

## Упражнения к семинару 11 “Регулярные кривые”

**Упражнение 11.1.** Докажите, что любые две непрерывные кривые на плоскости (замкнутые или нет) непрерывно гомотопны.

**Упражнение 11.2.** Покажите, что отношение гомотопности является эквивалентностью на каждом классе кривых: непрерывных, гладких, регулярных, замкнутых или нет. Покажите также, что возрастающая замена параметра, а также смещение начальной точки в случае замкнутой кривой, приводят к кривым, гомотопным исходной (опять же, в каждом классе рассматриваемых кривых).

**Упражнение 11.3.** Докажите, что любые две незамкнутые регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны.

**Упражнение 11.4.** Докажите, что любые две незамкнутые регулярные кривые на плоскости с одинаковыми началом и концом регулярно гомотопны с фиксированными концами.

**Упражнение 11.5.** Постройте регулярную гомотопию

(1) окружности и эллипса;

(2) эллипса и овала  $\frac{x_1^4}{a_1^4} + \frac{x_2^4}{a_2^4} = 1$ ,

выбрав подходящие регулярные параметризации этих кривых.

**Упражнение 11.6.** Вычислите число вращения кривой

(1)  $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \sin t)$ ;

(2)  $\gamma(t) = (2 \cos t, -\sin t)$ ;

(3)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$ ,

где  $t$  меняется на отрезке  $[0, 2\pi]$ .