Лекция 2. Инварианты плоских кривых

План лекции. Гладкие кривые на плоскости, число вращения, классификация кривых с точностью до гладкой гомотопии, точки самопересечения, число Уитни, теорема Уитни.

0.1 Замкнутые кривые на плоскости.

Естественный способ построить граф – нарисовать кривую на плоскости, не отрывая карандаша от бумаги. Если при этом конечный и начальный участки плавно переходят друг в друга, на плоскости возникнет гладкая кривая, которая может, вообще говоря, пересекать сама себя. Оказывается, для таких кривых можно определить число, однозначно (в естественном смысле) задающее кривую; более того, это число тесно связано с числом точек самопересечения.

Замкнутые кривые на плоскости задаются параметрическими уравнениями, содержащими гладкие периодические функции; напомним сперва первоначальные сведения о таких функциях.

0.1.1 Свойства периодических функций

Пусть $f(t)$ – гладкая (т.е. бесконечно дифференцируемая) функция, определенная при всех $t \in \mathbb{R}$; $T \neq 0$ – действительное число.

Определение. Функция $f(t)$ называется T-периодической, если $f(t+T) = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Число T называется периодом функции f.

Замечание. Ясно, что, если T – период функции f, то для любого целого $k \neq 0$ число kT – тоже период. Ясно, кроме того, что постоянная функция T-периодическая с любым периодом T.

Задача 0.1. *Доказать, что для любой гладкой (даже для любой непрерывной) непостоянной периодической функции существует минимальный положительный период.*

Как правило, под периодом периодической функции понимается именно наименьший положительный период.

Задача 0.2. *Доказать, что, если $f(t)$ – T-периодическая функция, а $g(x)$ – гладкая функция на $\mathbb{R}$, то композиция $g(f(t))$ – T-периодическая.*

Задача 0.3. *Доказать, что производная от T-периодической функции – T-периодическая функция.*

Для первообразных аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно: первообразная от периодической функции $\cos^2 t$ – это функция $\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+c$, которая, очевидно, не периодическая. Причина этого явления состоит в том, что периодические функции, вообще говоря, обладают ненулевым средним значением, которое при интегрировании приводит к наличию линейных слагаемых.

Определение. Средним значением периодической функции называется функция

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(\xi)d\xi.$$

В действительности, среднее значение – не функция, а число.

Утверждение 0.4. *Среднее значение не зависит от t; в частности,*

$$\int_t^{t+T} f(\xi)d\xi = \int_0^T f(\xi)d\xi.$$

Доказательство.

$$\int_t^{t+T} f(\xi)d\xi = \int_t^T f(\xi)d\xi + \int_T^{t+T} f(\xi)d\xi =$$

$$= \int_t^T f(\xi)d\xi + \int_T^{t+T} f(\xi-T)d\xi = \int_t^T f(\xi)d\xi + \int_0^t f(\eta)d\eta = \int_0^T f(t)dt$$

(во втором равенстве использована периодичность f, в третьем замена переменной $\eta = \xi - T$). □

Утверждение 0.5. *Пусть f – периодическая функция; ее первообразная имеет вид*

$$F(t) = t\bar{f} + F_0(t),$$

где F_0 – периодическая; в частности, первообразная периодической функции периодическая тогда и только тогда, когда $\bar{f} = 0$.

Доказательство. Пусть F– первообразная для f; тогда

$$F(t) = c + \int_0^T f(\xi)d\xi$$

Обозначим

$$F_0(t) = c + \int_0^t f(\xi)d\xi - \frac{t}{T}\int_0^T f(\xi)d\xi;$$

тогда

$$F_0(t+T)-F_0(t) = \int_0^{t+T} f(\xi)d\xi - \int_0^t f(\xi)d\xi - \frac{t+T}{T}\int_0^T f(\xi)d\xi + \frac{t}{T}\int_0^T f(\xi)d\xi =$$

$$= \int_t^{t+T} f(\xi)d\xi - \int_0^T f(\xi)d\xi = 0$$

$\square$

в силу предыдущего утверждения.

