Лекция 4. Классификация двумерных поверхностей

План лекции. Классификация двумерных поверхностей.

0.1 Классификация ориентируемых поверхностей

Наша цель – классифицировать двумерные поверхности с точностью до гомеоморфизма. Прежде всего отметим, что достаточно ограничиться поверхностями, "состоящими из одного куска"; такие поверхности называются связными.

Определение. Поверхность M называется связной, если любые две точки M можно соединить непрерывной кривой, лежащей на M.

Замечание. Ясно, что на каждой связной поверхности существует связный граф, разбивающий ее на куски, гомеоморфные диску.

Начнем с классификации ориентируемых поверхностей без края. Обозначим через M_g поверхность, полученную из сферы приклейкой g ручек.

Теорема 0.1. *Каждая связная ориентируемая триангулируемая поверхность без края гомеоморфна одной из поверхностей M_g.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Пусть дана поверхность Q. Мы будем выполнять с этой поверхностью ряд операций (заменяющих ее на *не гомеоморфную*), в результате чего получится поверхность, гомеоморфная диску, т.е. сфере с вырезанной дыркой. Затем мы проследим, как восстанавливается по этой поверхности наша исходная поверхность Q и убедимся, что в процессе восстановления получается сфера, в которой вырезано несколько дырок и некоторые из них заклеены ручками. Вспоминая, что исходная поверхность края не имела, мы заключим, что свободных дырок в нашей поверхности Q нет, т.е. она получается из сферы приклейкой некоторого числа ручек.

Перейдем к реализации этой программы. Рассмотрим на Q связный граф Γ, разбивающий ее на конечное число областей, каждая из которых гомеоморфна диску. Окружим каждую вершину графа маленьким "кружком", а каждое ребро заключим в узкую полоску, соединяющую построенные "кружки" (рис. 1). Другими словами, рассмотрим поверхность Q_ε, состоящую из точек $P \in Q$, находящихся от Γ на расстоянии, не большем ε; здесь $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

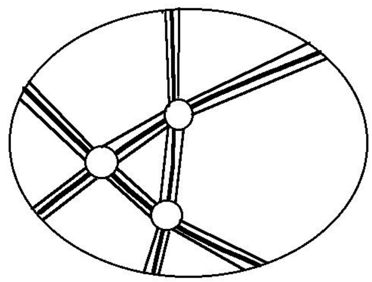

Рис. 1: Доказательство теоремы 0.1, шаг 1.

Вырежем теперь из поверхности Q все оставшиеся куски областей (внутренности); каждый кусок гомеоморфен диску, так что эта процедура сводится к вырезанию в поверхности нескольких дырок, а обратная к ней — к заклеиванию дырок дисками.

Рассмотрим теперь получившуюся после такого удаления поверхность Q_ε — она состоит из кружков, окружающих вершины графа, соединенных ленточками, содержащими ребра. Рассмотрим в графе максимальное дерево и соответствующие перемычки. Каждую полоску, соответствующую перемычкам, разрежем поперек; в результате получится новая поверхность $\hat{Q}$ (рис. 2).

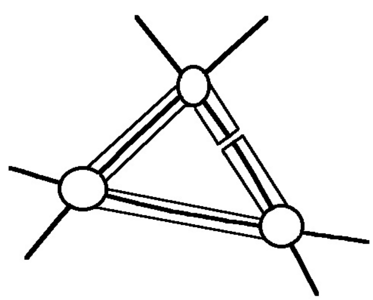

Рис. 2: Доказательство теоремы 0.1, шаг 2.

Убедимся в том, что эта поверхность гомеоморфна диску. Действительно, рассмотрим максимальное дерево рассматриваемого графа. Это дерево можно строить, начиная с одного ребра, соединяющего две вершины и добавляя каждый раз по одному ребру и одной вершине так, чтобы все время получалось дерево. Два кружка, соединенных полоской, очевидно, гомеоморфны диску; добавление полоски с кружком эквивалентно приклеиванию к диску прямоугольника по одной его стороне; в результате снова получается поверхность, гомеоморфная диску. Таким образом, получая на каждом шаге поверхность, гомеоморфную диску, мы построим максимальное дерево, окруженное полосками и кружками. Для того, чтобы получить поверхность $\hat{Q}$, осталось приклеить куски, образовавшиеся при разрезании перемычек. Каждый такой кусок гомеоморфен прямоугольнику, который приклеивается по одной стороне; при этом снова получается поверхность, гомеоморфная диску.

