

Лекция 1

Элементы теории графов

План лекции. Графы, эйлерова характеристика и цикломатическое число, планарные графы, теорема Эйлера, теорема о пяти красках.

1.1 Определение графа. Маршруты и циклы.

Все внутренние геометрические свойства дуги кривой (без самопересечений) связаны с ее длиной: любые две дуги одинаковой длины можно, потянув за края, вытянуть в одинаковые прямолинейные отрезки. Графы представляют собой простейшие объекты, обладающие нетривиальными геометрическими свойствами; они составлены из нескольких дуг кривых, состыкованных в крайних точках. С другой стороны, графы используются в качестве моделей в самых различных математических и нематематических приложениях (в частности, в физике, химии, биологии, электронике, экономике).

Определение. Графом называется набор точек в трехмерном пространстве, некоторые пары из которых соединены непересекающимися дугами кривых. Точки указанного набора называются вершинами графа, а соединяющие их дуги – ребрами. Допускается соединение вершины с собой (петли), а также несколько дуг, соединяющих две данные точки (кратные ребра). В дальнейшем всюду рассматриваются графы с конечным числом вершин и ребер.

Замечание. Уточним, что понимается под дугой; мы будем рассматривать в качестве дуги гладкую регулярную кривую, т.е. множество точек $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, задаваемое параметрическими уравнениями $x = r(t)$, $t \in [a, b]$. Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $r(t)$ – бесконечно дифференцируемая векторная функция, причем вектор скорости $\dot{r}(t)$ не обращается в нуль. Кроме того, мы рассматриваем дуги без самопересечений, т.е. требуем, чтобы равенство $r(t_1) = r(t_2)$ выполнялось только при $t_1 = t_2$. Дуга соединяет точки v и w , если $r(a) = v$, $r(b) = w$.

Замечание. Часто в литературе графом называют абстрактное конечное множество (множество вершин) с выделенным подмножеством в множестве неупорядоченных пар (подмножество ребер). Граф, понимаемый в таком смысле, – частный случай определенного выше объекта (который, в свою очередь, называется мультиграфом): запрещены петли и кратные ребра. С другой стороны, наше определение графа как подмножества в \mathbb{R}^3 не приводит к уменьшению общности: нетрудно показать, что любой абстрактный граф можно поместить в трехмерное пространство.

Ясно, что пересечение графа с шаром достаточно малого радиуса с центром в произвольной вершине представляет собой точку, из которой выходит несколько отрезков дуг.

Определение. Число таких отрезков называется степенью вершины (отметим, что, если из вершины выходит одна петля и больше ничего, степень равна двум).

Задача 1.1. Обозначим через $v(k)$ число вершин степени k . Выразить число ребер через числа $v(k)$.

Задача 1.2. Доказать, что число вершин нечетной степени четно.

Определение. Маршрутом в графе называется конечная последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_n, v_{n+1}$, где v_k – вершины, e_k – ребра, причем ребро e_k соединяет вершины v_k и v_{k+1} . Граф называется связным, если любые две вершины можно соединить маршрутом. Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, а каждая из остальных встречается ровно один раз, называется циклом. Связный граф без циклов называется деревом.

Следующая задача иллюстрирует простейшее приложение теории графов. Рассмотрим систему маршрутов на связном графе, обладающую следующими двумя свойствами.

1. Каждое ребро маршрута встречается в нем ровно один раз.
2. Каждое ребро графа принадлежит ровно одному маршруту.

Можно представлять себе граф как железнодорожную сеть, которую надо заполнить маршрутами поездов “наиболее экономным” способом – обслуживая каждый участок ровно одним маршрутом.

Ясно, что такая система маршрутов всегда существует: достаточно рассмотреть в качестве маршрутов “однорезервные” (т.е. вида $v_1 e v_2$).

Задача 1.3. Найти минимальное число маршрутов в системе с указанными свойствами.