Теперь мы можем определить замкнутые плоские кривые.

Определение. Гладкая замкнутая кривая на плоскости это множество точек $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, задаваемое параметрическими уравнениями $x = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ – гладкая периодическая двумерная вектор-функция, т.е. $r(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $u_i(t)$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и $u_i(t+T) = u_i(t)$). Требуется, кроме того, чтобы вектор скорости $\dot{r}(t)$ не обращался в нуль.

Замечание. На кривой γ, вообще, говоря, могут быть допускаются точки самопересечения, т.е. равенство $r(t_1) = r(t_2)$ возможно для $t_1 \neq t_2, t_i \in [0, T)$.

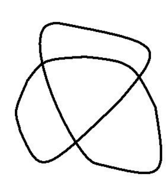

Рис. 1: Замкнутая кривая

0.2 Число вращения. Классификация замкнутых кривых.

Нас будет интересовать, когда две замкнутые кривые получаются друг из друга непрерывной деформацией; такие кривые называются регулярно гомотопными.

Определение. Две кривые γ_0, γ_1 регулярно гомотопны, если существует гладкое семейство кривых $\gamma(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, соединяющее эти кривые, т.е. такое, что $\gamma(0) = \gamma_0$, $\gamma(1) = \gamma_1$. Такое семейство называется регулярной гомотопией.

Замечание. Поясним, что понимается под гладким семейством кривых; считается, что кривая задана для каждого $\tau \in [0,1]$, т.е. определена функция $r(t,\tau)$ двух переменных, бесконечно дифференцируемая для всех $t \in \mathbb{R}, \tau \in [0,1]$; вектор скорости $\dot r = \frac{\partial r}{\partial t}$ не должен обращаться в нуль.

Задача 0.6. *Построить регулярную гомотопию окружности и эллипса; эллипса и овала* $\frac{x_1^4}{a_1^4} + \frac{x_2^4}{a_2^4} = 1$.

Наша ближайшая цель – выяснить, когда две данные кривые гомотопны; первое, что приходит в голову – сравнивать кривые по числу точек самопересечения. Оказывается однако, что эта характеристика не инвариантна относительно гомотопии – на рис. 2 показана гомотопия, переводящая кривую с двумя точками самопересечения, в несамопересекающуюся кривую.

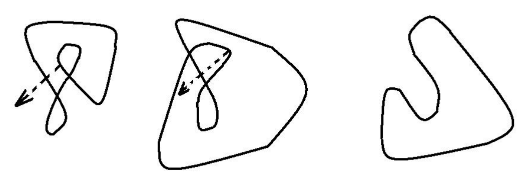

Рис. 2: Регулярная гомотопия, убивающая самопересечения

С другой стороны, на обеих кривых, изображенных на рис.3, имеется по 2 точки самопересечения, однако эти кривые не гомотопны (это следует из доказываемой ниже теоремы).

Правильный инвариант кривой получается, если рассмотреть вращение вектора скорости $v(t) = \dot r(t)$; этот ненулевой вектор при изменении t от 0 до T совершает некоторое число оборотов вокруг начала координат. Будем считать каждый оборот против часовой стрелки со знаком "плюс", а каждый оборот по часовой стрелке – со знаком "минус".

Определение. Число вращения гладкой замкнутой кривой γ – это число оборотов ее вектора скорости.

Замечание. Число вращения зависит от направления обхода кривой (который, конечно, фиксирован, если задана параметризация $r(t)$); при изменении направления число оборотов меняет знак.

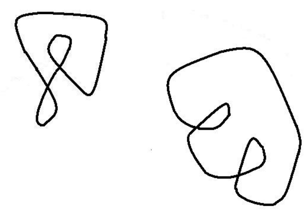

Рис. 3: Негомотопные кривые с двумя точками самопересечения

Число вращения всех трех кривых на рис. 2 равно 1; для левой кривой на рис. 3 это число также равно 1, а для правой оно равно 3. Оказывается, гомотопные кривые – это в точности кривые с одинаковым числом вращения.