Итак, вырезав внутренности областей и разрезав полоски, соответствующие перемычкам, мы получили из Q поверхность, гомеоморфную диску. Посмотрим теперь, к чему приводит разрезание полосок и, главное, что представляет собой обратная процедура их склейки. Рассмотрим произвольную полоску; пусть, разрезая ее, мы соединяем точки a и b на разных сторонах. Ясно, что эти точки лежат на крае поверхности Q_ε (край Q_ε состоит из границ полосок и кружков); при этом a и b могут лежать как на разных окружностях, образующих край, так и на одной.

Если они лежат на разных окружностях, разрезание по соединяющей две окружности дуге приводит к уменьшению на единицу числа дырок в поверхности (рис. 3); значит, обратный процесс склейки должен приводить к вырезанию одной дырки.

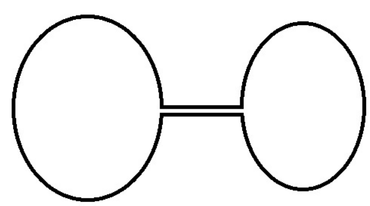

Рис. 3: Доказательство теоремы 0.1, шаг 3.

Если точки a и b лежат на одной окружности, процесс разрезания можно представить себе следующим образом. Прежде всего, сдвинем точки a и b в одну точку на крае; тогда разрезать придется по замкнутой кривой, начинающейся и заканчивающейся на крае. Такую процедуру можно разбить на два этапа: сперва мы разрежем поверхность по замкнутой кривой q, не пересекающейся с краем, а затем соединим этот разрез с краем по дуге (рис. 4).

На втором этапе мы соединяем разрезом две точки, лежащие на раз-

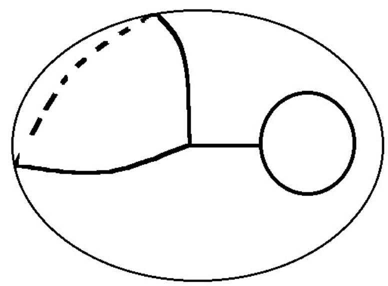

Рис. 4: Доказательство теоремы 0.1, шаг 4.

ных окружностях, образующих край (одна из этих окружностей возникла при разрезании по замкнутой кривой); как мы видели выше, эта процедура сводится к заклеиванию дырки диском, а обратная — к вырезанию диска.

Наконец, осталось рассмотреть процедуру разрезания поверхности вдоль замкнутой кривой q, не пересекающейся с краем. Если мы заключим эту кривую в узкую полоску и вырежем эту полоску из нашей поверхности, вырезанный кусок будет гомеоморфен цилиндру. Действительно, если такую полоску разрезать поперек, ее можно будет распрямить в прямоугольник. При склеивании прямоугольника по двум противоположным сторонам получается либо цилиндр, либо лента Мебиуса; последняя содержит цепочку симплексов, обращающую ориентацию, а таких в нашей поверхности быть не может (напомним, что Q предполагается ориентируемой). Итак, полоска, содержащая рассматриваемую замкнутую кривую q, гомеоморфна цилиндру, а ее разрезание по нашей кривой — разрезанию цилиндра по средней окружности, в результате чего он распадается на два (рис. 5).

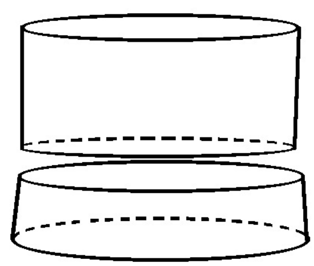

Рис. 5: Доказательство теоремы 0.1, шаг 5.

После такого разрезания на поверхности образуется две новых окружности, входящих в край; склеивание вдоль нашей замкнутой кривой q эквивалентно склейке двух таких окружностей. Если при склейке направление обхода “против часовой стрелки” на одной окружности перейдет в такое же направление на другой, узкая полоска, соединяющая окружности, склеится в ленту Мебиуса (рис. 6), что запрещено условием ориентируемости поверхности.

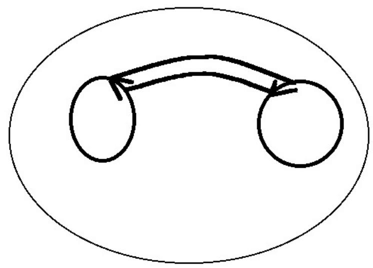

Рис. 6: Доказательство теоремы 0.1, шаг 6.

