Семинар 1

Комбинаторные графы. Элементы топологии (часть 1)

1.1 Комбинаторные графы

Для произвольного множества V через V_k будем обозначать множество всех k-элементных подмножеств множества V. Множество V_2 совпадает с множеством неупорядоченных пар различных элементов V. Множество V_1 состоит из одноэлементных подмножеств множества V, его можно отождествить с V. Если множество V конечно и состоит из n элементов, то V_k пусто при $k > n$.

Определение 1.1. *Комбинаторным графом* G или просто *графом* называется тройка $G = (V, E, \partial)$, состоящая из множеств V, E и отображения $\partial\colon E \to V_1 \cup V_2$. Элементы из V называются *вершинами* графа G, элементы из E — *ребрами* графа G, а ∂ — *отображением инцидентности*.

В теории графов принята следующая терминология:

- если $v \in \partial(e)$, то говорят, что вершина v и ребро e *инцидентны*;
- если $\partial(e) = \{v, w\}$, то говорят, что вершины v и w *смежны*, или же, что они *соединены ребром* e;
- ребра e и e' называются *смежными*, если $\partial(e) \cap \partial(e') \neq \emptyset$;
- ребро, инцидентное ровно одной вершине, называется *петлей*;
- если некоторой паре вершин инцидентно несколько ребер, то все эти ребра называются *кратными*;
- если некоторой вершине инцидентно несколько петель, то все эти петли также называются *кратными*.

Кратностью ребра e называется количество всех ребер e', для которых $\partial(e') = \partial(e)$. Ясно, что ребро e не является кратным тогда и только тогда, когда его кратность равна 1.

Определение 1.2. Граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

Замечание 1.3. Чтобы задать простой граф, достаточно задать множество вершин V и некоторое подмножество E в V_2. Для простого графа $G = (V, E)$ ребро $e = \{v, w\} \in E$ удобно обозначать через vw или wv.

Задача 1.4 (Лемма о рукопожатиях)**.** Некоторые участники конференции, здороваясь, пожимают друг другу руки. Докажите, что число участников, каждый из которых совершил нечетное число рукопожатий, — четно.

Решение этой задачи использует понятие степени вершины.

Определение 1.5. Пусть v — произвольная вершина некоторого графа. Тогда *степенью* $\deg v$ этой вершины называется количество инцидентных v ребер, не являющихся петлями, плюс удвоенное количество петель, инцидентных v.

Определение 1.6. *Маршрутом, соединяющим вершины* v_0 *и* v_k, называется последовательность

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k,$$

где v_i — вершины графа, а e_i — его ребра, причем для каждого i ребро e_i соединяет вершины v_{i-1} и v_i. Маршрут называется *замкнутым*, если $v_0 = v_k$. В обоих рассмотренных случаях число k называется *длиной маршрута*. Если в маршруте все вершины различны, то такой маршрут называется *путем*. Если же в замкнутом маршруте различны все ребра e_i, то такой маршрут называется *циклом*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить некоторым маршрутом.

Замечание 1.7. Если G — простой граф, то маршрут из определения 1.6 записывается как $v_0 v_1 \cdots v_k$ (без указания ребер и без разделения запятыми).

Определение 1.8. Цикл в связном графе называется *эйлеровым* или *обходом графа*, если он содержит все ребра графа. Граф, для которого существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

Теорема 1.9 (Критерий эйлеровости графа)**.** *Связный граф эйлеров, если и только если степени всех его вершин четны и положительны.*

Задача 1.10. Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

Определение 1.11. Цикл называется *простым*, если все его вершины (кроме первой и последней) различны. Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым*. Граф, содержащий некоторый гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым*.

Задача 1.12. Объясните, почему при изучении гамильтоновых графов можно ограничиться простыми графами.

Полным графом K_n называется простой граф с n вершинами, в котором каждая пара вершин смежна, т.е. любые две различные вершины соединены единственным ребром.

Теорема 1.13 (Дирак)**.** *Пусть* $G = (V, E)$ *— простой граф с* $n \geq 3$ *вершинами. Предположим, что степени вершин графа* G *не меньше* $n/2$*. Тогда граф* G *гамильтонов, в частности, граф* G *— связный.*

1.2 Элементы топологии

Для произвольного множества X обозначим 2^X семейство всех его подмножеств.