Из решения этой задачи, в частности, должны следовать условия, при которых граф может быть заполнен одним маршрутом, проходящим каждое ребро ровно один раз. Такие графы называются *уникурсальными*. С понятием уникурсальности связана знаменитая задача Л.Эйлера о кенигсбергских мостах.

Задача 1.4. Между берегами и островами на реке Прегель в Кенигсберге перекинута 7 мостов так, как показано на рисунке 1.1. Можно ли, гуляя по окрестностям, пройти по каждому мосту ровно один раз?

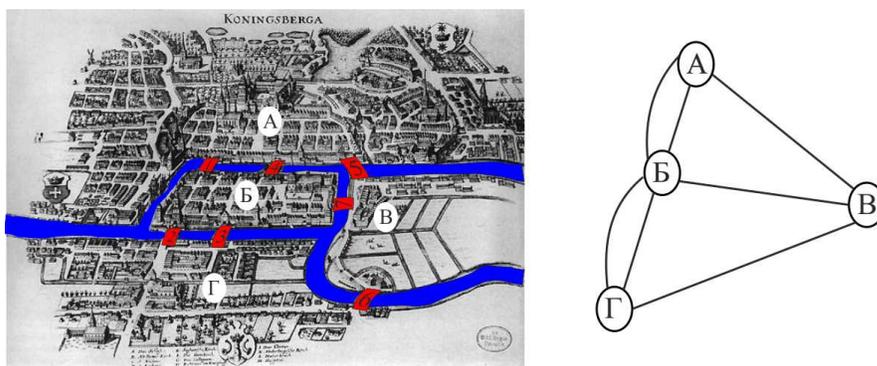


Рис. 1.1: Старинная карта Кёнигсберга. Буквами обозначены части города: А — Альтштадт, Б — Кнайпхоф, В — Ломзе, Г — Форштадт. Цифрами обозначены мосты (в порядке строительства): 1 — Лавочный, 2 — Зелёный, 3 — Рабочий, 4 — Кузнечный, 5 — Деревянный, 6 — Высокий, 7 — Медовый.

1.2 Максимальное дерево и цикломатическое число.

Одна из центральных характеристик графа связана с числом циклов в нем: в частности, циклы играют важнейшую роль в электрических цепях — именно по ним может течь ток. При этом оказывается важным выделять количество “элементарных” циклов, из которых можно составить все остальные (подобно тому, как в алгебре выделяют образующие группы или базис линейного пространства). С этой целью рассмотрим следующую конструкцию. Пусть Γ — связный граф; выделим в нем произвольный цикл и удалим из этого цикла произвольное ребро. Получим снова связный граф (докажите!); повторяя эту процедуру, придем в конце концов к связному графу без циклов (дереву).

Определение. Полученное дерево называется максимальным деревом исходного графа; удаленные ребра называются перемычками, а их число — цикломатическим числом графа или первым числом Бетти.

На рис. 2 сплошными линиями выделено максимальное дерево, а пунктиром — перемычки.

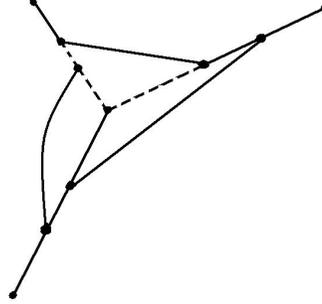


Рис. 1.2: Перемычки и максимальное дерево

Замечание. Очевидно, максимальное дерево связного графа Γ можно определить как дерево, множество вершин которого такое же, что у Γ , а множество ребер – подмножество множества ребер Γ .