Таким образом, направление “против часовой стрелки” на одной из склеиваемых окружностей соединяется с направлением “по часовой стрелке” на другой; такая операция эквивалентна приклейке ручки (рис. 7).

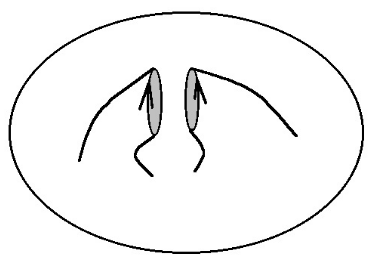

Рис. 7: Доказательство теоремы 0.1, шаг 7.

Подведем итог. Исходная поверхность Q получается из поверхности $\hat{Q}$, гомеоморфной диску, при помощи серии операций (склейка полосок, соответствующих перемычкам в графе, и приклейка внутренностей областей), каждая из которых эквивалентна одной из следующих:

а) вырезание дырки;

б) заклеивание дырки диском;

в) вклейка ручки.

Значит, поверхность Q гомеоморфна сфере с некоторым количеством дырок и некоторым количеством ручек. Отсутствие края гарантирует отсутствие дырок, поэтому Q гомеоморфна одной из поверхностей M_g. □

Задача 0.2. *Проследить, в каких местах доказательства использовалась ориентируемость поверхности.*

Задача 0.3. *Проследить, в каких местах доказательства использовалось отсутствие края.*

Задача 0.4. *Обозначим через M_g^m поверхность, полученную из M_g вырезанием m дырок (сфера с g ручками и m дырками). Доказать, что любая связная ориентируемая триангулируемая поверхность с краем гомеоморфна одной из поверхностей M_g^m.*

0.2 Классификация неориентируемых поверхностей

Из доказательства предыдущей теоремы видно, что, если отказаться от требования ориентируемости, в поверхности могут появиться куски, гомеоморфные пленке Мебиуса. Оказывается, это единственный эффект неориентируемости, так что любая неориентируемая поверхность получается из сферы при помощи применения конечного числа основных операций, перечисленных в конце предыдущей лекции (вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки, вклейка пленки Мебиуса). Более того, мы докажем, что в неориентируемом случае можно обойтись без ручек, так что главной операцией будет вклейка пленки Мебиуса. Прежде всего, приведем новое удобное описание этой операции. Прежде, чем вклеивать пленку Мебиуса в поверхность, разрежем ее по средней линии; получим поверхность, гомеоморфную цилиндру. Обратную склейку средней линии можно представлять себе как отождествление диаметрально противоположных точек одного из оснований цилиндра (рис. 8; на рисунке одинаковыми буквами обозначены точки, которые требуется отождествить). Тем самым, вклейку пленки Мебиуса в поверхность можно представлять себе следующим образом: сперва в поверхности вырезается дырка и в нее вклеивается цилиндр (одно из его оснований приклеивается к краю дырки), а затем на оставшемся основании цилиндра отождествляются диаметрально противоположные точки. Ясно, что вклейка цилиндра заменяет поверхность на гомеоморфную (дырка просто уменьшается в размере); таким образом, *чтобы вклеить пленку Мебиуса, надо вырезать в поверхности дырку и отождествить на возникшей компоненте края диаметрально противоположные точки.*

Задача 0.5. *Описать операцию отождествления диаметрально противоположных точек компоненты края поверхности в терминах триангуляции; убедиться, что при этом к поверхности присоединяется пленка Мебиуса.*

Теперь мы можем описать неориентируемые поверхности. Обозначим через N_k поверхность, полученную из сферы вклейкой k пленок Мебиуса.

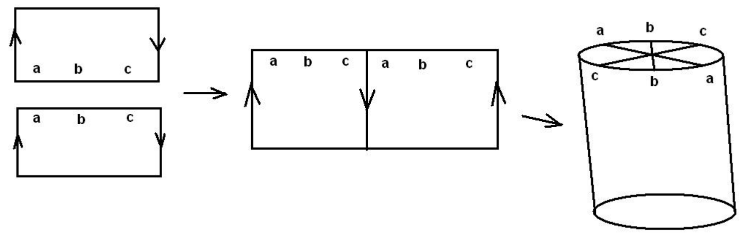

Рис. 8: Пленка Мебиуса.

