

# Семинар 2. Инварианты плоских кривых

1. Доказать, что для любой гладкой (даже для любой непрерывной) непостоянной периодической функции существует минимальный положительный период.
2. Доказать, что, если  $f(t)$  –  $T$ -периодическая функция, а  $g(x)$  – гладкая функция на  $\mathbb{R}$ , то композиция  $g(f(t))$  –  $T$ -периодическая.
3. Доказать, что производная от  $T$ -периодической функции –  $T$ -периодическая функция.
4. Построить регулярную гомотопию окружности и эллипса; эллипса и овала  $\frac{x_1^4}{a_1^4} + \frac{x_2^4}{a_2^4} = 1$ .
5. Для каждого целого  $n$  привести пример кривой с числом вращения, равным  $n$ .
6. Пусть точка  $x_0$  не лежит на кривой  $\gamma : x = r(t)$ ; число оборотов вектора  $r(t) - x_0$  называется индексом точки  $x_0$  относительно кривой  $\gamma$ . Нарисовать кривые с числом вращения 1 и 0 и вычислить индексы всех точек плоскости относительно этих кривых.
7. Вычислить число вращения кривой
  - а)  $x = (\frac{1}{2} \cos t, \sin t)$ ;
  - б)  $x = (2 \cos t, -\sin t)$ ;
  - в)  $x = (\cos t, \sin 2t)$ .
8. Пусть  $x_0$  – точка кривой  $\gamma$ , не являющаяся точкой самопересечения. Круг малого радиуса с центром в точке  $x_0$  делится кривой на две области. Доказать, что индексы точек в этих областях относительно кривой  $\gamma$  отличаются на единицу. У каких точек индекс больше?