Упражнения к семинару 2 “Элементы топологии (часть 1)”

Упражнение 2.1 (Аксиомы топологии)**.** Проверьте, что семейства множеств, которые мы называли

(1) топологией Зарисского,

(2) индуцированной топологией,

(3) топологией декартова произведения,

(4) метрической топологией

действительно удовлетворяют всем аксиомам топологии.

Упражнение 2.2 (Замкнутые множества)**.** Докажите, что в метрическом пространстве X

(1) замкнутый шар $B_r(x)$ — замкнутое множество;

(2) сфера $S_r(x)$ — замкнутое множество.

Упражнение 2.3 (База)**.** Покажите, что семейство $\mathcal{B} \subset 2^X$ является базой некоторой топологии, определенной на множестве X, если и только если выполняются следующие два условия:

- $\cup_{B\in\mathcal{B}} B = X$;
- для каждых пересекающихся $B, B' \in \mathcal{B}$ и любой точки $x \in B \cap B'$ существует $C \in \mathcal{B}$, для которого $x \in C \subset B \cap B'$.

Упражнение 2.4 (Хаусдорфовость)**.** Докажите, что следующие топологии хаусдорфовы:

(1) метрическая, в частности, стандартная на $\mathbb{R}^n$;

(2) индуцированная топология на подмножестве хаусдорфова пространства, в частности, на подмножестве $\mathbb{R}^n$.

Покажите, что топология Зарисского на бесконечных множествах не хаусдорфова.

Упражнение 2.5 (Непрерывные отображения)**.** Докажите следующие утверждения.

(1) Каждое отображение $f\colon X \to Y$ из произвольного топологического пространства X в антидискретное топологическое пространство Y непрерывно.

(2) Каждое отображение $f\colon X \to Y$ дискретного топологического пространства X в любое топологическое пространство Y непрерывно.

(3) Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X$ — произвольная точка, а $\mathcal{B}_x$ и $\mathcal{B}_{f(x)}$ — любые базы окрестностей точек x и $f(x)$ соответственно. Тогда отображение f непрерывно в точке x, если и только если для любой окрестности $V \in \mathcal{B}_{f(x)}$ существует окрестность $U \in \mathcal{B}_x$, для которой $f(U) \subset V$.

(4) Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств и $x \in X$, тогда отображение f непрерывно в точке x, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $x' \in X$, $|xx'| < \delta$, выполняется $\bigl|f(x)f(x')\bigr| < \varepsilon$.

(5) Пусть X — метрическое пространство, и $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — его метрика. Покажите, что функция ρ непрерывна.

(6) Пусть даны топологические пространства X_α, $\alpha \in I$, и Y. Тогда отображение $f\colon \sqcup_{\alpha\in I} X_\alpha \to Y$ непрерывно, если и только если все ограничения $f|_{X_\alpha}$ непрерывны.

(7) Пусть $\{X_i\}_{i=1}^n$ — топологические пространства и $X = \prod_i X_i$. Тогда

   (a) каждая каноническая проекция π_i — непрерывное отображение;

   (b) отображение $f\colon Y \to X$ из топологического пространства Y непрерывно, если и только если непрерывны все координатные отображения f_i этого f.

2.1 Основные определения и предварительные результаты

Для произвольного множества X обозначим 2^X семейство всех его подмножеств.

2.1.1 Топология

Пусть $\tau \subset 2^X$, т.е. $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subset X\}_{\alpha \in I}$. Семейство τ называется *топологией на* X, если оно удовлетворяет следующим *аксиомам топологии*:

- пустое множество $\emptyset$ и все X являются элементами τ, т.е. $\emptyset, X \in \tau$;
- для любого $J \subset I$ выполняется $\cup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$ (семейство τ замкнуто относительно объединения, т.е. объединение любого набора элементов из τ является элементом τ);
- для любого **конечного** $J \subset I$ выполняется $\cap_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$ (семейство τ замкнуто относительно **конечных** пересечений, т.е. пересечение любого конечного набора элементов из τ является элементом τ).

