

Упражнения к семинару 8 “Жесткие и изгибаемые многогранники”

Упражнение 8.1. Докажите, что правильные многогранники определены однозначно с точностью до подобия.

Упражнение 8.2. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — тетраэдр, а $q_{ij} = q_{ji}$ обозначает квадрат расстояния между A_i и A_j . Докажите, что квадрат объема V этого тетраэдра может быть вычислен как многочлен от величин q_{ij} по следующей формуле:

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 1 \\ q_{21} & 0 & q_{23} & q_{24} & 1 \\ q_{31} & q_{32} & 0 & q_{34} & 1 \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Упражнение 8.3. Используя результаты предыдущего упражнения, докажите, что не существует тетраэдра, основание которого — правильный треугольник со стороной 1, а боковые стороны равны $3/2$, $2/3$ и $3/4$ (разрешается воспользоваться компьютером).