Теорема 0.6. *Каждая связная неориентируемая триангулируемая поверхность без края гомеоморфна одной из поверхностей N_k.*

Доказательство. Будем действовать по тому же плану, что и при доказательстве предыдущей теоремы; легко понять, что ориентируемость поверхности в этом доказательстве используется в двух местах, причем оба относятся к операции вырезания из поверхности ленточной окрестности замкнутой кривой (и к обратной операции вклейки).

Во-первых, сама вырезаемая ленточка может быть гомеоморфна либо цилиндру, либо пленке Мебиуса; в ориентируемом случае возможен только первый вариант, тогда как сейчас мы должны допустить и второй. Тем самым, к перечисленным выше операциям (вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки), при помощи которых из сферы получается исходная поверхность Q, добавляется еще одна — вклейка пленки Мебиуса.

Во-вторых, если ленточка все же гомеоморфна цилиндру, вклейка этого цилиндра в поверхность эквивалентна склейке краев двух дырок; эта склейка может осуществляться двумя различными способами, причем, если направление обхода "против часовой стрелки" на одной окружности переходит в такое же направление на второй, получается неориентируемая поверхность. Нам осталось выяснить, что именно происходит при такой операции. Рассмотрим поверхность, в которой вырезаны две дырки, а затем края этих дырок склеены с учетом одинаковой ориентации на них. Представим эту процедуру следующим образом. Сперва разрежем поверхность по двум отрезкам, соединяющим края дырок; при этом из поверхности выпадет связный кусок. Вклеим этот кусок назад поверхность, склеив сперва края дырок по нужному правилу (для этого кусок придется "вывернуть наизнанку"); в результате снова получим поверхность с двумя дырками (край каждой дырки – вновь проведенный разрез), но теперь требуется склеить диаметрально противоположные точки на краях дырок. Выше мы видели, что такая операция эквивалентна вклейке пленки Мебиуса; таким образом, вклейка в поверхность нашего цилиндра эквивалентна приклеиванию к ней двух пленок Мебиуса. На(рис. 9 вырезаемый и вновь вклеиваемый кусок закрашен; одинаковыми буквами обозначены точки, которые требуется отождествить.

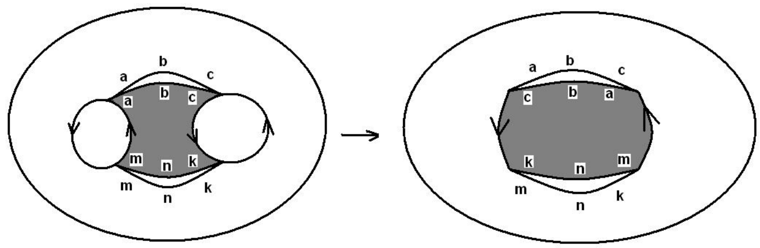

Рис. 9: Склейка двух дырок эквивалентна вклейке двух пленок Мебиуса.

Итак мы доказали, что любая поверхность получается из сферы при помощи четырех операций: вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки и и вклейка пленки Мебиуса. В результате получится сфера с некоторым количеством дырок, ручек и пленок Мебиуса. Поскольку мы рассматриваем поверхности без края, дырок быть не может; кроме того, поскольку поверхность неориентируема, хотя бы одна пленка Мебиуса присутствует. Таким образом, наша поверхность гомеоморфна сфере с $g \geq 0$ ручками и $s \geq 1$ пленками Мебиуса. Оказывается, такая поверхность гомеоморфна сфере, к которой приклеено $s + 2g$ пленок Мебиуса (ручки приклеивать не надо). Другими словами, в присутствии хотя бы одной пленки Мебиуса, любая ручка на поверхности эквивалентна двум пленкам Мебиуса. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим на поверхности ручку и пленку Мебиуса; напомним, что приклейка ручки эквивалентна вырезанию двух дырок и последующей склейке их краев с учетом противоположной ориентации, а приклейка пленки Мебиуса — вырезанию дырки и последующему отождествлению диаметрально противоположных точек ее края. Вырежем сперва все три дырки и затем разрежем поверхность по кривой, соединяющей точки на краю дырки, отвечающей пленке Мебиуса; при этом кривая должна охватывать одну из двух дырок, отвечающих ручке и (вместе с куском края дырки) ограничивать область, гомеоморфную диску. Из поверхности выпадет связный кусок; вклеим его назад так, чтобы совпали диаметрально противоположные точки на крае дырки, соответствующей пленке Мебиуса (для этого вырезанный кусок надо "вывернуть наизнанку"). В результате на поверхности образуются три дырки – две были изначально и соответствовали ручке, а третья образовалась из вновь проведенного разреза. Края этих дырок надо склеить следующим образом: две бывшие ранее дырки склеить по краю с учетом *одинаковой ориентации* (направление изменилось в результате переворачивания вырезанного куска) и на крае третьей отождествить диаметрально противоположные точки. Как мы видели выше, в результате этих операций к поверхности присоединяются три пленки Мебиуса.

