Упражнения к семинару 10 "Задачи от А.А.Ошемкова"

Галочками отмечены задачи, которые мы разбирали. В любом случае, предлагается просмотреть все, и если из отмеченных задач что-то осталось неясным, пометьте их для себя и дайте мне знать на семинаре, чтобы мы эти задачи еще раз разобрали. Остальные задачи — Ваше домашнее задание.

✓ **Упражнение 10.1.** Доказать, что сумма степеней вершин любого графа равна удвоенному количеству его ребер. (В частности, число вершин нечетной степени всегда четно.)

✓ **Упражнение 10.2.** Доказать, что у дерева, содержащего хотя бы одно ребро, всегда есть вершина степени 1.

Упражнение 10.3. Доказать, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число его вершин B на 1 больше, чем, число его ребер P.

Упражнение 10.4. Перечислить все деревья с 6 вершинами.

Упражнение 10.5. Доказать, что максимальное число ребер, которое можно удалить из связного графа G так, чтобы он остался связным, равно $1-\chi(G)$.

✓ **Упражнение 10.6.** Доказать, что любой граф можно вложить в (трехмерное) пространство. Более того, если граф не содержит петель и кратных ребер, то его можно вложить в пространство так, что образ каждого ребра будет прямолинейным отрезком.

✓ **Упражнение 10.7.** Цикл, проходящий по всем ребрам графа, называется эйлеровым. Доказать, что в графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

Упражнение 10.8. Доказать, что вершины графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы вершины, соединенные ребром, были раскрашены в разные цвета, тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

✓ **Упражнение 10.9.** Доказать, что кривая $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2(x_1,x_2)$ непрерывна (в смысле определения 1.2) тогда и только тогда, когда непрерывны функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, где $\gamma(t)=\big(x_1(t),x_2(t)\big)$.

Упражнение 10.10. Доказать, что функция непрерывна на графе тогда и только тогда, когда ее ограничение на каждое ребро является непрерывной функцией.

Упражнение 10.11. Доказать, что если в качестве подмножества множества M в лемме 1.2 взять замкнутый круг, то первая точка на кривой, принадлежащая этому кругу (о существовании которой говорит лемма), лежит на граничной окружности этого круга.

✓ **Упражнение 10.12.** Доказать, что отрезок нельзя представить в виде объединения двух его открытых непустых непересекающихся подмножеств.

✓ **Упражнение 10.13.** Для любого подмножества плоскости A расстояние от точки $x\in\mathbb{R}^2$ до A определяется формулой $d(x,A)=\inf_{a\in A}\rho(x,a)$ (где ρ — обычное евклидово расстояние между точками). Доказать, что функция $f(x)=d(x,A)$, заданная на плоскости, непрерывна.

✓ **Упражнение 10.14.** Доказать, что пара радиусов, проведенных в круге, разбивают его ровно на две компоненты линейной связности.

✓ **Упражнение 10.15.** Доказать, используя теорему о промежуточном значении, что граница выпуклого многоугольника разбивает плоскость ровно на две компоненты. [Под многоугольником здесь можно понимать пересечение конечного числа замкнутых полуплоскостей, причем предполагается, что это пересечение содержит хотя бы одну точку вместе с ее окрестностью. Граница многоугольника состоит из тех частей прямых, задающих эти полуплоскости, которые принадлежат многоугольнику.]

Упражнение 10.16. Доказать, что любая локально постоянная функция на отрезке равна константе.

✓ **Упражнение 10.17.** Доказать, что K_5 не планарен, с помощью следствия 1.1 из теоремы Жордана для ломаных (т.е. не используя формулу Эйлера).

✓ **Упражнение 10.18.** Доказать, что для плоского графа без петель и кратных ребер справедливы неравенства $\frac{3}{2}\mathit{\Gamma} \le P \le 3B - 6$.

✓ **Упражнение 10.19.** Доказать, что в планарном графе без петель и кратных ребер есть вершина степени ≤ 5.

✓ **Упражнение 10.20.** Доказать, что граф без петель и кратных ребер, у которого 10 вершин и все они имеют степень 5, не планарный.

Упражнение 10.21. Завершить доказательство теоремы 1.1, рассмотрев случай, когда граф имеет петли.

Упражнение 10.22. Доказать усиленную версию теоремы 1.1, где вместо “ломаными” сказано “отрезками”.

✓ **Упражнение 10.23.** Доказать теорему о пяти красках: вершины любого планарного графа без петель можно раскрасить в пять цветов так, чтобы вершины, соединенные ребром, были раскрашены в разные цвета.

Упражнение 10.24. Описать все плоские графы, у которых вершины имеют одну и ту же степень, а грани ограничены одним и тем же числом ребер.

✓ **Упражнение 10.25.** Доказать, что следующие графы попарно не гомеоморфны: отрезок; петля (граф с одной вершиной и одним ребром); граф с одной вершиной степени 3 и тремя ребрами, сходящимися в этой вершине.

Упражнение 10.26. Доказать, что при гомеоморфизме графов вершина степени k переходит в вершину степени k, если $k \ne 2$.

Упражнение 10.27. Доказать следующее обобщение формулы Эйлера: для любого плоского графа верно соотношение $B - P + \mathit{\Gamma} = 1 + k$, где k — число компонент графа.

Упражнение 10.28. Доказать характеристические свойства выпуклого многогранника: то, что для любой грани он лежит по одну сторону от плоскости, содержащей эту грань, и то, что он совпадает с выпуклой оболочкой вершин.