Ясно, что максимальное дерево и перемычки, вообще говоря, определены не однозначно; оказывается, тем не менее, что цикломатическое число зависит только от самого графа. Чтобы это доказать, мы выразим это число через числа вершин и ребер. Сперва докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 1.5. *В любом дереве имеется вершина степени 1.*

Доказательство. Рассмотрим связный граф, в котором нет вершин степени 1. Будем строить маршрут, стартуя с произвольной вершины v_1 . В качестве первого ребра e_1 выбираем любое, выходящее из v_1 ; из его конечной точки v_2 выходит хотя бы одно ребро, отличное от e_1 (т.к. степень вершины v_1 больше единицы). Выбираем ребро e_2 в качестве следующего ребра маршрута и так далее; на каждом шаге выбираем ребро, выходящее из последней вершины, которую мы посетили, и не совпадающее с предыдущим ребром маршрута. Поскольку вершин в графе конечное число, на некотором шаге маршрут замкнется, т.е. попадет в уже встречавшуюся вершину; его участок между повторяющимися вершинами образует цикл. \square

Докажем теперь инвариантность цикломатического числа.

Теорема 1.6. *Число вершин v , число ребер e и первое число Бетти b_1 связного графа удовлетворяют соотношению*

$$v - e = 1 - b_1.$$

Доказательство. При удалении перемычки числа e и b_1 уменьшаются на единицу, а v не меняется. Поэтому утверждение теоремы достаточно доказать для дерева ($b_1 = 0$). Применим индукцию по числу ребер; для дерева из

одного ребра утверждение очевидно. Пусть оно доказано для всех деревьев с числом ребер $e \leq m$; рассмотрим дерево, для которого $e = m + 1$. В этом дереве есть вершина степени 1; удалим эту вершину вместе с входящим в нее ребром. Разность $v - e$ при этом не изменится, а в результате получится дерево с меньшим числом ребер, для которого соотношение $v - e = 1$ уже известно. \square

Пусть граф Γ не связный; тогда он состоит из конечного числа связных графов, не соединенных между собой. Эти части графа Γ называются его *связными компонентами*; их число b_0 называется *нулевым числом Бетти*. Первое число Бетти b_1 определяется как сумма соответствующих чисел для связных компонент (общее число перемычек, которые надо удалить, чтобы получить граф без циклов).

Задача 1.7. Доказать равенство

$$v - e = b_0 - b_1.$$

Замечание. Левая (а значит, и правая) часть последнего равенства называется *эйлеровой характеристикой* графа.

Простейшее приложение цикломатического числа связано с задачей о токах. Будем представлять себе граф как электрическую цепь; ток в этой цепи задается направлением и силой тока на каждом ребре. Закон Кирхгофа утверждает, что суммарный ток, втекающий в каждую вершину, равен суммарному току, вытекающему из нее.

Определение. На графе Γ задана система токов, если на каждом ребре e_k указано направление (например, при помощи задания параметризации $x = r(t)$ соответствующей дуги – направление движения определяется возрастанием параметра t) и неотрицательное число x_k – сила тока. При этом требуется, чтобы в каждой вершине v выполнялось равенство

$$\sum_{k \in V_{in}} x_k = \sum_{k \in V_{out}} x_k,$$

где V_{in} и V_{out} обозначают множества ребер, входящих в вершину v и выходящих из нее относительно выбранных направлений.

Задача 1.8. 1. Доказать, что по деревьям ток не течет, т.е. что, если граф не содержит циклов, то единственная система токов на нем – нулевая.

2. Доказать, что для графа с циклами система токов однозначно восстанавливается по токам на перемычках, которые можно задавать произвольно. Таким образом, для задания системы токов требуется фиксировать b_1 чисел.

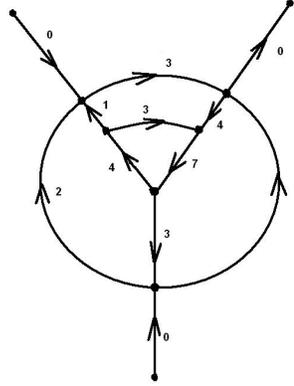


Рис. 1.3: Система токов на графе

Замечание. В предыдущей задаче топология графа определяет размерность пространства решений системы v линейных уравнений относительно e неизвестных – равенств Кирхгофа, написанных во всех вершинах. Матрица этой системы состоит из чисел $0, \pm 1$; утверждение, которое требуется доказать, означает, в частности, что ее ранг равен $e - b_1$, т.е. что число независимых уравнений – $v - b_0$ (для каждой связной компоненты имеется ровно одно лишнее уравнение).