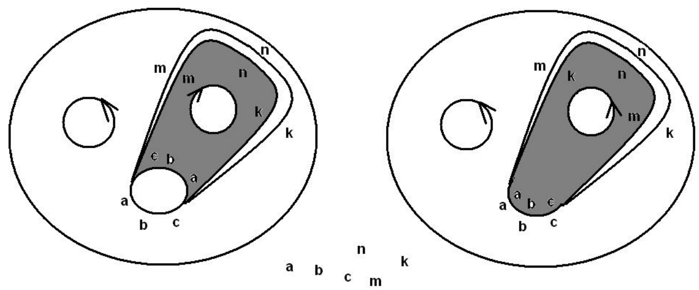

Рис. 10: Замена ручки на две пленки Мебиуса.

$\square$

Задача 0.7. *Сформулировать и доказать теорему классификации неориентируемых поверхностей с краем.*

Упражнения к лекциям 0.

Упражнение 0.1. *Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. Эйлеровой характеристикой такой карты называется число* $f + v - e$, *где* f *– число областей,* e *– число ребер, и* v *– число вершин. Доказать, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание: рассмотреть карту, получающуюся "наложением" двух карт, т.е. объединением их границ.*

Упражнение 0.2. *Эйлеровой характеристикой поверхности называется число*

$$\chi = f + v - e,$$

где f, v *и* e *– числа областей, вершин и ребер любой карты, нарисованной на поверхности (согласно утверждению из задачи 1, это число не зависит от карты и, тем самым, характеризует саму поверхность). Вычислить эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мебиуса.*

Упражнение 0.3. *Поверхность* M *получается из сферы вырезанием* k *круглых дисков (на рисунке закрашены черным).*

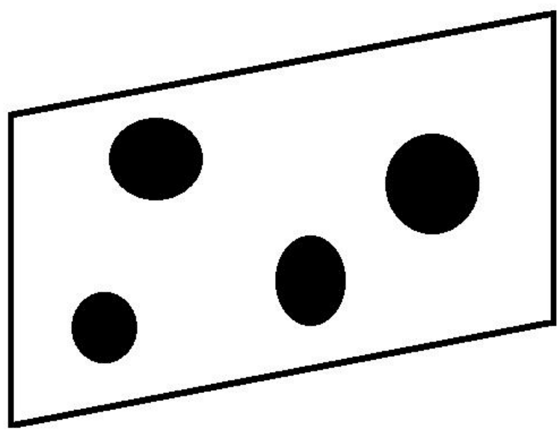

Рис. 11: Вырезание дырок.

Найти эйлерову характеристику поверхности M.

Упражнение 0.4. *Ручкой называется поверхность, полученная из тора вырезанием диска (на рисунке закрашен).*

Вычислить эйлерову характеристику поверхности ручки.

Упражнение 0.5. *Поверхность* M *получается из поверхности* N *вырезанием* k *дисков. Выразить* $\chi(M)$ *через* $\chi(N)$.

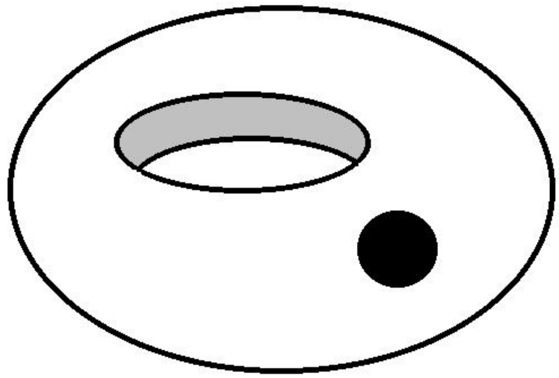

Рис. 12: Ручка.

