

## Упражнения к семинару 8

### “Равновеликость и равноставленность”

**Упражнение 8.1.** Пусть  $W$  — многоугольник, разрезанный двумя способами, а именно, на многоугольники  $F_1, \dots, F_n$ , а также на многоугольники  $G_1, \dots, G_m$ . Докажите следующее утверждение: многоугольник  $W$  можно разрезать на многоугольники  $W_i$  так, что каждый  $W_i$  лежит в некотором  $F_j$  и  $G_k$ . В частности, каждый  $F_j$  и  $G_k$  разрезается на некоторые из многоугольников  $W_i$ .

**Упражнение 8.2.** Выведите из упражнения 8.1, что из равноставленности многоугольников  $A$  и  $B$ , а также многоугольников  $B$  и  $C$ , вытекает равноставленность многоугольников  $A$  и  $C$ . Покажите, что отношение равноставленности на плоских многоугольниках является эквивалентностью.

**Упражнение 8.3.** Докажите, что любой плоский многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники (а затем на треугольники).

**Упражнение 8.4.** Докажите, что любой треугольник равноставлен с некоторым параллелограммом.

**Упражнение 8.5.** Докажите, что два параллелограмма, у которых соответственно одинаковы основания и проведенные к ним высоты, равноставлены.

**Упражнение 8.6.** Из упражнения 8.5 выведите, что любые два прямоугольника равных площадей равноставлены.

**Упражнение 8.7.** Докажите, что конечный набор прямоугольников равноставлен с любым прямоугольником суммарной площади.

**Упражнение 8.8.** Докажите теорему Бойяи–Валласа–Гервина.

**Упражнение 8.9.** Выведите из теоремы Бойяи–Валласа–Гервина, что любая прямоугольная призма равноставлена с прямоугольным параллелепипедом, а последний равноставлен с кубом.

**Упражнение 8.10.** Выясните, являются ли равноставленными равновеликие октаэдр и четырехугольная пирамида, основание которой — грань куба, а оставшаяся вершина — центр этого куба?