

## Упражнения к семинару 9 “Двумерные поверхности”

**Упражнение 9.1.** Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. *Эйлеровой характеристикой* такой карты называется число  $v - e + f$ , где  $v$  — число вершин,  $e$  — число ребер и  $f$  — число областей. Докажите, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание: рассмотрите карту, получающуюся “наложением” двух карт, т.е. объединением их границ.

**Упражнение 9.2.** *Эйлеровой характеристикой поверхности* называется число

$$\chi = v - e + f,$$

где  $v$ ,  $e$  и  $f$  — числа вершин, ребер и областей любой карты, нарисованной на поверхности (согласно утверждению из упражнения 9.1, это число не зависит от карты и, тем самым, характеризует саму поверхность). Вычислите эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мебиуса.

**Упражнение 9.3.** Поверхность  $M$  получается из поверхности  $N$  вырезанием  $k$  дисков. Выразите  $\chi(M)$  через  $\chi(N)$ .

**Упражнение 9.4.** Каждая из двух поверхностей  $M$  и  $N$  имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска. Поверхность  $Q$  получается из поверхностей  $M$  и  $N$  склеиванием краев. Выразите  $\chi(Q)$  через  $\chi(M)$  и  $\chi(N)$ .

**Упражнение 9.5.** Вычислите эйлерову характеристику

- (1) поверхности  $M_g^m$ , полученной из сферы с  $g$  ручками вырезанием  $m$  дырок;
- (2) поверхности  $N_h^m$ , полученной из сферы с  $h$  пленками Мебиуса вырезанием  $m$  дырок.

**Упражнение 9.6.** Сторонам многоугольника приписаны буквы  $a, b, c, \dots$  в следующем порядке:

$$a, b, a, b, c, d, c, d, \dots$$

Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Докажите, что, если число разных букв равно  $2g$ , то полученная поверхность гомеоморфна сфере с  $g$  ручками.

**Упражнение 9.7.** Сторонам многоугольника приписаны буквы  $a, b, c, \dots$  в следующем порядке:

$$a, a, b, b, c, c, d, d, \dots$$

Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода. Докажите, что, если число разных букв равно  $h$ , то полученная поверхность гомеоморфна сфере с  $h$  пленками Мебиуса.

**Упражнение 9.8.** На замкнутой поверхности нарисована карта, причем каждая страна представляет собой некоторый  $n$ -угольник, и в каждой вершине сходится по  $k$  ребер. Докажите, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e},$$

где  $\chi$  — эйлерова характеристика поверхности, а  $e$  — число ребер карты. Приведите пример такой карты на сфере при  $n = 2$ ,  $k = 4$ .

**Упражнение 9.9.** Вычислите эйлеровы характеристики бутылки Клейна и проективной плоскости.