Упражнение 0.6. *Каждая из двух поверхностей M и N имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска (на рисунках края – границы закрашенных дисков).*

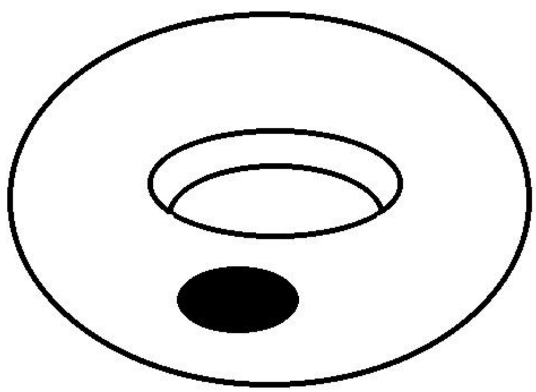

Рис. 13: .

Поверхность Q получается из поверхностей M и N склеиванием краев. Выразить $\chi(Q)$ через $\chi(M)$ и $\chi(N)$.

Упражнение 0.7. *Поверхность M получается из восьмиугольника так, чтобы совпали стрелки на сторонах, обозначенных одинаковыми буквами.*

Вычислить $\chi(M)$.

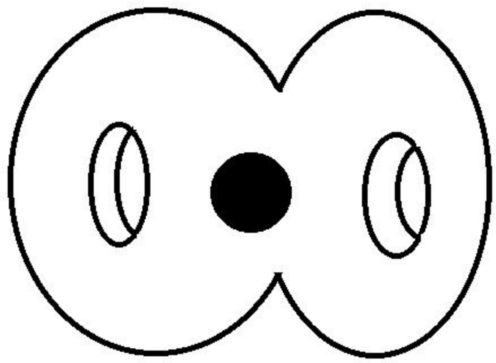

Рис. 14: .

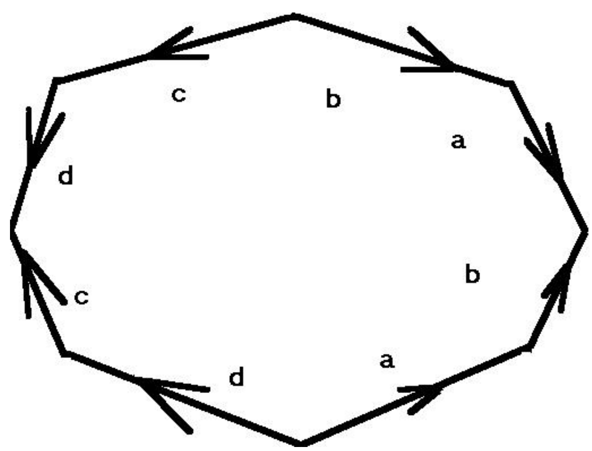

Рис. 15: Склейка из восьмиугольника.

Упражнение 0.8. *Поверхность* M_g *получается из сферы вырезанием* g *дисков и приклеиванием по образовавшимся краям* g *ручек. Вычислить* $\chi(M_g)$.

Упражнение 0.9. *В шаре высверлены два отверстия, не пересекающиеся между собой. Какой из поверхностей* M_g *гомеоморфна полученная поверхность?*

Упражнение 0.10. *В шаре высверлены два отверстия, проходящие через центр шара. Какой из поверхностей* M_g *гомеоморфна полученная поверхность?*

Упражнение 0.11. *В шаре высверлены m отверстий, не пересекающихся между собой. Какой из поверхностей M_k эквивалентна полученная поверхность?*

Упражнение 0.12. *В шаре высверлены m отверстий, проходящих через центр шара. Какой из поверхностей M_k эквивалентна полученная поверхность?*

Упражнение 0.13. *Какая поверхность получится, если в пятиугольнике склеить стороны так, как показано на рисунке (сторона c не склеивается ни с чем)?*

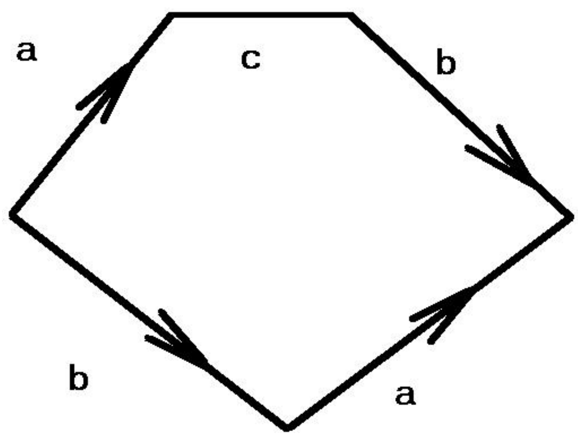

Рис. 16: Склейка пятиугольника.