1.3 Планарные графы. Теорема Эйлера

Как уже отмечалось, любой абстрактный граф можно поместить в трехмерное пространство. До сих пор мы обсуждали свойства и характеристики графа, которые никак не зависят от того, где он расположен. Теперь мы обсудим специфику графов, лежащих в плоскости. Оказывается, для них имеется дополнительное соотношение, связывающее эйлерову характеристику с числом областей, на которые граф делит плоскость.

Определение. Граф называется плоским, если все его вершины и ребра лежат в плоскости (ребра, как и для графов в трехмерном пространстве, не пересекаются).

Теорема 1.9. (формула Эйлера) Пусть v – число вершин плоского графа, e – число ребер, f – число связных областей, на которые граф делит плоскость. Эти числа связаны равенством

$$v - e + f = 2.$$

Доказательство. Докажем сперва нужное равенство для дерева; применим индукцию по числу ребер. Для простейшего дерева с одним ребром утверждение очевидно; пусть оно выполнено для деревьев с $e \leq t$. Рассмотрим

дерево, для которого число ребер $e = t + 1$; выберем в нем вершину степени 1 и удалим ее вместе с входящим в нее ребром. Число областей f при такой операции не изменится, а e и v уменьшатся на единицу. В результате получим дерево, для которого $e = t$, а значит, формула Эйлера верна.

Если граф содержит циклы, рассмотрим область, ограниченную циклом и не содержащуюся в другой области, ограниченной циклом. Удалим из цикла, ограничивающего такую область, одно ребро; число областей при этом уменьшится на единицу, число ребер тоже, а число вершин не изменится. Повторяя эту операцию, получим в итоге дерево, для которого теорема уже доказана. \square

Замечание. При доказательстве формулы Эйлера мы использовали фундаментальное свойство плоскости: замкнутая кусочно регулярная кривая (в нашем случае цикл в графе) делит плоскость на две части. Этот факт называется *теоремой Жордана*; мы не приводим здесь его доказательства.

Формула Эйлера приводит к ряду замечательных следствий. Первое из них – невозможность разместить в плоскости некоторые графы. Для того, чтобы сформулировать соответствующее утверждение, определим сперва, что означают слова “поместить заданный граф в плоскость”. Конечно, это значит, что заданный граф эквивалентен другому, лежащему в плоскости; эквивалентность определяется следующим образом.

Определение. Графы Γ и Γ' называются изоморфными, если существуют взаимно однозначные соответствия f и F между множествами вершин и ребер этих графов, причем ребро e соединяет вершины v и w графа Γ тогда и только тогда, когда ребро $F(e)$ соединяет вершины $f(v)$ и $f(w)$.

Определение. Граф называется планарным, если он изоморфен плоскому.

Простейшие примеры непланарных графов содержатся среди т.н. полных графов K_n , т.е. графов с n вершинами, причем каждая пара различных вершин соединена ровно одним ребром. Графы K_2 (отрезок), K_3 (треугольник) и K_4 (тетраэдр), очевидно, планарны.

Утверждение 1.10. *Граф K_5 не планарный.*

Доказательство. Предположим, что K_5 – планарный граф; поскольку для него $v = 5$, $e = 10$, то, по формуле Эйлера, $f = 7$. С другой стороны, каждый цикл в графе, ограничивающий некоторую область, очевидно, содержит не менее трех ребер; подсчитаем для каждой области число ребер на ее границе. Учитывая, что при этом ребро считается не более двух раз (по одному для каждой из двух областей, на границах которых оно лежит), получим неравенство $2e \geq 3f$, т.е. $20 \geq 21$. \square

Еще один классический пример непланарного графа – граф “3 домика, 3 колодца”. Точнее, обозначим через $K_{m,n}$ граф с $m + n$ вершинами, разделенными на две группы по m и n вершин в каждой (домики и колодцы),

причем каждая вершина из любой группы соединена ровно одним ребром с каждой вершиной из другой (внутри группы вершины не соединяются).