Множество X, на котором задана топология τ, называется *топологическим пространством*, а элементы топологии называются *открытыми множествами*. Если мы вводим в рассмотрение топологическое пространство X, то его топологию будем часто обозначать τ_X, не оговаривая этого каждый раз. Например: "пусть X — топологическое пространство и $U \in \tau_X$ — открытое множество".

Дополнения до открытых множеств называются *замкнутыми множествами*. Так как $X = X \setminus \emptyset$ и $\emptyset = X \setminus X$, то X и $\emptyset$ являются одновременно и открытыми, и замкнутыми множествами.

Приведем примеры топологий.

Пример 2.1. Пусть X — произвольное множество. Следующие подмножества в 2^X являются топологиями на X (проверьте):

- *антидискретная топология* $\tau_a = \{\emptyset, X\}$;
- *дискретная топология* $\tau_d = 2^X$;
- *топология Зарисского* $\tau_z = \big\{U \subset X : |X \setminus U| < \infty\big\} \cup \{\emptyset\}$, где $|M|$ обозначает мощность множества M.

Пример 2.2 (Индуцированная топология)**.** Пусть Y — произвольное подмножество топологического пространства X. Положим

$$\tau_Y = \{Y \cap U_\alpha : U_\alpha \in \tau_X\},$$

тогда τ_Y — топология, которая называется *индуцированной из* X. По умолчанию на каждом подмножестве $Y \subset X$ рассматривается именно такая топология.

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство топологических пространств. Рассмотрим дизъюнктное объединение $X = \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ (мы рассматриваем все X_α как непересекающиеся множества). *Топология* τ_X *дизъюнктного объединения* — это топология, в которой открытыми множествами являются всевозможные объединения $\sqcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ для $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — конечное семейство топологических пространств и $X = \prod_i X_i$. Подмножество $U \subset X$ открыто в *топологии произведения*, если и только если U является объединением множеств вида $U_1 \times \cdots \times U_n$, где $U_i \in \tau_{X_i}$ для всех i.

2.1.2 Метрика и метрическая топология

Пусть X — множество. Функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ называется *метрикой на* X, если для любых $x, y, z \in X$ выполняются следующие условия:

- $\rho(x, y) \ge 0$, причем $\rho(x, y) = 0$, если и только если $x = y$ (*положительная определенность*);
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*симметричность*);
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \ge \rho(x, z)$ (*неравенство треугольника*).

Множество X, на котором задана метрика ρ, называется *метрическим пространством*, а величина $\rho(x, y)$ — *расстоянием между точками* x *и* y. Часто расстояние между точками x и y обозначают $|xy|$, независимо от того, в каком метрическом пространстве они лежат.

Пример 2.3. На любом множестве X можно ввести метрику, положив расстояния между разными точками равным 1.

Пример 2.4. Для произвольных точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ положим

$$|xy| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Эта функция удовлетворяет всем аксиомам метрики (убедитесь в этом) и называется *стандартным* или *евклидовым расстоянием на* $\mathbb{R}^n$. Для $n = 1$ это расстояние между точками x и y равно $|x - y|$.

Пусть X — метрическое пространство, $x \in X$, а $r \geq 0$ и $s > 0$ — вещественные числа. Тогда

- *открытым шаром с центром в x и радиусом s* называется множество

$$U_s(x) = \big\{y \in X : |xy| < s\big\};$$

- *замкнутым шаром с центром в x и радиусом r* называется множество

$$B_r(x) = \big\{y \in X : |xy| \leq r\big\};$$

- *сферой с центром в x и радиусом r* называется множество

$$S_r(x) = \big\{y \in X : |xy| = r\big\}.$$

На метрическом пространстве X имеется стандартная *метрическая топология*, которая определяется так: открытыми множествами являются всевозможные объединения открытых шаров (пустое множество входит сюда, так как является объединением пустого семейства открытых шаров). Эквивалентное определение: подмножество $U \subset X$ считается открытым в этой топологии тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in U$ существует $s > 0$ такое, что $U_s(x) \subset U$ (убедитесь, что приведенные два определения топологии метрического пространства эквивалентны).

Пример 2.5. *Стандартная топология на* $\mathbb{R}^n$ — это соответствующая метрическая топология для евклидовой метрики, определенной в примере 2.4. Именно этой топологией пользуется математический анализ для определения сходимости последовательностей и непрерывности функций. Если не оговорено противное, то по умолчанию мы считаем, что топология на $\mathbb{R}^n$ именно стандартная.

