Семинар 2

Элементы топологии (часть 2)

Последовательность x_n точек топологического пространства X *сходится* к точке $x \in X$, если для любой окрестности U^x точки x существует такое N, что при всех $n \geq N$ выполняется $x_n \in U^x$.

Подмножество Y топологического пространства называется *открыто-замкнутым*, если оно одновременно открыто и замкнуто. В каждом топологическом пространстве X подмножества $\emptyset$ и X — открыто-замкнутые. Если других открыто-замкнутых подмножеств в пространстве нет, то оно называется *связным*, иначе — *несвязным*. На эквивалентном языке, топологическое пространство X называется *несвязным*, если оно представимо в виде дизъюнктного объединения непустых открытых множеств (эквивалентно, непустых замкнутых множеств). Важный пример связного пространства — отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (см. задачи).

Связной компонентой топологического пространства называется максимальное по включению связное подмножество (с индуцированной топологией). Каждое топологическое пространство однозначно разбивается на связные компоненты. Иными словами, каждое топологическое пространство однозначно представимо в виде дизъюнктного объединения связных компонент. Несложно показать, что образ связного топологического пространства связен. Этот факт лежит в основе теоремы из математического анализа, гарантирующей, что каждая непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения.

Кривая — непрерывное отображение $\gamma\colon [a, b] \to X$ отрезка $[a, b]$ в топологическое пространство X. Говорят, что кривая γ *соединяет* точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Топологическое пространство *линейно связно*, если любые две его точки можно соединить кривой. Из связности отрезка вытекает, что каждое линейно связное пространство связно.

Линейно связной компонентой топологического пространства называется максимальное по включению линейно связное подмножество (с индуцированной топологией). Каждое топологическое пространство однозначно разбивается на линейно связные компоненты. Иными словами, каждое топологическое пространство однозначно представимо в виде дизъюнктного объединения линейно связных компонент. Разбиение на линейно связные компоненты является подразбиением разбиения на связные компоненты (так как каждая линейно связная компонента связна).

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если f биективно, а f и f^{-1} — непрерывны. Не всякое биективное непрерывное отображение является гомеоморфизмом. Например, отображение $f\colon [0, 2\pi) \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $f(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ непрерывно и биективно отображает полуинтервал $[0, 2\pi)$ на единичную окружность S^1 с центром в начале координат, но обратное отображение не является непрерывным (на окружности рассматриваем индуцированную топологию). Топологические пространства, между которыми имеется гомеоморфизм, называются *гомеоморфными*. Каждый гомеоморфизм устанавливает не только взаимно-однозначное соответствие между точками пространств, но и взаимно-однозначное отображение между открытыми множествами. Гомеоморфизм $f\colon X \to Y$ можно наглядно представлять как переименование точек пространства без изменения топологии: мы просто называет точку $x \in X$ точкой $y = f(x)$. Таким образом, все топологические свойства гомеоморфных пространств одинаковы. Например, гомеоморфные пространства одновременно связны или нет, линейно связны или нет, и т.д.

Покрытием множества X называется каждое семейство $\{Y_\alpha\}$ его подмножеств такое, что $\cup_\alpha Y_\alpha = X$. Подсемейство покрытия, которое само является покрытием, называется *подпокрытием*. *Открытое покрытие* топологического пространства — это покрытие открытыми множествами. Топологическое пространство называется *компактным*, если из каждого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Важный пример компактного пространства — отрезок $[a, b]$. Следующий факт будет многократно использоваться в нашем курсе: каждая непрерывная функция, заданная на компакте, ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения.

Факторизацией называется сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств, для которого подмножество $V \subset Y$ открыто, если и только если $f^{-1}(V)$ открыто в X. Типичная ситуация: задаем разбиение $\mathcal{P} = \{X_\alpha\}$ топологического пространства X (например, рассматриваем некоторую эквивалентность $\sim$ на X и в качестве $\mathcal{P}$ берем множество $X/\sim$ классов этой эквивалентности); рассматриваем *отображение проекции* $\pi\colon X \to \mathcal{P}$, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ единственное множество X_α, содержащее эту точку; на множестве $\mathcal{P}$ задаем *фактор-топологию*, в которой множество $V \subset \mathcal{P}$ открыто, если и только если $\pi^{-1}(V)$ открыто в X. Иными словами, топология такова, что отображение проекции π является факторизацией. Если задана факторизация $f\colon X \to Y$, то соответствующее разбиение $\mathcal{P}$ — это разбиение X на прообразы $f^{-1}(y)$ точек $y \in Y$. Важный результат (см. упражнения): пусть X — компактное пространство, Y — хаусдорфово, $f\colon X \to Y$ — факторизация, $\mathcal{P} = \left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ наделено фактор-топологией. Тогда $\mathcal{P}$ гомеоморфно Y.

