Семинар 1

Элементы теории графов

1. Проложить маршруты в заданной железнодорожной сети так, чтобы каждый отрезок пути обслуживался ровно одним маршрутом.

2. Пусть G - граф; обозначим через a(k) число вершин степени k. Доказать, что число ребер графа G равно (a(1)+2a(2)+3a(3)+...)/2.

3. Доказать, что во всяком графе число вершин нечетной степени четно.

4. Можно ли нарисовать одним росчерком следующие графы

5. Доказать, что, если степени всех вершин графа четны, то его можно нарисовать одним росчерком, стартовав с произвольной вершины и вернувшись в ту же вершину.

6. Доказать, что граф уникурсален тогда и только тогда, когда он содержит не более двух вершин нечетной степени.

7. Что изменится в задаче Эйлера о мостах, если в произвольном месте построить еще один мост?

8. Граф называется полным, если он не содержит петель и любые две вершины соединены ровно одним ребром. При каких условиях полный граф уникурсален?

9. Заданные графы нарисовать одним росчерком, проходя каждое ребро ровно два раза.

10. Доказать, что любой связный граф можно нарисовать одним росчерком, если проходить каждое ребро ровно два раза.

11. Построить заданные графы из одной вершины, последовательно добавляя по одному ребру так, чтобы каждый раз получался связный граф.

12. Доказать, что любой связный граф можно построить из одной вершины, последовательно добавляя по одному ребру так, чтобы каждый раз получался связный граф.

13. Доказать, что любые две вершины связного графа можно соединить цепочкой ребер так, что каждая вершина из этой цепочки проходится ровно один раз (такие цепочки называются простыми).

14. Доказать, что, если любые две вершины графа можно соединить по крайней мере двумя простыми цепочками, то граф не содержит вершин степени 1. Верно ли обратное утверждение?

15. Доказать, что каждые две вершины дерева можно соединить ровно одной простой цепочкой. Верно ли обратное утверждение?

16. Для заданных графов построить максимальные деревья и вычислить числа Бетти.

17. Доказать, что, если граф получается из дерева добавлением нескольких петель (замкнутых ребер), то его максимальное дерево единственно. Верно ли обратное?

18. Электрическая цепь представляет собой граф. Если в цепи течет ток, то на каждом ребре задано направление тока и неотрицательное число (сила тока), причем выполнено правило Кирхгофа: для каждой вершины сумма втекающих в нее токов равна сумме вытекающих. Доказать, что по деревьям ток не течет (т.е. если цепь - дерево, то все токи на ребрах обязательно равны нулю).

19. Пустить ток по заданным цепям.

20. Доказать, что в произвольной электрической цепи по токам в перемычках можно однозначно восстановить ток во всей цепи. Другими словами, произвольно задав направления и силы тока в перемычках, их можно единственным образом распространить на всю цепь.

21. Хроматическим числом графа называется минимальное число цветов правильной раскраски. Вычислить хроматическое число: а) полного графа;

б) полного графа без ребра;

в) цикла с n ребрами.

22. От одной из двух концентрических окружностей к другой проведено n перегородок. Сколько красок нужно для раскраски полученной карты?

23. На плоскости начерчен граф, все вершины которого имеют степень четыре. Доказать, что полученную карту можно раскрасить в два цвета.

24. На плоскости начерчен граф, все вершины которого имеют четные степени. Доказать, что полученную карту можно раскрасить в два цвета.

25. Карта такова, что из каждых двух пограничных стран хотя бы одна является треугольником. Доказать, что такую карту можно раскрасить в четыре цвета.

26. Тором называется поверхность, полученная склеиванием противоположных сторон прямоугольника так, чтобы совпали стрелки (см. рис.1,2).

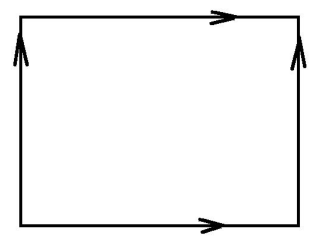

Рис. 1.1:

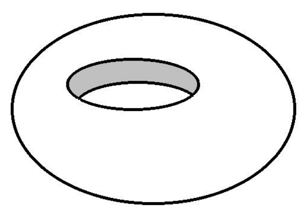

Рис. 1.2:

Определить число цветов, необходимых для раскраски карт на торе, изображенных на рис. 3,4. (номерами обозначены различные страны).