Теорема 0.7. *(Уитни – Граустейна) Две кривые регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения совпадают.*

Доказательство. Пусть кривые γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны и пусть $\gamma(\tau)$ – соответствующая гомотопия. Обозначим через $n(\tau)$ число вращения кривой $\gamma(\tau)$; ясно, что $n(\tau)$ – непрерывная функция, принимающая целые значения, поэтому n – константа и $n(0) = n(1)$.

Пусть γ_0 и γ_1 – кривые с одинаковым числом вращения n. Можно считать, что векторы скорости $v_k(t) = \dot{r}_k(t)$, $k = 0, 1$ единичные – этого всегда можно добиться заменой параметра. Действительно, при замене $t = t(s)$ вектор скорости меняется по закону

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt},$$

поэтому, если определить новую параметризацию так, чтобы $ds/dt = |dr/dt|$ (т.е. $s(t) = \int_0^t |\dot{r}(\xi)| d\xi$), то соответствующий вектор скорости будет единичным. Такая параметризация называется *натуральной*; параметр s – длина дуги кривой, отсчитываемой от начальной точки $s = 0$, так что период – полная длина кривой. Кроме того, ясно, что при помощи регулярной гомотопии можно добиться того, чтобы длины кривых γ_0, γ_1 были одинаковы (докажите!); таким образом, далее мы считаем, что параметр t на каждой кривой натуральный и период T одинаков для γ_0 и γ_1. Запишем единичные векторы скорости в виде $v_k(t) = (\cos\varphi_k(t), \sin\varphi_k(t))$, $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k(T) = 2\pi n$ и рассмотрим функцию $\varphi(\tau, t) = \tau\varphi_1(t) + (1-\tau)\varphi_0(t)$. Построим кривую с вектором скорости $v(\tau,t) = (\cos\varphi(\tau,t), \sin\varphi(\tau,t))$:

$$x = \tilde{r}(\tau,t) = \int_0^t v(\tau,\xi)dt\xi.$$

Отметим, что функция $v(\tau,t)$ периодическая при каждом фиксированном τ, поскольку $\varphi_0(t+T) = \varphi_0(t) + 2\pi n$, $\varphi_1(t+T) = \varphi_1(t) + 2\pi n$; однако первообразная от нее периодической быть не обязана. Другими словами, построенная кривая, вообще говоря, не замкнута:

$$\tilde{r}(t+T) - \tilde{r}(t) = \int_0^T v(\tau,t)dt.$$

Однако из нее легко сделать замкнутую, добавив к радиус-вектору линейную функцию от t; действительно, рассмотрим кривую

$$\gamma(\tau) : x = r(\tau,t) = \int_0^t v(\tau,\xi)d\xi - \frac{t}{T}\int_0^T v(\tau,\xi)d\xi.$$

Эта кривая замкнута, т.к. функция $r(\tau,t)$ бесконечно дифференцируема и периодическая:

$$r(t+T) = \int_0^{t+T} v(\tau,\xi)d\xi - \frac{t+T}{T}\int_0^T v(\tau,\xi)d\xi =$$

$$= \int_0^t v(\tau,\xi)d\xi + \frac{t}{T}\int_0^T v(\tau,\xi)d\xi + \int_t^{t+T} v(\tau,\xi)d\xi - \int_0^T v(\tau,\xi)d\xi = r(t).$$

Проверим, что вектор скорости кривой $\gamma(\tau)$ не обращается в нуль; этот вектор имеет вид

$$\dot{r} = v(\tau,t) - \frac{1}{T}\int_0^T v(\tau,t)dt$$

Убедимся, что длина вектора $\bar{v}$ строго меньше единицы; действительно, пусть e – единичный вектор в направлении $\bar{v}$, тогда

$$|\frac{1}{T}\int_0^T v(\tau,t)dt| = (\frac{1}{T}\int_0^T v(\tau,t)dt, e) = |\frac{1}{T}\int_0^T (v,e)dt| \leq \frac{1}{T}\int_0^T |(v,e)|dt.$$