Задача 1.11. Доказать, что граф $K_{3,3}$ не планарный.

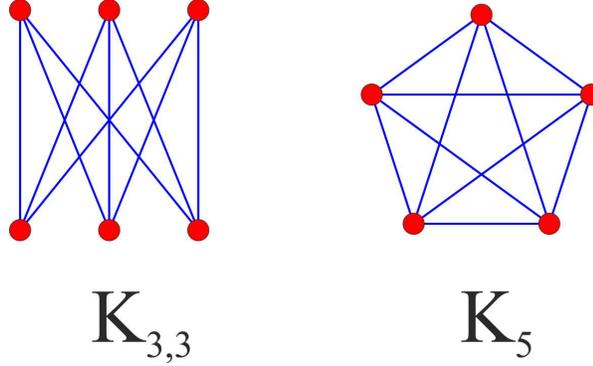


Рис. 1.4: Примеры непланарных графов.

Замечательный факт состоит в том, что графы K_5 и $K_{3,3}$ заключают в себе все причины непланарности. Приведем (без доказательства) соответствующее утверждение; для этого немного изменим отношение эквивалентности графов, разрешив, в частности, добавлять или удалять вершины степени 2 (которые можно считать просто точками на ребрах). Сперва, в точности так же, как для обычных функций одной переменной, определим непрерывные отображения графов. Пусть $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ – отображение графа Γ_1 в граф Γ_2 ; f называется непрерывным в точке $P \in \Gamma_1$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек $Q \in \Gamma_1$, для которых $|PQ| < \delta$ выполнено неравенство $|f(P)f(Q)| < \epsilon$ (расстояние между точками вычисляется в трехмерном пространстве). Отображение f называется гомеоморфизмом, если f взаимно однозначно, непрерывно в каждой точке $P \in \Gamma_1$ и обратное отображение $f^{-1} : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$ непрерывно во всех точках Γ_2 . Два графа Γ_1, Γ_2 называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$.

Теорема 1.12. (Понтрягина – Куратовского) Граф планарный тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 либо $K_{3,3}$.

Еще одно следствие теоремы Эйлера связано с наличием в планарном графе вершин не слишком большой степени. Именно: пусть Γ – планарный граф без петель и кратных ребер.

Утверждение 1.13. В графе Γ найдется вершина степени не больше 5.

Доказательство. Предположим, что это не так, т.е. существует планарный граф, степень любой вершины которого не меньше шести. Для каждой вершины подсчитаем выходящие из нее ребра; складывая эти числа по всем вершинам, получим удвоенное число ребер (т.к. каждое ребро соединяет две вершины). Таким образом, для нашего графа $2e \geq 6v$. С другой стороны, подсчитаем число ребер на границе каждой области, на которые граф делит плоскость; поскольку в каждом цикле графа не менее трех ребер, получим $2e \geq 3f$. Умножая последнее неравенство на 3 и складывая с предыдущим, получим $6e \geq 6v + 6f$ или $6(v + f - e) \leq 0$, что противоречит формуле Эйлера. \square

1.4 Проблема четырех красок

Свойства планарных графов играют ключевую роль в решении знаменитой проблемы четырех красок. Эта проблема была сформулирована в 1852 году лондонским студентом Ф. Гутри, который обнаружил, что, если на карте Англии раскрашивать графства так, чтобы соседние были раскрашены в разные цвета, то можно обойтись четырьмя красками. Его брат сообщил это наблюдение математику О. Де Моргану; точная формулировка проблемы была опубликована в 1878 году А. Кэли. Задача состоит в следующем: пусть на плоскости нарисована конечная карта (т.е. задан граф, разбивающий плоскость на конечное число областей, называемых странами); требуется раскрасить страны в минимально возможное число цветов так, чтобы каждые две страны, граничащие хотя бы по одному ребру графа, были раскрашены в разные цвета. Утверждается, что для любой карты достаточно четырех цветов.