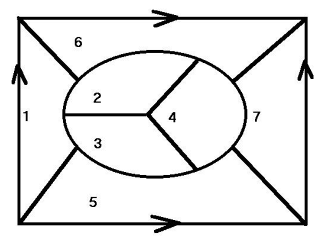

Рис. 1.3:

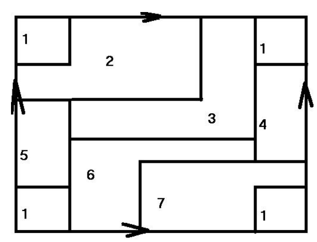

Рис. 1.4:

27. Лентой Мебиуса называется поверхность, полученная склеиванием двух сторон прямоугольника так, чтобы стрелки совпали (рис. 5,6).

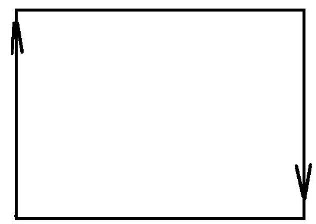

Рис. 1.5:

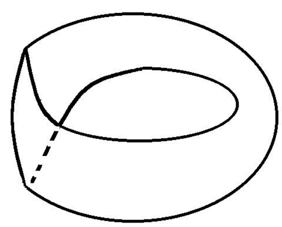

Рис. 1.6:

Определить число цветов, необходимых для раскраски карт на ленте Мебиуса, изображенных на рис. 7,8 (номерами обозначены различные страны).

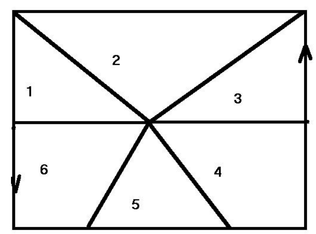

Рис. 1.7:

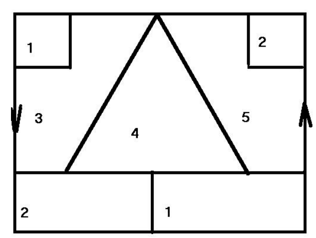

Рис. 1.8:

28. Имеется куча спичек. Первый игрок делит ее на две части, после чего второй выбирает одну из частей, в свою очередь делит ее, затем первый выбирает одну часть и т.д. Проигрывает тот, кто выбрал часть, состоящую из одной спички. Какой игрок выигрывает при правильной игре? Как изменится ответ, если игрок, выбравший одну спичку, выигрывает?

29. С каждой игрой, допускающей конечное число ходов, можно связать дерево по следующему принципу. Сперва отмечаем вершину, обозначающую положение игры перед первым ходом. Все возможные ходы первого игрока обозначаем ребрами, выходящими из нее. В конце каждого ребра отмечаем вершину; она обозначает положение игры после соответствующего хода. Из каждой такой вершины выходят ребра, обозначающие все возможные ходы второго игрока и т.д. Построить графы, соответствующие играм, описанным в предыдущей задаче (число спичек 1-7). Отметить на них цепочки ребер, изображающих правильные стратегии игроков.

30. Алгоритм Куна в теории игр позволяет определять правильное пове-

дение по следующему правилу. Рассмотрим "финальные"вершины дерева, обозначающего игру, т.е. вершины, соответствующие положению игроков в момент окончания игры. Вершины, описывающие ситуацию перед последним ходом, назовем предфинальными. Выберем те предфинальные вершины, из которых выходят только ребра, ведущие к финальным, и для каждой такой вершины среди этих ребер выберем то, которое описывает лучший ход соответствующего игрока. Будем считать, что игрок ходит именно таким образом, и перенесем положение (исход) игры из соответствующей финальной вершины графа в предфинальную, стерев все ребра, выходящие из последней. После такой процедуры дерево, описывающее игру, уменьшится; повторяя ее достаточное число раз, придем в конце концов в начальную вершину. При этом из нее выходит ребро (возможно, не одно), соответствующее лучшему ходу первого игрока, за ним следует ребро, описывающее лучший ход второго, и т.д.; тем самым определяются правильные ходы игроков.

Применить алгоритм Куна для нахождения правильных стратегий игр, описанных в задаче 21 (число спичек 1-7).

31. В турнире участвовали четыре команды: А, Б, В и Г. Комиссия, определявшая победителя, состояла из трех человек; мнения членов комиссии разделились – первый предложил присудить первое место команде В, второе – команде Б, третье – команде А и четвертое – команде Г, второй и третий расположили команды в следующих порядках: второй – Б,В,Г,А, третий – Г,Б,В,А. Для того, чтобы определить победителя, члены комиссии по очереди (сначала первый, затем второй, последним третий) налагали вето на одну команду; после того, как вето наложили все трое, осталась одна команда, которая и была объявлена победителем. Какая команда победила? Считается, что все члены комиссии действовали наилучшим образом в соответствии со своими мнениями о командах, причем каждому из них известны мнения остальных.