Пример 2.6. *Стандартная топология на отрезке* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ может быть определена эквивалентным образом так (проверьте эквивалентность приведенных ниже определений):

- это — метрическая топология для стандартной функции расстояния между точками;
- это — топология, индуцированная на $[a, b]$ из стандартной топологии на $\mathbb{R}$.

2.1.3 База топологии

Пусть X — топологическое пространство. Семейство $\mathcal{B} \subset \tau_X$ называется *базой топологии* τ_X, если все непустые открытые множества пространства X могут быть получены объединением некоторых элементов из семейства $\mathcal{B}$ (если считать, что объединение элементов пустого семейства является пустым множеством, то в определении базы можно выкинуть требование непустоты открытого множества).

Пример 2.7. В метрическом пространстве X семейство открытых шаров $U_s(x) \subset X$ по всем $x \in X$ и $s > 0$ образуют базу метрической топологии.

2.1.4 Хаусдорфовость

Окрестностью точки топологического пространства называется каждое открытое множество, содержащее эту точку. Часто окрестность точки x будем обозначать в виде U^x, V^x, и т.д. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым* или *отделимым*, если у каждой пары различных точек имеются непересекающиеся окрестности. Пустое и одноточечные множества с единственными возможными топологиями также относятся к хаусдорфовым пространствам.

Предложение 2.8. *Следующие топологии хаусдорфовы*:

(1) *дискретная*;

(2) *антидискретная на не более чем одноточечных множествах и только на них*;

(3) *Зарисского на конечных множествах и только на них*;

(4) *метрическая, в частности, стандартная на* $\mathbb{R}^n$;

(5) *индуцированная топология на подмножестве хаусдорфова пространства, в частности, на подмножестве* $\mathbb{R}^n$ (*про такое свойство говорят, что оно* ***наследуется*** *на подмножествах*).

2.1.5 Непрерывное отображение

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Говорят, что f *непрерывно в точке* $x \in X$, если для любой окрестности $V^{f(x)}$ существует окрестность U^x, для которой $f(U^x) \subset V^{f(x)}$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывного в каждой точке. Отображения $f\colon X \to Y$, не являющиеся непрерывными (в данной точке), называются *разрывными* (в этой точке).

Приведем еще два определения непрерывного отображения, эквивалентных предыдущему.

(**Второе определение непрерывности**) Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества открыт.

(**Третье определение непрерывности**) Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз каждого замкнутого множества замкнут.

Предложение 2.9. *Следующие отображения непрерывны*:

(1) *тождественное отображение топологического пространства на себя*;

(2) *постоянное отображение, переводящее все топологическое пространство в некоторую точку другого топологического пространства*;

(3) *для подмножества* Y *топологического пространства* X *— отображение включения* $i\colon Y \to X$, $i\colon y \mapsto y$ *для всех* $y \in Y$;

(4) *композиция непрерывных отображений топологических пространств.*

Отображение в вещественную прямую $\mathbb{R}$ называется *функцией*, а в $\mathbb{R}^n$ — *векторнозначной функцией.*

Для точки $x \in X$ топологического пространства X назовем *базой окрестностей* $\mathcal{B}_x$ *точки* x каждый набор окрестностей x такой, что для любой окрестности U^x точки x существует $U \in \mathcal{B}_x$, удовлетворяющий $U \subset U^x$. Например, если X — метрическое пространство, то в качестве базы окрестностей x можно взять только те шары, у которых x — центр.

Для декартова произведения $X = \prod_i X_i$ определены *канонические проекции* $\pi_i\colon X \to X_i$, заданные так: $\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$. Если $f\colon Y \to X$ — отображение, то композиции $f_i := \pi_i \circ f$ называется *координатным отображением* f.

Рекомендуемая литература к семинару 2

- Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979.

- Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.* В серии: Классический университетский учебник. (Учебник). - Москва, изд-во “Физико-математическая литература”, МАИК “Наука/Интерпериодика”, 2004. Издание 2-е, исправленное и дополненное. Москва, URSS, ЛЕЛАНД, 2016.