Упражнение 0.14. *Сторонам многоугольника приписаны буквы $a, b, c, \ldots$ в следующем порядке: $a, b, a, b, c, d, c, d, \ldots$. Затем стороны, помеченные одноименными буквами склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Доказать, что, если число разных букв равно $2g$, то полученная поверхность эквивалентна сфере с g ручками.*

Упражнение 0.15. *На поверхности M_g проведено m замкнутых кривых, причем, если по ним разрезать поверхность, она останется связной. Доказать, что $m \leq g$.*

Упражнение 0.16. *На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, причем каждая грань – пятиугольник и в каждой вершине сходится по четыре границы. Доказать, что число стран в этой карте делится на восемь.*

Упражнение 0.17. *Нарисовать на "развертке" тора (прямоугольнике) карту так, чтобы каждая страна была гомеоморфна диску.*

Упражнение 0.18. *Вычислить эйлерову характеристику чайника со снятой крышкой (у него есть ручка и носик).*

Упражнение 0.19. *На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, причем каждая страна – n-угольник и в каждой вершине сходится по k ребер. Доказать, что*

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{\chi}{2e},$$

где χ – эйлерова характеристика поверхности, а e – число ребер карты. Привести пример такой карты на сфере при $n=2$, $k=4$.

Упражнение 0.20. *У фигуры, нарисованной ниже, каждые два одинаково обозначенных отрезка склеены с перекручиванием. Ориентируема ли полученная поверхность? Из скольких кусков состоит ее край?*

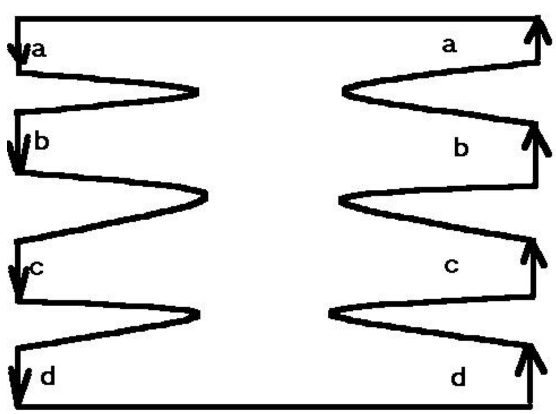

Рис. 17:

Упражнение 0.21. *Вычислить эйлерову характеристику ленты Мебиуса.*

Упражнение 0.22. *Вычислить эйлерову характеристику смирительной рубашки (рукава сшиты между собой).*

Упражнение 0.23. *На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, причем каждая страна – пятиугольник и в каждой вершине сходится четыре границы. Доказать, что число стран в этой карте делится на восемь.*

Упражнение 0.24. *В $4n$-угольнике попарно склеены с учетом направлений одинаково обозначенные стороны. Какая поверхность получилась?*

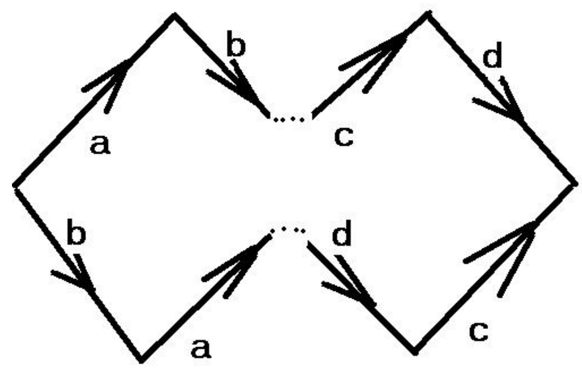

Рис. 18: Склейка из $4n$-угольника.

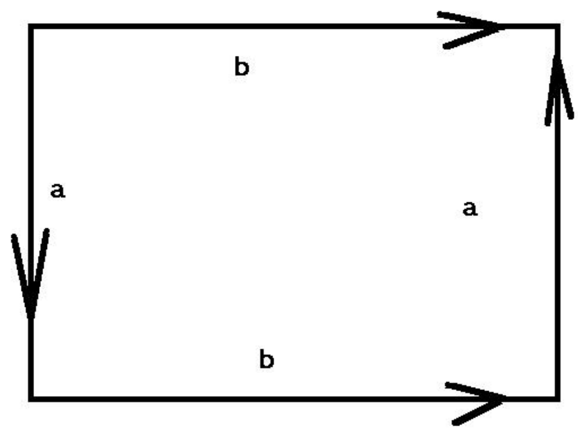

Рис. 19: Бутылка Клейна.