1.2.1 Топология

Пусть $\tau \subset 2^X$, т.е. $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subset X\}_{\alpha \in I}$. Семейство τ называется *топологией на* X, если оно удовлетворяет следующим *аксиомам топологии*:

- пустое множество $\emptyset$ и все X являются элементами τ, т.е. $\emptyset, X \in \tau$;
- для любого $J \subset I$ выполняется $\cup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$ (семейство τ замкнуто относительно объединения, т.е. объединение любого набора элементов из τ является элементом τ);
- для любого **конечного** $J \subset I$ выполняется $\cap_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$ (семейство τ замкнуто относительно **конечных** пересечений, т.е. пересечение любого конечного набора элементов из τ является элементом τ).

Множество X, на котором задана топология τ, называется *топологическим пространством*, а элементы топологии называются *открытыми множествами*.

Дополнения до открытых множеств называются *замкнутыми множествами*. Так как $X = X \setminus \emptyset$ и $\emptyset = X \setminus X$, то X и $\emptyset$ являются одновременно и открытыми, и замкнутыми множествами.

Приведем примеры топологий.

Пример 1.14. Пусть X — произвольное множество. Следующие подмножества в 2^X являются топологиями на X (проверьте):

- *антидискретная топология* $\tau_a = \{\emptyset, X\}$;
- *дискретная топология* $\tau_d = 2^X$;
- *топология Зарисского* $\tau_z = \big\{U \subset X : |X \setminus U| < \infty\big\} \cup \{\emptyset\}$, где $|M|$ обозначает мощность множества M.

Пример 1.15 (Индуцированная топология)**.** Пусть Y — произвольное подмножество топологического пространства X. Положим

$$\tau_Y = \{Y \cap U_\alpha : U_\alpha \in \tau_X\},$$

тогда τ_Y — топология, которая называется *индуцированной из* X. По умолчанию на каждом подмножестве $Y \subset X$ рассматривается именно такая топология.

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство топологических пространств. Рассмотрим дизъюнктное объединение $X = \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ (мы рассматриваем все X_α как непересекающиеся множества). *Топология* τ_X *дизъюнктного объединения* — это топология, в которой открытыми множествами являются всевозможные объединения $\sqcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ для $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — семейство топологических пространств и $X = \prod_i X_i$. Подмножество $U \subset X$ открыто в *топологии произведения*, если и только если U является объединением множеств вида $U_1 \times \cdots \times U_n$, где каждое U_i — открытое подмножество X_i.

1.2.2 Метрика и метрическая топология

Пусть X — множество. Функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ называется *метрикой на* X, если для любых $x, y, z \in X$ выполняются следующие условия:

- $\rho(x, y) \ge 0$, причем $\rho(x, y) = 0$, если и только если $x = y$ (положительная определенность);
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \ge \rho(x, z)$ (неравенство треугольника).

Множество X, на котором задана метрика ρ, называется *метрическим пространством*, а величина $\rho(x, y)$ — *расстоянием между точками* x *и* y. Часто расстояние между точками x и y обозначают $|xy|$, независимо от того, в каком метрическом пространстве они лежат.

Пример 1.16. На любом множестве X можно ввести метрику, положив расстояния между разными точками равным 1.

Пример 1.17. Для произвольных точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ положим

$$|xy| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Эта функция удовлетворяет всем аксиомам метрики (убедитесь в этом) и называется *стандартным* или *евклидовым расстоянием на* $\mathbb{R}^n$. Для $n = 1$ это расстояние между точками x и y равно $|x - y|$.

Пусть X — метрическое пространство, $x \in X$, а $r \geq 0$ и $s > 0$ — вещественные числа. Тогда

- *открытым шаром с центром в x и радиусом s* называется множество
$$U_s(x) = \{y \in X : |xy| < s\};$$
- *замкнутым шаром с центром в x и радиусом r* называется множество
$$B_r(x) = \{y \in X : |xy| \leq r\};$$
- *сферой с центром в x и радиусом r* называется множество
$$S_r(x) = \{y \in X : |xy| = r\}.$$

На метрическом пространстве X имеется стандартная *метрическая топология*, которая определяется так: $U \subset X$ считается открытым в этой топологии тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in U$ существует $s > 0$ такое, что $U_s(x) \subset U$. Для пустого множества это условие считается также выполненным.

