Упражнения к семинару 6 “Многогранники”

Упражнение 6.1. Пусть W — выпуклый многогранник, и пусть v, e и f обозначают количества вершин, ребер и граней этого многогранника. Докажите, что

(1) $e+6 \leq 3v$;

(2) $e+6 \leq 3f$;

(3) $f+4 \leq 2v$;

(4) $v+4 \leq 2f$;

(5) многогранник W имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань;

(6) многогранник W имеет хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол (т.е. вершину, в которой стыкуются 3, 4 или 5 граней);

(7) многогранник W имеет или хотя бы одну треугольную грань, или один трехгранный пространственный угол;

(8) сумма всех плоских углов граней многогранника W равна $2\pi(v-2)$.

Определение 6.1. Пусть P — вершина произвольного многогранника W, а $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ — величины углов всех граней W при этой вершине. Тогда *кривизной в вершине* P называется величина $K(P)=2\pi-\sum_i \alpha_i$.

Упражнение 6.2. Докажите, что у выпуклого многогранника сумма кривизн $K(P)$ по всем его вершинам P равна 4π.

Упражнение 6.3. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W. Докажите, что $\partial W \setminus L$ состоит из двух компонент.

Определение 6.2. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W, а Ω_1 и Ω_2 — компоненты множества $\partial W \setminus L$. Тогда множества $M_i = L \cup \Omega_i$ называются *многоугольниками на* ∂W. Для многоугольника M_i точки из Ω_i называются *внутренними*, из Ω_j — *внешними*, а из L — *граничными*, где $\{i,j\}=\{1,2\}$. Положим $\operatorname{Int} M_i = \Omega_i$, $\operatorname{Out} M_i = \Omega_j$ и $\partial M_i = L$.

Определение 6.3. Пусть X — многоугольник на поверхности ∂W выпуклого многогранника W, а P — некоторая вершина многоугольника X. Тогда *угол* α_P *многоугольника* X *в вершине* P определяется так. Если P лежит внутри грани, то α_P — это угол на плоскости, содержащей эту грань. Если же P попала или на ребро, или в вершину из ∂W, то угол в этой вершине складывается из всех углов многоугольников, полученных пересечением X и содержащих эту вершину граней (конечно, углы рассматриваются в этой вершине).

Упражнение 6.4. Рассмотрим n-угольник X, лежащий на границе выпуклого многогранника. Докажите, что его сумма углов равна $\pi(n-2)$ плюс сумма кривизн $K(P)$ по всем вершинам многогранника, попавшим внутрь X.

Упражнение 6.5. Существует ли тетраэдр с гранями $F_1,\dots,F_4$ такой, что площадь каждой F_i равна 1, грани F_1 и F_2 перпендикулярны друг другу, грани F_3 и F_4 также перпендикулярны друг другу, а угол между ребром $e_{12}=F_1\cap F_2$ и $e_{34}=F_3\cap F_4$ равен 37°? Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Упражнение 6.6. Докажите, что выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади. Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Определение 6.4. Пусть X — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$. Наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее X, называется *выпуклой оболочкой* X и обозначается через $\operatorname{conv} X$. Иными словами, $\operatorname{conv} X$ — это такое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, что $X \subset \operatorname{conv} X$, и если $Y \supset X$ — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv} X \subset Y$.

Замечание 6.5. Определение 6.4 и тот факт, что пересечение выпуклых множеств — выпукло, мгновенно влекут, что $\operatorname{conv} X$ совпадает с пересечением всех выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащих X.

Упражнение 6.7. Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.