Поскольку $v(t)$ – непостоянный вектор, непрерывная функция $|(v(t),e)|$ не постоянна и $|(v(t),e)| \leq |v||e| = 1$. Отсюда

$$|\frac{1}{T}\int_0^T v(\tau,t)dt| < \frac{1}{T}\int_0^T dt = 1.$$

Таким образом, единичный вектор $v(t)$ ни в одной точке t не равен вектору меньшей длины $\bar{v}$, т.е. вектор скорости кривой $\gamma(\tau)$ не обращается в нуль. Итак, семейство кривых $\gamma(\tau)$ определяет нужную гомотопию. $\square$

0.3 Число вращения и точки самопересечения.

Как уже отмечалось, число точек самопересечения не инвариантно относительно гомотопий; связь между числом вращения кривой и наличием на ней самопересечений все же имеется. Выясним сперва, как обстоит дело в случае отсутствия на кривой точек самопересечения. Оказывается, в этом случае число вращения по модулю равно единице.

Теорема 0.8. *(Хопфа) Число вращения несамопересекающейся кривой равно* ± 1.

Доказательство. Можно считать, что вектор скорости кривой единичный (этого всегда можно добиться выбором параметризации – см. доказательство теоремы Уитни – Грауштейна). Пусть параметр t на кривой меняется на отрезке $[0, T]$; рассмотрим на плоскости (t, s) треугольник $D : 0 \leq t \leq s \leq T$ и каждой точке (t, s) этого треугольника сопоставим единичный вектор $e(t, s)$ по следующему правилу. Если точка (t, s) не лежит на гипотенузе $t = s$ и не совпадает с вершиной $t = 0, s = T$, то

$$e(t, s) = \frac{r(s) - r(t)}{|r(s) - r(t)|},$$

где $x = r(t)$ – параметрические уравнения рассматриваемой кривой γ. Отметим, что функция $e(t, s)$ гладкая, т.к. кривая несамопересекающаяся, а значит, $r(t) \neq r(s)$ при $t \neq s$. На сторону $s = t$ и в вершину $(0, T)$ вектор $e(s, t)$ продолжим по непрерывности; поскольку при $s \to t$

$$\frac{r(s) - r(t)}{|r(s) - r(t)|} = \frac{r(s) - r(t)}{|r(s) - r(t)|} \frac{|s - t|}{s - t} = \frac{r(s) - r(t)}{s - t} : |\frac{r(s) - r(t)}{r(s) - r(t)}| \to \frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|} = r(t),$$

на стороне $s = t$ получим $e(t, s) = \dot{r}(t)$. Аналогично, в вершине $(0, T)$ получим $e(0, T) = -\dot{r}(T) = -\dot{r}(0)$. Запишем вектор $e(t, s)$ в виде $e(t, s) = (\cos\varphi(t, s), \sin\varphi(t, s))$, где функция $\varphi(t, s)$ непрерывна в треугольнике D. Число вращения n кривой γ – это число оборотов вектора $e(t, t) = \dot{r}(t)$ при изменении t вдоль гипотенузы треугольника, т.е.

$$n = \frac{1}{2\pi}(\varphi(T, T) - \varphi(0, 0)).$$

С другой стороны, то же число можно получить, проходя по двум катетам:

$$2\pi n = (\varphi(T, T) - \varphi(0, T)) + (\varphi(0, T) - \varphi(0, 0)).$$

Вычислим соответствующие изменения угла φ: разность $\varphi(T, T) - \varphi(0, T)$ – это угол поворота вектора $r(T) - r(t) = r(0) - r(t)$ при изменении t от 0 до T (т.е. вдоль кривой). Рассмотрим прямую l, касающуюся кривой γ и такую, что γ целиком лежит в одной полуплоскости, ограниченной этой прямой (докажите, что такая прямая существует!). Будем считать, что значение параметра $t = 0$ соответствует точке касания прямой l с кривой γ (см.