В качестве примера рассмотрим отрезок $[0, 2\pi]$ и зададим на нем эквивалентность $\sim$, в которой все классы одноточечные, кроме двухточечного класса $\{0, 2\pi\}$. Иными словами, эта эквивалентность *отождествляет* или *склеивает* концы отрезка $[0, 2\pi]$. Что представляет собой фактор-пространство $[0, 2\pi]/\sim$, т.е. что мы получим, если склеим концы отрезка? Ответ: окружность. Чтобы это доказать, рассмотрим отображение $f\colon [0, 2\pi] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $f(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Отрезок компактен, окружность — хаусдорфова (как подмножество хаусдорфовой $\mathbb{R}^2$), разбиение отрезка на прообразы отображения f в точности совпадает с разбиением на классы эквивалентности $\sim$. Остается применить “важный результат”.

Упражнения к семинару 2 “Элементы топологии (часть 2)”

Упражнение 2.1 (Последовательности)**.** Докажите следующие утверждения.

(1) В пространстве X с антидискретной топологией $\tau_X = \{\emptyset, X\}$ все последовательности сходятся ко всем точкам одновременно.

(2) В пространстве X с дискретной топологией $\tau_X = 2^X$ последовательность x_n сходится к $x \in X$, если и только если, начиная с некоторого номера n, выполняется $x_n = x$.

(3) В пространстве с хаусдорфовой топологией предел каждой сходящейся последовательности определен однозначно. В частности, в каждом метрическом пространстве, например в $\mathbb{R}^n$, пределы сходящихся последовательностей определены однозначно.

(4) В метрическом пространстве сходимость последовательности x_n к точке x равносильна выполнению следующего условия*:* для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при каждом $n \geq N$ выполняется $|xx_n| < \varepsilon$.

(5) Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств переводит каждую сходящуюся к $x \in X$ последовательность в последовательность, сходящуюся к $f(x)$.

(6) Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств непрерывно в точке $x \in X$, если и только если каждая сходящаяся к x последовательность переходит в последовательность, сходящуюся к $f(x)$.

(7) Пусть X — бесконечное пространство с топологией Зарисского. Тогда если в последовательности

   (a) каждый элемент повторяется конечное число раз, то последовательность сходится к каждой точке;

   (b) ровно одна точка $x \in X$ встречается в последовательности бесконечное число раз, а все остальные — конечное, то последовательность сходится к x;

   (c) если имеется по крайней мере два разных x и y, которые повторяются бесконечное число раз, то последовательность расходится.

Упражнение 2.2 (Связность)**.** Докажите следующие утверждения.

(1) Дискретное топологическое пространство, состоящее не менее чем из двух точек, несвязно.

(2) Любое антидискретное топологическое пространство связно.

(3) Подмножество $[0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ несвязно.

(4) Отрезок $[a,b]$ связен.

(5) Если $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — семейство связных подмножеств топологического пространства X, причем $\cap_{\alpha\in I} Y_\alpha \neq \emptyset$, то множество $Y = \cup_{\alpha\in I} Y_\alpha$ — также связно.

(6) Каждое топологическое пространство разбивается на связные компоненты, причем это разбиение однозначно определено.

(7) Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, и пространство X — связно. Тогда множество $f(X)$ также связно. В частности, непрерывный образ отрезка связен.

Упражнение 2.3 (Кривые)**.** Покажите, что ломаную можно задать как образ кривой.

Упражнение 2.4 (Линейная связность)**.** Докажите следующие утверждения.

(1) Дискретное топологическое пространство, состоящее не менее чем из двух точек, не является линейно связным.

(2) Любое антидискретное топологическое пространство линейно связно.

(3) Прямая с топологией Зарисского линейно связна.

(4) Множество компонент линейной связности топологического пространства X является разбиением X.

(5) Зафиксируем в топологическом пространстве X некоторую точку x_0. Тогда X линейно связно, если и только если любую точку из X можно соединить кривой с x_0.

(6) Линейно связное топологическое пространство X связно. Обратное неверно.

(7) Пусть X — связное топологическое пространство, $a, b \in X$, и $f: X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда f принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, т.е. для любого $y \in \mathbb{R}$, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, существует $x \in X$, для которого $f(x) = y$. В частности, если $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то f принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Упражнение 2.5 (Гомеоморфизм)**.** Покажите, что

(1) интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ и прямая $\mathbb{R}$ гомеоморфны;

(2) отрезок и $\top \subset \mathbb{R}^2$ не гомеоморфны.

Упражнение 2.6 (Компактность)**.** Докажите следующие утверждения.

(1) Пространство $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, не является компактным.

(2) Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — компактный.

(3) Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение компактного топологического пространства X в произвольное топологическое пространство Y. Тогда множество $f(X)$ компактно.

(4) Замкнутое подмножество Y компактного пространства X компактно.

(5) Компактное подмножество Y хаусдорфова пространства X замкнуто.

Упражнение 2.7 (Фактор-топология)**.** Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y. Докажите следующие утверждения.

(1) Отображение f замкнуто.

(2) Если f сюръективно, то f — факторизация.

(3) Если f сюръективно, то Y гомеоморфно фактор-пространству X/f.

(4) Если f — биективно, то f — гомеоморфизм.