Лекция 3. Двумерные поверхности

План лекции. Стандартные симплексы, криволинейные симплексы, триангулируемая поверхность в евклидовом пространстве, триангуляция поверхности, край стандартного симплекса, край криволинейного симплекса, край триангулируемой поверхности, ориентация стандартного симплекса, ориентация криволинейного симплекса, ориентация триангулируемой поверхности, склейки из квадрата, цилиндр, тор, бутылка Клейна, проективная плоскость, вырезание и заклейка дырки, вклейка ручки, вклейка пленки Мебиуса.

Ниже рассматриваются двумерные поверхности в евклидовом пространстве; наша цель — классификация таких поверхностей с точностью до "непрерывной деформации". Прежде всего, надо определить, что мы понимаем под двумерной поверхностью; существует два разных подхода к этому определению. В любом случае, сперва необходимо описать ситуацию локально, т.е. в малой окрестности произвольной точки. То обстоятельство, что поверхность двумерна, означает, что любой достаточно малый ее кусок может быть задан параметрическими уравнениями $x = r(u)$, где $u = (u_1, u_2)$ — параметры (координаты на поверхности), меняющиеся в некоторой области на плоскости. Один из подходов к определению поверхности состоит в том, что она представляется как объединение кусков, каждый из которых задается такими уравнениями, причем считается, что координаты u меняются в открытом множестве (например, круге). В пересечении двух таких кусков возникают две системы координат; требуется, чтобы одни координаты выражались через другие посредством непрерывных (или гладких) функций. Такой подход — "наложение кусков друг на друга" — лежит в основе определения топологического (или гладкого) многообразия; на нем основана, в частности, классическая дифференциальная геометрия многообразий.

Для нас удобнее будет представлять поверхность как объединение стандартных кусков, стыкующихся друг с другом по участку границы. Начнем с определения стандартного куска; сперва опишем множество, в котором меняются координаты.

Определение. *Стандартным двумерным симплексом называется (замкнутый) треугольник на плоскости.*

Замечание. Ясно, что для всякого симплекса можно так выбрать систему координат на плоскости, что симплекс будет задаваться соотношениями

$$u_1 \geq 0, \quad u_1 \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq 1.$$

Для этого достаточно поместить начало координат в одну из рассматриваемых точек (вершин симплекса) и направить базисные векторы из нее в остальные вершины.

Замечание. У каждого симплекса есть одномерные грани – стороны треугольника и нульмерные – его вершины. Стороны задаются одним из уравнений вида $u_j = 0$ или $\sum_j u_j = 1$.

Определим теперь криволинейный симплекс - образ стандартного при гладком отображении.

Определение. *Криволинейным двумерным симплексом в евклидовом пространстве* называется множество, которое можно задать параметрически

$$x = r(u_1, u_2),$$

где координаты $u = (u_1, u_2)$ пробегают стандартный симплекс, а все координаты $x_i(u)$ вектора $r(u)$ — гладкие (т.е. бесконечно дифференцируемые) функции в этом стандартном симплексе, причем векторы $\partial r/\partial u_i$ линейно независимы во всех его точках. Требуется, кроме того, чтобы заданное такой формулой отображение между точками стандартного и криволинейного симплексов было взаимно-однозначным, т.е. из равенства

$$r(u) = r(v)$$

должно следовать, что $u = v$ (последнее условие, очевидно, означает, что криволинейный симплекс не имеет точек самопересечения).

Замечание. У каждого криволинейного симплекса есть одномерные и нульмерные грани – они задаются теми же уравнениями $x = r(u)$, причем координаты u пробегают соответствующую грань стандартного симплекса.

Теперь мы можем определить наш основной геометрический объект — триангулируемую поверхность. Это — множество, правильным образом составленное из криволинейных симплексов.

Определение. *Триангулируемая двумерная поверхность в евклидовом пространстве* — это множество, представимое в виде объединения конечного числа криволинейных симплексов. При этом требуется, чтобы пересечение любых двух входящих в это множество симплексов было либо пустым множеством, либо ровно одной целой гранью (размерности 0 или 1) для обоих пересекающихся симплексов. Кроме того, по каждой одномерной грани может пересекаться не более двух симплексов.

Тринагуляцией поверхности называется ее представление в виде такого объединения криволинейных симплексов.

Замечание. Таким образом, триангулируемая поверхность состоит из конечного числа криволинейных треугольников, причем пересечение треугольников возможно либо по одной целой стороне, либо по одной вершине.

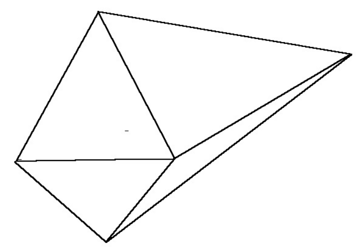

Рис. 1: Разрешенное пересечение симплексов.