рис. 4); тогда $\varphi(T,T) - \varphi(0,T) = \pm\pi$, причем знак совпадает со знаком числа вращения. Аналогично, разность $\varphi(0,T) - \varphi(0,0)$ – это угол поворота вектора $r(s) - r(0)$ при изменении s от 0 до T; этот угол тоже равен $\pm\pi$, причем, поскольку противоположные векторы вращаются в одну сторону, знак снова совпадает со знаком числа вращения. Тем самым доказано, что число вращения равно ± 1. $\square$

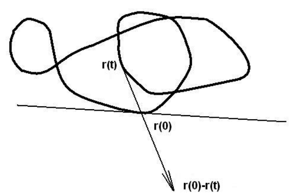

Рис. 4: Вращение вектора $r(0) - r(t)$

0.4 Число Уитни. Теорема Уитни.

Оказывается, если точки самопересечения считать с правильными знаками, получится число, близкое к числу вращения. Именно: пусть γ – замкнутая кривая; будем считать, что на этой кривой конечное число точек самопересечения, причем все они двойные (т.е. степени всех вершин соответствующего графа равны четырем) и в каждой точке векторы скорости к пересекающимся дугам образуют ненулевой и не равный π угол. Будем двигаться вдоль кривой, стартуя с точки x_0, и каждый раз, встречая точку самопересечения, отметим в этой точке направление вектора скорости. После обхода кривой в каждой точке самопересечения возникнет репер e_1, e_2: вектор e_1 соответствует первому посещению точки, а e_2 – второму. Если этот вращение от вектора e_1 к вектору e_2 происходит по часовой стрелке, припишем точке самопересечения число $\epsilon = +1$, если против часовой стрелки – число $\epsilon = -1$.

Определение. Числом Уитни $W(x_0)$ кривой γ называется сумма по всем точкам самопересечения чисел ϵ_j:

$$W = \sum_j \epsilon_j.$$

Замечание. Число Уитни, как и число вращения, зависит от направления обхода кривой и при изменении направления меняет знак. Кроме того, число Уитни зависит от начальной точки x_0.

Теорема 0.9. *(Уитни) Пусть n – число вращения, а W – число Уитни кривой γ. Тогда $n = W \pm 1$.*

Доказательство. Будем двигаться вдоль кривой, стартуя с точки x_0 до тех пор, пока дважды не встретим точку самопересечения x_j. Изменим кривую так, как показано на рис. 5; получим кривую γ_1 и несамопересекающуюся кривую γ_2. Ясно, что число вращения $n(\gamma)$ исходной кривой равно сумме $n(\gamma_1) + n(\gamma_2)$ (при помощи гомотопии можно добиться, чтобы векторы скорости в точке x_j были почти параллельны). Далее, число Уитни $W(x_0, \gamma) = W(x_j, \gamma_1) + \epsilon_j + m$, где ϵ_j – число ± 1, сопоставляемое точке самопересечения x_j, m – суммарный вклад от точек пересечения γ_2 с γ_1. Последнее число равно нулю; действительно, кривая γ_2 делит плоскость на две области и каждой точке пересечения, соответствующей входу γ_1 во внутреннюю область, отвечает точка, соответствующая выходу, причем суммарный вклад в число Уитни от каждой пары равен нулю. Таким образом, $n(\gamma) - W(x_0, \gamma) = n(\gamma_1) - W(x_j, \gamma_1) + n(\gamma_2) - \epsilon_j$. Оба числа γ_2 и ϵ_j равны ± 1 (γ_2 – по теореме Хопфа); из рис. 5 видно, что они совпадают, следовательно $n(\gamma) - W(x_0, \gamma) = n(\gamma_1) - W(x_j, \gamma_1)$. Убивая таким образом точки самопересечения, получим в результате несамопересекающуюся кривую, для которой эта разность равна ± 1. □

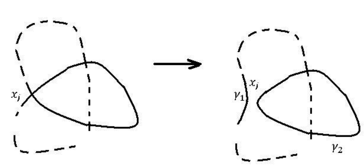

Рис. 5: Перестройка кривой