Упражнения к семинару 3 “Теорема Жордана”

Упражнение 3.1.

(1) Приведите пример непересекающихся подмножеств на прямой, расстояние между которыми равно нулю.

(2) Приведите пример непересекающихся замкнутых подмножеств прямой, расстояние между которыми равно нулю.

(3) Существуют ли два замкнутых непересекающихся подмножества окружности, находящиеся на нулевом расстоянии?

Упражнение 3.2. Пусть A — некоторое подмножество плоскости. Рассмотрим функцию $f(x) = \inf\big\{|xy| : y \in A\big\}$ (расстояние от x до A). Докажите, что f непрерывна.

Упражнение 3.3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, заданные на топологическом пространстве X. Докажите, что функция $h(x) = \max\big\{f(x), g(x)\big\}$ также непрерывна.

Упражнение 3.4. Докажите, не используя теорему Жордана, что квадрат (стороны квадрата) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.5. Докажите, не используя теорему Жордана, что треугольник (замкнутая трехзвенная ломаная) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.6. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая ломаная без самопересечений такая, что для каждого ее ребра ломаная L лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через это ребро (такие ломаные иногда называют *выпуклыми*). Не используя теорему Жордана, докажите, что L разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.7. Докажите, что открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ линейно связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить ломаной.

Упражнение 3.8. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — незамкнутая ломаная без самопересечений. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-окрестность $U_\varepsilon(L)$ ломаной L. Пусть P и Q — произвольные точки из $U_\varepsilon(L) \setminus L$. Покажите, что их можно соединить ломаной, не пересекающей L и лежащей в $U_\varepsilon(L)$.

Упражнение 3.9. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием трех различных его радиусов. Докажите, что X состоит из трех компонент.

Упражнение 3.10. Пусть OA, OB и OC — три отрезка, причем любые два из них имеют только одну общую точку O. Докажите, что объединение этих отрезков не разбивает плоскость, т.е. что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (OA \cup OB \cup OC)$ линейно связно.

Упражнение 3.11. Пусть L_1 и L_2 — незамкнутые ломаные без самопересечений, лежащие на плоскости $\mathbb{R}^2$ и не имеющие общих точек. Докажите, что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$ линейно связно.

Упражнение 3.12. Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1],\ [A_2, B_2], \ldots, [A_m, B_m]$$

отрезков $[A_i, B_i] \subset \mathbb{R}^2$ (некоторые отрезки могут быть вырожденными) и положим $X_k = \cup_{i=1}^k [A_i, B_i]$. Предположим, что для каждого $k = 2, \ldots, m$ выполняется или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$, или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$. Докажите, что любые две точки из каждого множества $\Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus X_k$ можно соединить ломаной, лежащей в Ω_k. В частности, каждое множество Ω_k — линейно связно.