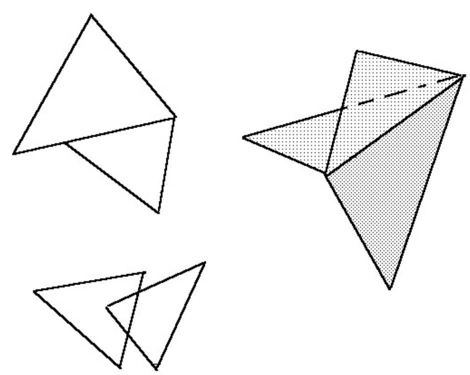

Рис. 2: Запрещенные пересечения симплексов.

0.1 Край триангулируемой поверхности

Определенные выше поверхности, вообще говоря, имеют край (например, край диска — это окружность, а край цилиндра — две окружности).

Определение. *Краем стандартного симплекса называется объединение его одномерных граней (граница треугольника); аналогично,* краем криволинейного симплекса *называется объединение образов этих граней при соответствующем отображении, т.е. множество, заданное параметрическими уравнениями $x = r(u)$, в которых координаты и пробегают край стандартного симплекса.*

Замечание. Край криволинейного симплекса - это замкнутая цепочка из трех криволинейных отрезков.

Наконец, определим край триангулируемой поверхности. Для этого рассмотрим края всех входящих в нее криволинейных симплексов. Все вместе они составляют набор конечного числа криволинейных отрезков (граней симплексов). Для каждой такой грани возможны две ситуации: либо она принадлежит двум разным симплексам (являясь их пересечением), либо только одному. В первом случае назовем криволинейный отрезок *внутренним*, а во втором — *краевым*.

Определение. *Краем триангулируемой k-поверхности* называется объединение ее краевых одномерных граней.

Задача 0.1. *Доказать, что край любой поверхности — это объединение нескольких замкнутых цепочек криволинейных отрезков.*

Определение. Каждая такая цепочка называется *компонентой края.*

0.2 Ориентация триангулируемых поверхностей

Поверхности различаются по их ориентируемости; определим сперва это понятие для симплексов.

Определение. Стандартный симплекс называется *ориентированным*, если задано направление обхода его края. Другими словами, на каждой стороне треугольника должно быть указано направление, причем в каждой вершине встречаются одно входящее и одно выходящее направления.

Замечание. Пусть вершины симплекса занумерованы; тогда ориентация задается перестановкой из трех чисел (номеров вершин), причем две перестановки задают одну и ту же ориентацию тогда и только тогда, когда их четности совпадают.

Замечание. Фактически, задание ориентации — это выбор одного из двух направлений вращения — “по часовой стрелке” или “против часовой стрелки”.

Определение. Криволинейный симплекс называется *ориентированным*, если задана ориентация соответствующего стандартного симплекса. Другими словами, на крае криволинейного симплекса должно быть задано направление обхода.

Рассмотрим теперь триангулируемую поверхность. Ее ориентация получается из ориентации входящих в нее симплексов, при условии правильного согласования ориентаций на их пересечениях.

Определение. Триангулируемая поверхность называется *ориентированной*, если на каждом входящем в нее криволинейном симплексе задана ориентация, причем если два симплекса пересекаются по одномерной грани, то два направления, индуцированные на этой грани ориентациями двух пересекающихся симплексов, должны быть **противоположными**.

Замечание. Легко понять, что условие противоположности ориентаций, индуцированных на грани двумя пересекающимися по этой грани симплексами, означает "непрерывность" ориентации при переходе через грань из одного симплекса в другой.

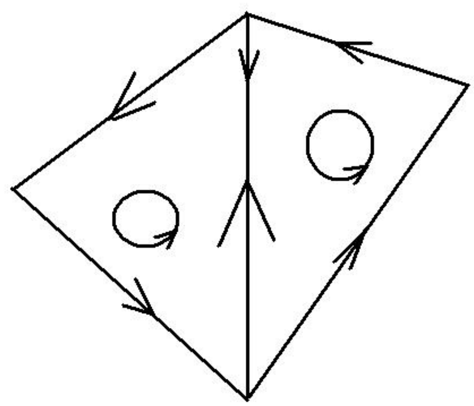

Рис. 3: Согласование ориентации симплексов.

Определение. Поверхность называется *ориентируемой*, если на ней существует ориентация.

