно утверждению из задачи 1, это число не зависит от карты и, тем самым, характеризует саму поверхность). Вычислить эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мебиуса.

3. Поверхность M получается из сферы вырезанием k круглых дисков (на рисунке закрашены черным).

Найти эйлерову характеристику поверхности M .

4. Ручкой называется поверхность, полученная из тора вырезанием диска (на рисунке закрашен).

Вычислить эйлерову характеристику поверхности ручки.

5. Поверхность M получается из поверхности N вырезанием k дисков. Выразить $\chi(M)$ через $\chi(N)$.

6. Каждая из двух поверхностей M и N имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска (на рисунках края – границы закрашенных дисков).

Поверхность Q получается из поверхностей M и N склеиванием краев. Выразить $\chi(Q)$ через $\chi(M)$ и $\chi(N)$.

7. Поверхность M получается из восьмиугольника так, чтобы совпали стрелки на сторонах, обозначенных одинаковыми буквами.

Вычислить $\chi(M)$.

8. Поверхность M_g получается из сферы вырезанием g дисков и приклеиванием по образовавшимся краям g ручек. Вычислить $\chi(M_g)$.

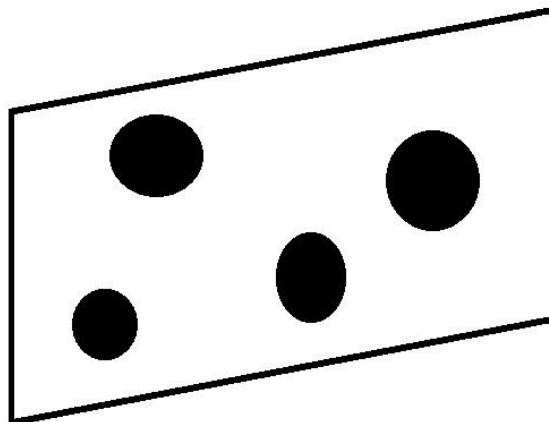


Рис. 1: Вырезание дырок.

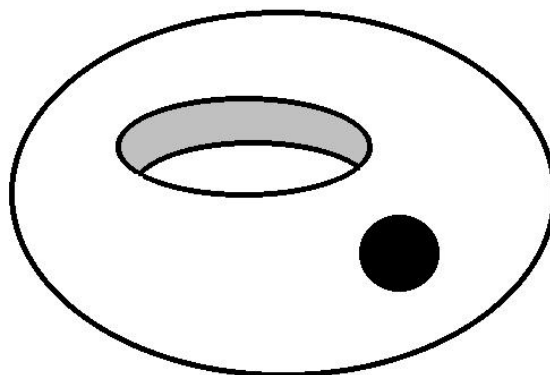


Рис. 2: Ручка.

9. В шаре высверлены два отверстия, не пересекающиеся между собой. Какой из поверхностей M_g гомеоморфна полученная поверхность?
10. В шаре высверлены два отверстия, проходящие через центр шара. Какой из поверхностей M_g гомеоморфна полученная поверхность?
11. В шаре высверлены t отверстий, не пересекающихся между собой. Какой из поверхностей M_k эквивалентна полученная поверхность?
12. В шаре высверлены t отверстий, проходящих через центр шара. Какой из поверхностей M_k эквивалентна полученная поверхность?
13. Какая поверхность получится, если в пятиугольнике склеить стороны так, как показано на рисунке (сторона c не склеивается ни с чем)?

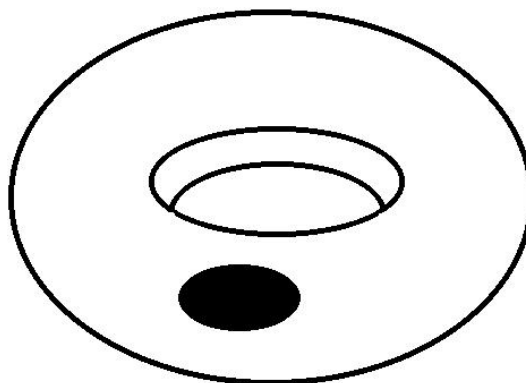


Рис. 3: .

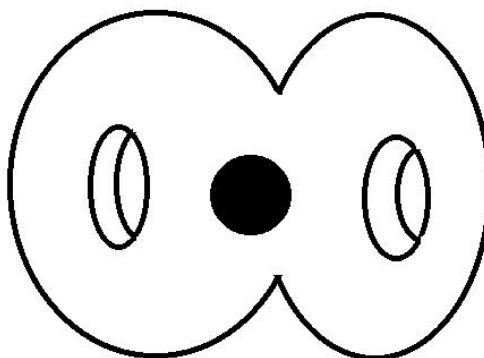


Рис. 4: .

14. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, c, \dots в следующем порядке: $a, b, a, b, c, d, c, d, \dots$. Затем стороны, помеченные одноименными буквами склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Доказать, что, если число разных букв равно $2g$, то полученная поверхность эквивалентна сфере с g ручками.

15. На поверхности M_g проведено m замкнутых кривых, причем, если по ним разрезать поверхность, она останется связной. Доказать, что $m \leq g$.

16. На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, при-

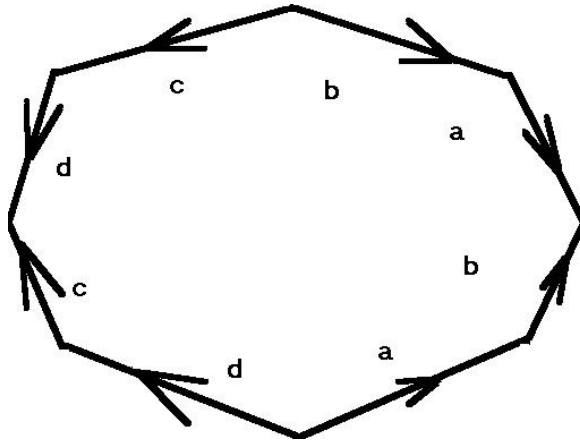


Рис. 5: Склейка из восьмиугольника.

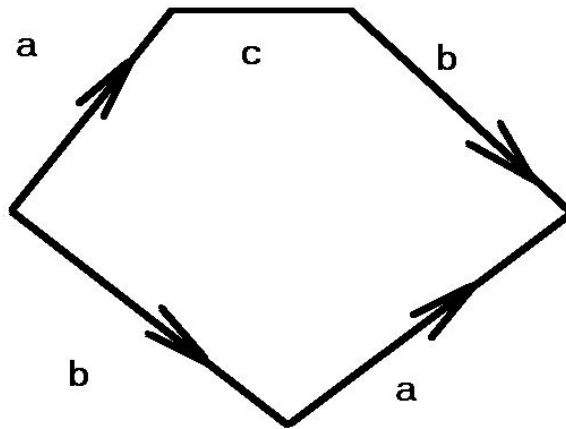


Рис. 6: Склейка пятиугольника.

чем каждая грань – пятиугольник и в каждой вершине сходится по четыре границы. Доказать, что число стран в этой карте делится на восемь.

17. Нарисовать на “развертке” тора (прямоугольнике) карту так, чтобы каждая страна была гомеоморфна диску.

18. Вычислить эйлерову характеристику чайника со снятой крышкой (у него есть ручка и носик).

19. На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, причем каждая страна – n -угольник и в каждой вершине сходится по k ребер.

Доказать, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e},$$

где χ – эйлерова характеристика поверхности, а e – число ребер карты. Привести пример такой карты на сфере при $n = 2, k = 4$.

20. У фигуры, нарисованной ниже, каждые два одинаково обозначенных отрезка склеены с перекручиванием. Ориентируема ли полученная поверхность? Из скольких кусков состоит ее край?

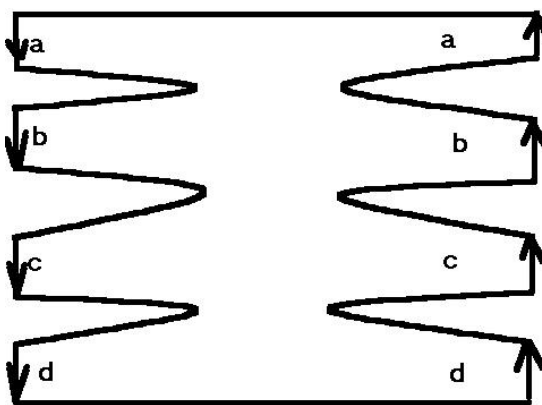


Рис. 7:

21. Вычислить эйлерову характеристику ленты Мебиуса.
22. Вычислить эйлерову характеристику смирительной рубашки (рукава сшиты между собой).
23. На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, причем каждая страна – пятиугольник и в каждой вершине сходится по четыре границы. Доказать, что число стран в этой карте делится на восемь.
24. В $4n$ -угольнике попарно склеены с учетом направлений одинаково обозначенные стороны. Какая поверхность получилась?
25. Вычислить эйлерову характеристику бутылки Клейна:
26. Вычислить эйлерову характеристику проективной плоскости:
27. Вычислить эйлерову характеристику сахарницы.
28. Вычислить эйлерову характеристику поверхности, полученной разрезанием ленты Мебиуса по средней линии.
29. На развертке кренделя нарисовать карту, каждая страна в которой гомеоморфна диску. Вычислить для этой карты n, e и f .
30. На торе нарисована карта, причем все грани – n -угольники и в каждой вершине сходится одинаковое число границ. Доказать, что $n = 3, 4$ или 6 .