Предложение 1.18. *В метрическом пространстве X*

(1) *открытый шар $U_s(x)$ — открытое множество*;

(2) *замкнутый шар $B_r(x)$ — замкнутое множество*;

(3) *сфера $S_r(x)$ — замкнутое множество.*

Замечание 1.19. По определению, каждое открытое множество в метрической топологии представляет собой объединение открытых шаров. В силу предложения 1.18, верно и обратное: каждое объединение открытых шаров является открытым множеством. Таким образом, приходим к эквивалентному описанию метрической топологии: *открытыми множествами в метрической топологии являются в точности всевозможные объединения открытых шаров* (*пустое множество — это объединение пустого семейства шаров*).

Пример 1.20. *Стандартная топология на* $\mathbb{R}^n$ — это соответствующая метрическая топология для евклидовой метрики, определенной в примере 1.17. Именно этой топологией пользуется математический анализ для определения сходимости последовательностей и непрерывности функций. Если не оговорено противное, то по умолчанию мы считаем, что топология на $\mathbb{R}^n$ именно стандартная.

Пример 1.21. *Стандартная топология на отрезке* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ может быть определена эквивалентным образом так (проверьте эквивалентность приведенных ниже определений):

- это — метрическая топология для стандартной функции расстояния между точками;
- это — топология, индуцированная на $[a, b]$ из стандартной топологии на $\mathbb{R}$.

1.2.3 База топологии

Пусть X — топологическое пространство. Семейство $\mathcal{B} \subset \tau_X$ называется *базой топологии* τ_X, если все непустые открытые множества пространства X могут быть получены объединением некоторых элементов из семейства $\mathcal{B}$ (если считать, что объединение элементов пустого семейства является пустым множеством, то в определении базы можно выкинуть требование непустоты открытого множества).

Пример 1.22. В метрическом пространстве X семейство открытых шаров $U_s(x) \subset X$ по всем $x \in X$ и $s > 0$ образуют базу метрической топологии.

Предложение 1.23. *Семейство $\mathcal{B} \subset 2^X$ является базой некоторой топологии, определенной на множестве X, если и только если выполняются следующие два условия*:

- $\cup_{B\in\mathcal{B}} B = X$;
- *для каждых пересекающихся $B, B' \in \mathcal{B}$ и любой точки $x \in B \cap B'$ существует $C \in \mathcal{B}$, для которого $x \in C \subset B \cap B'$.*

1.2.4 Хаусдорфовость

Окрестностью точки топологического пространства называется каждое открытое множество, содержащее эту точку. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым* или *отделимым*, если у каждой пары различных точек имеются непересекающиеся окрестности. Пустое и одноточечные множества с единственными возможными топологиями также относятся к хаусдорфовым пространствам.

Предложение 1.24. *Следующие топологии хаусдорфовы*:

(1) *дискретная*;

(2) *антидискретная на не более чем одноточечных множествах и только на них*;

(3) *Зарисского на конечных множествах и только на них*;

(4) *метрическая, в частности, стандартная на $\mathbb{R}^n$*;

(5) *индуцированная топология на подмножестве хаусдорфова пространства, в частности, на подмножестве $\mathbb{R}^n$ (про такое свойство говорят, что оно* ***наследуется*** *на подмножествах).*

1.2.5 Непрерывное отображение

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Говорят, что f *непрерывно в точке* $x \in X$, если для любой окрестности $V^{f(x)}$ существует окрестность U^x, для которой $f(U^x) \subset V^{f(x)}$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывного в каждой точке. Отображения $f\colon X \to Y$, не являющиеся непрерывными (в данной точке), называются *разрывными* (в этой точке).

Приведем еще два определения непрерывного отображения, эквивалентных предыдущему.

(**Второе определение непрерывности**) Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества открыт.

(**Третье определение непрерывности**) Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз каждого замкнутого множества замкнут.