Замечание. Рассмотрим на поверхности замкнутую цепочку симплексов, т.е. набор криволинейных треугольников $M_1, \ldots, M_N$, каждый из которых пересекается по одномерной грани с последующим и с предыдущим, причем M_1 пересекается с M_N. Зададим ориентацию на первом симплексе M_1; правило согласования однозначно определяет ориентацию на симплексе M_2, от него — на M_3 и далее по цепочке до M_N, а от него снова на M_1. Таким образом, на первом симплексе возникает две ориентации. Будем говорить, что цепочка симплексов *сохраняет ориентацию*, если эти две ориентации совпадают, и *обращает ориентацию*, если они противоположны. Ясно, что, если на поверхности существует обращающая ориентацию цепочка симплексов, то поверхность неориентируема; легко проверить (докажите!), что верно и обратное утверждение. Таким образом, ориентируемость поверхности эквивалентна отсутствию на ней обращающих ориентацию замкнутых цепочек симплексов.

Замечание. Нетрудно убедиться (докажите!), что ориентируемость двумерной поверхности *в трехмерном пространстве* эквивалентна следующему свойству. Пусть γ — произвольная замкнутая кривая на поверхности; будем говорить, что кривая сохраняет ориентацию, если в каждой точке этой кривой существует единичный вектор нормали к поверхности (т.е. вектор, перпендикулярный векторам $\partial r/\partial u_j$ — касательным векторам к координатным линиям) и непрерывно зависящий от точки (другими словами, кривая сохраняет ориентацию, если при непрерывном переносе вектора нормали вдоль этой кривой он переходит в себя, а не в противоположный вектор).

Замечание. Не любая триангулируемая поверхность может быть ориентируема. Действительно, рассмотрим квадрат и склеим две его противоположные стороны, закрутив их так, чтобы стрелки совпали. (рис. 4).

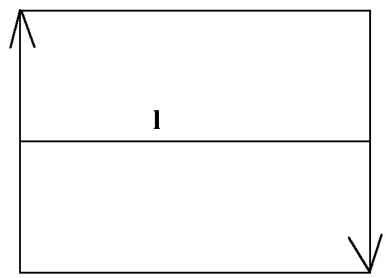

Рис. 4: Пленка Мебиуса.

Получим поверхность, называемую *пленкой Мебиуса*. Ясно, что на этой поверхности не существует ориентации; действительно, рассмотрев единичную нормаль к ней в точке средней линии l (рис. 5) и непрерывно двигая ее вдоль этой замкнутой кривой, придем в конце концов в исходную точку, причем направление нормали поменяется на противоположное.

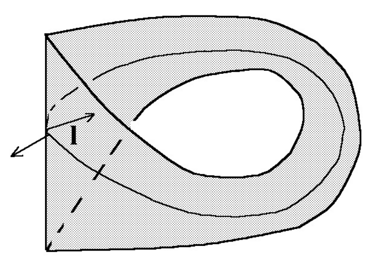

Рис. 5: При перемещении нормали к листу Мебиуса вдоль средней линии направление нормали меняется на противоположное.

Задача 0.2. *Предъявить на пленке Мебиуса цепочку симплексов, обращающую ориентацию.*

0.3 Гомеоморфизм поверхностей

Наша цель – классифицировать двумерные поверхности; для этого надо выяснить, какие из них мы будем считать одинаковыми. Нас не будут интересовать ни размеры, ни форма поверхности; таким образом, допускаются любые деформации без разрывов. Это означает, что поверхности считаются одинаковыми, если они преобразуются друг в друга непрерывными взаимно однозначными отображениями. Определение непрерывности ничем не отличается от соответствующего понятия анализа.

Определение. Пусть $f : M \to Q$ – отображение триангулируемой поверхности M в триангулируемую поверхность Q, Отображение f называется непрерывным в точке $P \in M$, если для любой окрестности V точки $f(P) \in Q$ найдется окрестность U точки P, для которой $f(U \bigcap M) \subset V$. Отображение называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке.

Определение. Отображение $f : M \to Q$ называется *гомеоморфизмом*, если f взаимно однозначно (тогда существует обратное отображение f^{-1}) и f и f^{-1} непрерывны. Поверхности M и Q называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм $f : M \to Q$.

Задача 0.3. *Доказать, что многоугольник гомеоморфен диску (замкнутому кругу).*

Задача 0.4. *Доказать, что на любой триангулируемой поверхности существует граф, разбивающий ее на куски, гомеоморфные диску.*

Задача 0.5. *Доказать, что каждая компонента края двумерной поверхности гомеоморфна окружности (тем самым, край гомеоморфен объединению нескольких окружностей).*

0.4 Склейки из квадрата

Простейшие примеры двумерных поверхностей можно получить, склеивая по различным правилам стороны квадрата. Выше мы видели, как при такой склейке получается пленка Мебиуса; остальные варианты склейки (см. рис. 6–11) приводят к поверхностям, называемым соответственно цилиндром, тором, бутылкой Клейна и проективной плоскостью. Цилиндр и тор изображены на рис. 10 и 11.