Первое (неверное) доказательство было предложено в 1879 году В.Кемпе; в 1890 году П.Хивуд нашел в нем ошибку. Он же доказал, что пяти красок для любой карты достаточно; переход от пяти к четырем занял почти 100 лет. В 1977 году появилось доказательство гипотезы о четырех красках, полученное К.Ашелем и У. Хакеном при помощи компьютера (задача была сведена к перебору большого числа частных случаев, который и выполнил компьютер за 2000 часов машинного времени). Простого доказательства (которое может целиком понять или рассказать один человек) неизвестно до сих пор; мы приведем доказательство теоремы о пяти красках.

Прежде всего переформулируем задачу на более удобном языке: сопоставим каждой стране карты вершину нового графа (можно, например, считать, что в каждой стране фиксирована столица) и соединим вершины ребром тогда и только тогда, когда соответствующие страны имеют общий участок границы. Получим плоский граф (он называется двойственным исходному); задача теперь состоит в том, чтобы раскрасить его вершины так, чтобы вершины, соединенные ребром, были раскрашены в разные цвета. Такую раскраску назовем *правильной*. Заметим, что в нашем графе нет петель (страна не граничит сама с собой); кроме того, можно считать, что нет кратных ребер: раскраска графа с кратными ребрами правильная тогда и

только тогда, когда правильна соответствующая раскраска нового графа, полученного из исходного заменой всех ребер, соединяющих две данные вершины, на одно. Теперь мы можем сформулировать результат.

Теорема 1.14. *(о пяти красках) Для любого планарного графа без петель и кратных ребер существует правильная раскраска в 5 или менее цветов.*

Доказательство. Используем индукцию по числу вершин. Для графа с числом вершин, не превосходящим пяти, утверждение очевидно. Считая теорему доказанной для графов с числом вершин, не превосходящим m , рассмотрим граф с $m + 1$ вершиной. По доказанному выше, у графа есть вершина v_0 степени не более пяти; рассмотрим две ситуации.

1. Степень вершины v_0 строго меньше пяти. Удалим из графа эту вершину вместе со всеми входящими в нее ребрами; получим граф с m вершинами. По предположению индукции, для него существует правильная раскраска в 5 или менее цветов; по этой раскраске строится правильная раскраска исходного графа с тем же свойством – достаточно раскрасить вершину в v_0 в цвет, отличный от цветов соседних вершин (которых не более четырех).

2. Степень вершины v_0 в точности равна пяти. Рассмотрим соседние вершины (т.е. те, которые соединены с v_0 ребрами); среди них найдутся две, не соединенные ребром – в противном случае наш граф содержит полный граф K_5 , что противоречит планарности. Обозначим эти вершины через v_1 и v_2 ; удалим из графа вершину v_0 вместе с пятью входящими в нее ребрами, а затем в полученном графе (обозначим его Γ_1) стянем вершины v_1 и v_2 в одну. Получим граф Γ_2 с $m - 1$ вершиной; по предположению индукции, для него существует правильная раскраска в 5 или менее цветов (отметим, что граф Γ_2 не содержит петель, т.к. вершины v_1 и v_2 в исходном графе не соединены; кратные ребра, вообще говоря, могут появиться, но это, как отмечалось, не влияет на существование правильной раскраски). Эта раскраска индуцирует правильную раскраску графа Γ_1 , причем вершины v_1 и v_2 раскрашены в один цвет. По этой раскраске, в свою очередь, восстанавливается раскраска исходного графа – соседи вершины v_0 раскрашены в 4 (или менее) цвета. \square