Теорема 1.25. *Три приведенных выше определения непрерывного отображения топологических пространств эквивалентны.*

Предложение 1.26. *Следующие отображения непрерывны*:

(1) *тождественное отображение топологического пространства на себя*;

(2) *постоянное отображение, переводящее все топологическое пространство в некоторую точку другого топологического пространства*;

(3) *для подмножества Y топологического пространства X — отображение включения $i\colon Y \to X$, $i\colon y \mapsto y$ для всех $y \in Y$*;

(4) *композиция непрерывных отображений топологических пространств.*

Пример 1.27. Каждое отображение $f\colon X \to Y$ из произвольного топологического пространства X в антидискретное топологическое пространство Y непрерывно.

Пример 1.28. Каждое отображение $f\colon X \to Y$ дискретного топологического пространства X в любое топологическое пространство Y непрерывно.

Отображение в вещественную прямую $\mathbb{R}$ называется *функцией*, а в $\mathbb{R}^n$ — *векторнозначной функцией*.

Для точки $x \in X$ топологического пространства X назовем *базой окрестностей $\mathcal{B}_x$ точки x* каждый набор окрестностей x такой, что для любой окрестности U^x точки x существует $U \in \mathcal{B}_x$, удовлетворяющий $U \subset U^x$. Например, если X — метрическое пространство, то в качестве базы окрестностей x можно взять только те шары, у которых x — центр.

Предложение 1.29. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X$ — произвольная точка, а $\mathcal{B}_x$ и $\mathcal{B}_{f(x)}$ — любые базы окрестностей точек x и $f(x)$ соответственно. Тогда отображение f непрерывно в точке x, если и только если для любой окрестности $V \in \mathcal{B}_{f(x)}$ существует окрестность $U \in \mathcal{B}_x$, для которой $f(U) \subset V$.*

Следствие 1.30. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств и $x \in X$, тогда отображение f непрерывно в точке x, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $x' \in X$, $|xx'| < \delta$, выполняется $\bigl|f(x)f(x')\bigr| < \varepsilon$.*

Для декартова произведения $X = \prod_i X_i$ определены *канонические проекции* $\pi_i\colon X \to X_i$, заданные так: $\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$. Если $f\colon Y \to X$ — отображение, то композиции $f_i := \pi_i \circ f$ называется *координатным отображением* f.

Предложение 1.31. *Пусть $\{X_i\}_{i=1}^n$ — топологические пространства и $X = \prod_i X_i$. Тогда*

(1) *каждая каноническая проекция π_i — непрерывное отображение;*

(2) *отображение $f\colon Y \to X$ из топологического пространства Y непрерывно, если и только если непрерывны все координатные отображения f_i этого f.*

Литература к семинару 1

[1] Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. *Курс наглядной геометрии и топологии.* Серия: Классический учебник МГУ. – Москва, изд-во URSS, Леланд, 2014.

[2] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.

[3] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979.

[4] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.* В серии: Классический университетский учебник. (Учебник). - Москва, изд-во “Физико-математическая литература”, МАИК “Наука/Интерпериодика”, 2004. Издание 2-е, исправленное и дополненное. Москва, URSS, ЛЕЛАНД, 2016.

Упражнения к семинару 1
“Комбинаторные графы. Элементы топологии (часть 1)”

Упражнение 1.1. Покажите, что в любой компании имеется не менее двух человек, у которых количества знакомых одинаковы.

Упражнение 1.2.

(1) Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).

(2) Покажите, что если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то их можно соединить маршрутом.

(3) Турист, который приехал в Москву на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на Манежной площади, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

Упражнение 1.3. В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

Упражнение 1.4. Известно, что в компании, состоящей не менее чем из четырех человек, каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что каждый из них будет сидеть рядом со своими знакомыми.

Упражнение 1.5.

(1) В парке “Лотос” невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

(2) Вершина степени 1 называется *висячей*. Связный граф без циклов называется *деревом*. Докажите, что в каждом дереве, содержащем хотя бы одно ребро, имеется висячая вершина.

Упражнение 1.6.

(1) Вычислите соотношение между числом вершин и ребер произвольного дерева.

(2) Администрация парка “Лотос” решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик должен будет освещаться четырьмя светильниками, а алея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков.