Задача 0.6. *Построить триангуляции цилиндра, тора, проективной плоскости и бутылки Клейна.*

Задача 0.7. *Доказать, что цилиндр и тор ориентируемы, а проективная плоскость и бутылка Клейна — нет.*

Ясно, что край пленки Мебиуса состоит из одной окружности, цилиндра — из двух, а у остальных поверхностей край пуст.

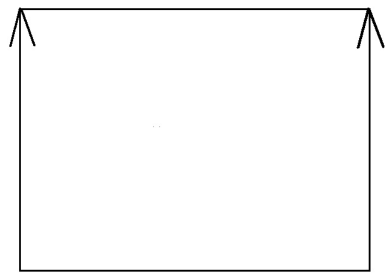

Рис. 6: Цилиндр.

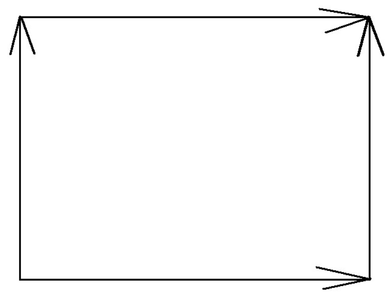

Рис. 7: Тор.

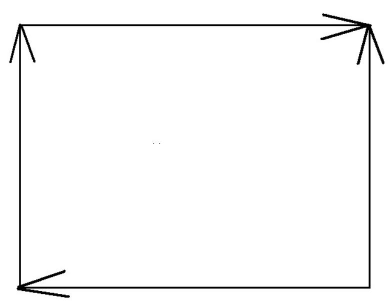

Рис. 8: Бутылка Клейна.

0.5 Основные операции

Для классификации двумерных поверхностей нам понадобится ряд операций с поверхностями, которые мы сейчас опишем.

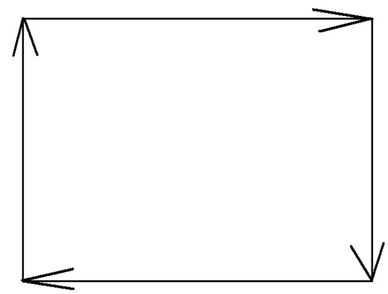

Рис. 9: Проективная плоскость.

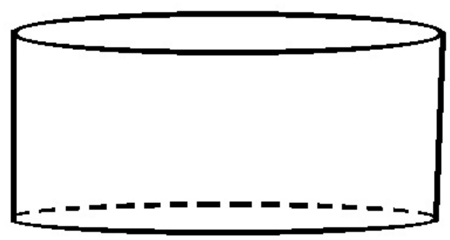

Рис. 10: Цилиндр.

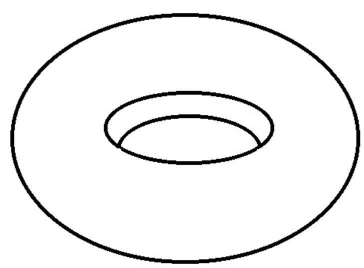

Рис. 11: Тор.

Вырезание и заклейка дырки.

Удалим из поверхности ее пересечение с шаром достаточно малого радиуса, центр которого — точка поверхности, не принадлежащая краю. Получим новую поверхность, край которой содержит на одну окружность больше, чем край исходной поверхности. Эта операция называется *вырезанием* *дырки*, а обратная к ней — *заклейкой дырки диском.*

Замечание. Вырезание дырки эквивалентно удалению из поверхности одного внутреннего симплекса (т.е. симплекса, не пересекающегося с краем); заклейка дырки – присоединение к поверхности многоугольника, стороны которого отождествляются с гранями симплексов, лежащими на некоторой выделенной компоненте края.

Вклейка ручки.

Ручкой называется поверхность, полученная из тора вырезанием дырки (рис. 12).

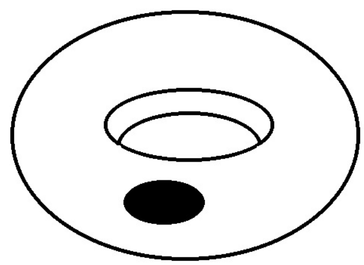

Рис. 12: Ручка.

Вырежем в поверхности дырку и отождествим новую компоненту края (край вырезанного диска) с краем ручки. Такая операция называется *вклейкой ручки.*

Вклейка пленки Мебиуса.

Вырежем в поверхности дырку и отождествим новую компоненту края с краем пленки Мебиуса (напомним, что он состоит из одной окружности). Такая операция называется *вклейкой пленки Мебиуса.*

Задача 0.8. *Описать операции вклейки ручки и пленки Мебиуса в терминах триангуляции поверхности (т.е. представить их как удаление или присоединение некоторого набора симплексов).*