Упражнение 0.25. *Вычислить эйлерову характеристику бутылки Клейна:*

Упражнение 0.26. *Вычислить эйлерову характеристику проективной плоскости:*

Упражнение 0.27. *Вычислить эйлерову характеристику сахарницы.*

Упражнение 0.28. *Вычислить эйлерову характеристику поверхности, полученной разрезанием ленты Мебиуса по средней линии.*

Упражнение 0.29. *На развертке кренделя нарисовать карту, каждая*

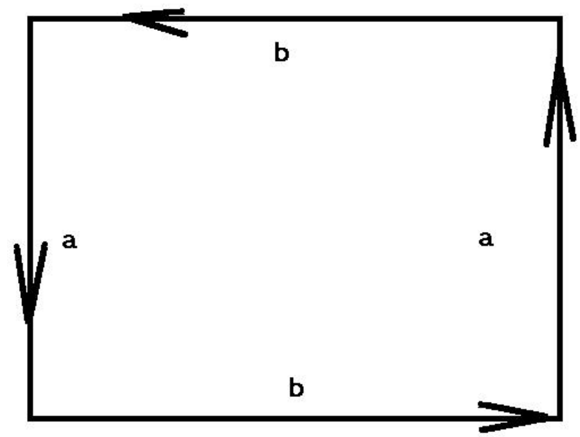

Рис. 20: Проективная плоскость.

страна в которой гомеоморфна диску. Вычислить для этой карты n, e *и* f.

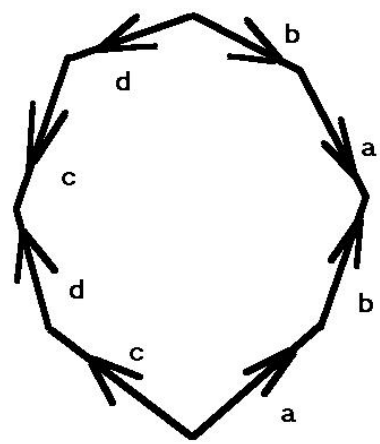

Рис. 21: Развертка кренделя.

Упражнение 0.30. *На торе нарисована карта, причем все грани –* n*-угольники и в каждой вершине сходится одинаковое число границ. Доказать, что* $n = 3, 4$ *или* 6.

Упражнение 0.31. *В каждой из поверхностей* M *и* N *вырезали по дырке; кроме того, две дырки вырезали в торе. Затем один из получившихся краев тора приклеили к краю дырки в поверхности* M*, а второй – к краю дырки в*

N. Выразить эйлерову характеристику получившейся поверхности через эйлеровы характеристики M и N.

Упражнение 0.32. *В бутылке Клейна вырезали дырку и вклеили туда ленту Мебиуса. Найти эйлерову характеристику получившейся поверхности.*

Упражнение 0.33. *Какие типы компактных ориентируемых поверхностей имеют эйлерову характеристику -3?*

Упражнение 0.34. *Нарисовать на плоскости многоугольник, при склейке которого получается тор с двумя дырками.*

Упражнение 0.35. *На бутылке Клейна нарисована карта, причем все грани – n-угольники и в каждой вершине сходится одинаковое число границ. Может ли n быть равным 7?*

Упражнение 0.36. *Четыре сферы попарно соединили цилиндрами. Вычислить эйлерову характеристику полученной поверхности.*

Упражнение 0.37. *В торе вырезали две дырки и вклеили в них ленты Мебиуса. Найти эйлерову характеристику получившейся поверхности.*

Упражнение 0.38. *Компактная поверхность имеет эйлерову характеристику 1. Верно ли, что эта поверхность – сфера с дыркой?*

Упражнение 0.39. *Нарисовать на плоскости многоугольник, при склейке которого получается крендель с дыркой.*

Упражнение 0.40. *На ленте Мебиуса нарисована карта, причем все грани – n-угольники и в каждой вершине сходится одинаковое число границ. Может ли n быть равным 8?*

Упражнение 0.41. *Три тора попарно соединили цилиндрами. Вычислить эйлерову характеристику полученной поверхности.*