Упражнение 1.7. *Насыщенным углеводородом* называется соединение углерода C, имеющего валентность 4, и водорода H, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

Упражнение 1.8. Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

Упражнение 1.9. На пир при дворе короля Артура собрались рыцари, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Доказать, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

Упражнение 1.10 (Аксиомы топологии)**.** Проверьте, что семейства множеств, которые мы называли

(1) антидискретной топологией,

(2) дискретной топологией,

(3) топологией Зарисского,

(4) индуцированной топологией,

(5) топологией дизъюнктного объединения,

(6) топологией декартова произведения,

(7) метрической топологией

действительно удовлетворяют всем аксиомам топологии.

Упражнение 1.11 (Открытые и замкнутые множества)**.** Докажите, что в метрическом пространстве X

(1) открытый шар $U_s(x)$ — открытое множество*;*

(2) замкнутый шар $B_r(x)$ — замкнутое множество*;*

(3) сфера $S_r(x)$ — замкнутое множество.

Упражнение 1.12 (База)**.** Покажите, что семейство $\mathcal{B} \subset 2^X$ является базой некоторой топологии, определенной на множестве X, если и только если выполняются следующие два условия:

- $\cup_{B\in\mathcal{B}} B = X$;
- для каждых пересекающихся $B, B' \in \mathcal{B}$ и любой точки $x \in B \cap B'$ существует $C \in \mathcal{B}$, для которого $x \in C \subset B \cap B'$.

Упражнение 1.13 (Хаусдорфовость)**.** Докажите, что следующие топологии хаусдорфовы:

(1) дискретная;

(2) антидискретная на не более чем одноточечных множествах и только на них;

(3) Зарисского на конечных множествах и только на них;

(4) метрическая, в частности, стандартная на $\mathbb{R}^n$;

(5) индуцированная топология на подмножестве хаусдорфова пространства, в частности, на подмножестве $\mathbb{R}^n$.

(6) Покажите, что топология Зарисского на бесконечных множествах не хаусдорфова.

Упражнение 1.14 (Непрерывные отображения)**.** Докажите следующие утверждения.

(1) Каждое отображение $f\colon X \to Y$ из произвольного топологического пространства X в антидискретное топологическое пространство Y непрерывно.

(2) Каждое отображение $f\colon X \to Y$ дискретного топологического пространства X в любое топологическое пространство Y непрерывно.

(3) Рассмотрим на вещественной прямой $\mathbb{R}$ семейство ее подмножеств $\mathcal{B}$, состоящее из всевозможных лучей $(a, +\infty)$. Докажите следующие утверждения.

   (a) Семейство $\mathcal{B}$ — база соответствующей топологии τ. Обозначим X топологическое пространство, равное $\mathbb{R}$ с топологией τ.

   (b) Отображение $f\colon X \to X$, $f\colon x \mapsto 2x$, — непрерывно.

   (c) Отображение $g\colon X \to X$, $g\colon x \mapsto -x$, — разрывно в каждой точка.

(4) Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X$ — произвольная точка, а $\mathcal{B}_x$ и $\mathcal{B}_{f(x)}$ — любые базы окрестностей точек x и $f(x)$ соответственно. Тогда отображение f непрерывно в точке x, если и только если для любой окрестности $V \in \mathcal{B}_{f(x)}$ существует окрестность $U \in \mathcal{B}_x$, для которой $f(U) \subset V$.

(5) Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств и $x \in X$, тогда отображение f непрерывно в точке x, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $x' \in X$, $|xx'| < \delta$, выполняется $\bigl|f(x)f(x')\bigr| < \varepsilon$.

(6) Пусть X — метрическое пространство, и $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — его метрика. Покажите, что функция ρ непрерывна.

(7) Пусть даны топологические пространства X_α, $\alpha \in I$, и Y. Тогда отображение $f\colon \sqcup_{\alpha\in I} X_\alpha \to Y$ непрерывно, если и только если все ограничения $f|_{X_\alpha}$ непрерывны.

(8) Пусть $\{X_i\}_{i=1}^n$ — топологические пространства и $X = \prod_i X_i$. Тогда
   (a) каждая каноническая проекция π_i — непрерывное отображение;
   (b) отображение $f\colon Y \to X$ из топологического пространства Y непрерывно, если и только если непрерывны все координатные отображения f_i этого f.