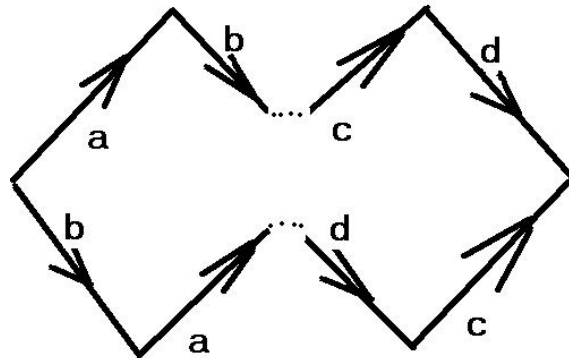
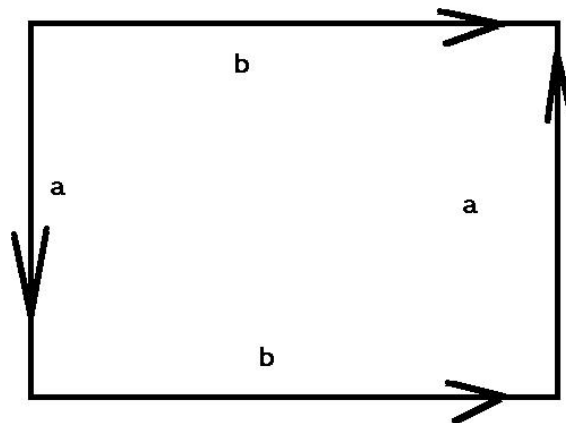
Рис. 8: Склейка из $4n$ -угольника.

Рис. 9: Бутылка Клейна.

31. В каждой из поверхностей M и N вырезали по дырке; кроме того, две дырки вырезали в торе. Затем один из получившихся краев тора приклеили к краю дырки в поверхности M , а второй – к краю дырки в N . Выразить эйлерову характеристику получившейся поверхности через эйлеровы характеристики M и N .

32. В бутылке Клейна вырезали дырку и вклеили туда ленту Мебиуса. Найти эйлерову характеристику получившейся поверхности.

33. Какие типы компактных ориентируемых поверхностей имеют эйлерову характеристику -3 ?

34. Нарисовать на плоскости многоугольник, при склейке которого по-

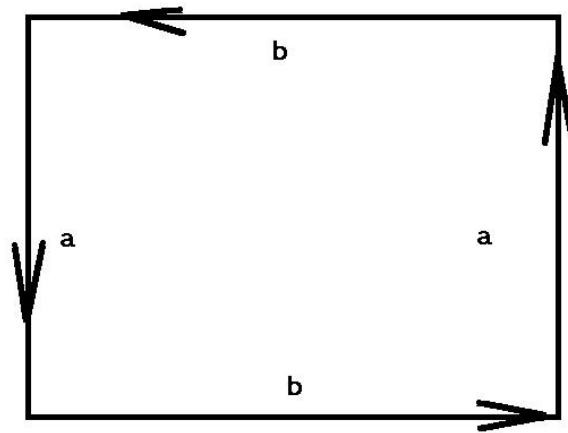


Рис. 10: Проективная плоскость.

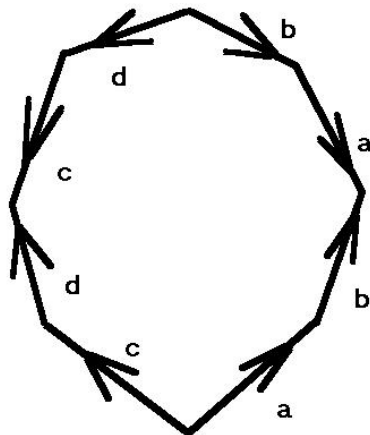


Рис. 11: Развертка кренделя.

лучается тор с двумя дырками.

35. На бутылке Клейна нарисована карта, причем все грани – n -угольники и в каждой вершине сходится одинаковое число границ. Может ли n быть равным 7?

36. Четыре сферы попарно соединили цилиндрами. Вычислить эйлерову характеристику полученной поверхности.

37. В торе вырезали две дырки и вклеили в них ленты Мебиуса. Найти эйлерову характеристику получившейся поверхности.

38. Компактная поверхность имеет эйлерову характеристику 1. Верно ли, что эта поверхность – сфера с дыркой?

39. Нарисовать на плоскости многоугольник, при склейке которого получается крендель с дыркой.

40. На ленте Мебиуса нарисована карта, причем все грани – n -угольники и в каждой вершине сходится одинаковое число границ. Может ли n быть равным 8?

41. Три тора попарно соединили цилиндрами. Вычислить эйлерову характеристику полученной поверхности.