Упражнения к семинару 1 “Комбинаторные графы”

Упражнение 1.1. Покажите, что в любой компании имеется не менее двух человек, у которых количества знакомых одинаковы.

Упражнение 1.2.

(1) Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).

(2) Покажите, что если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то их можно соединить маршрутом.

(3) Турист, который приехал в Москву на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на Манежной площади, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

Упражнение 1.3. В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

Упражнение 1.4. Известно, что в компании, состоящей не менее чем из четырех человек, каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что каждый из них будет сидеть рядом со своими знакомыми.

Упражнение 1.5.

(1) В парке “Лотос” невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

(2) Вершина степени 1 называется *висячей*. Связный граф без циклов называется *деревом*. Докажите, что в каждом дереве, содержащем хотя бы одно ребро, имеется висячая вершина.

Упражнение 1.6.

(1) Вычислите соотношение между числом вершин и ребер произвольного дерева.

(2) Администрация парка “Лотос” решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик должен будет освещаться четырьмя светильниками, а алея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков.

Упражнение 1.7. *Насыщенным углеводородом* называется соединение углерода C, имеющего валентность 4, и водорода H, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

Упражнение 1.8. Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

Упражнение 1.9. На пир при дворе короля Артура собрались рыцари, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Доказать, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

1.1 Основные определения и предварительные результаты

Для произвольного множества V через V_k будем обозначать множество всех k-элементных подмножеств множества V. Множество V_2 совпадает с множеством неупорядоченных пар различных элементов V. Множество V_1 состоит из одноэлементных подмножеств множества V, его можно отождествить с V. Если множество V конечно и состоит из n элементов, то V_k пусто при $k > n$.

Определение 1.1. *Комбинаторным графом* G или просто *графом* называется тройка $G = (V, E, \partial)$, состоящая из множеств V, E и отображения $\partial\colon E \to V_1 \cup V_2$. Элементы из V называются *вершинами* графа G, элементы из E — *ребрами* графа G, а ∂ — *отображением инцидентности*.

В теории графов принята следующая терминология:

- если $v \in \partial(e)$, то говорят, что вершина v и ребро e *инцидентны*;
- если $\partial(e) = \{v, w\}$, то говорят, что вершины v и w *смежны*, или же, что они *соединены ребром* e;
- ребра e и e' называются *смежными*, если $\partial(e) \cap \partial(e') \neq \emptyset$;
- ребро, инцидентное ровно одной вершине, называется *петлей*;
- если некоторой паре вершин инцидентно более одного ребра, то все эти ребра называются *кратными*;
- если некоторой вершине инцидентно более одной петли, то все эти петли также называются *кратными*.

Кратностью ребра e называется количество всех ребер e', для которых $\partial(e') = \partial(e)$. Ясно, что ребро e не является кратным тогда и только тогда, когда его кратность равна 1.

Определение 1.2. Граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

Замечание 1.3. Чтобы задать простой граф, достаточно задать множество вершин V и некоторое подмножество E в V_2. Для простого графа $G = (V, E)$ ребро $e = \{v, w\} \in E$ удобно обозначать через vw или wv.

Лемма 1.4 (Лемма о рукопожатиях)**.** *Некоторые участники конференции, здороваясь, пожимают друг другу руки. Тогда число участников, каждый из которых совершил нечетное число рукопожатий, — четно.*

Решение этой задачи использует понятие степени вершины.

Определение 1.5. Пусть v — произвольная вершина некоторого графа. Тогда *степенью* $\deg v$ этой вершины называется количество инцидентных v ребер, не являющихся петлями, плюс удвоенное количество петель, инцидентных v.

Определение 1.6. *Маршрутом, соединяющим вершины* v_0 *и* v_k, называется последовательность

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k,$$

где v_i — вершины графа, а e_i — его ребра, причем для каждого i ребро e_i соединяет вершины v_{i-1} и v_i. Маршрут называется *замкнутым*, если $v_0 = v_k$. В обоих рассмотренных случаях число k называется *длиной маршрута*. Если в маршруте все вершины различны, то такой маршрут называется *путем*. Если же в замкнутом маршруте различны все ребра e_i, то такой маршрут называется *циклом*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить некоторым маршрутом.

Замечание 1.7. Если G — простой граф, то маршрут из определения 1.6 записывается как $v_0 v_1 \cdots v_k$ (без указания ребер и без разделения запятыми).

Определение 1.8. Цикл в связном графе называется *эйлеровым* или *обходом графа*, если он содержит все ребра графа. Граф, для которого существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

Теорема 1.9 (Критерий эйлеровости графа)**.** *Связный граф эйлеров, если и только если степени всех его вершин четны и положительны.*

Определение 1.10. Цикл называется *простым*, если все его вершины (кроме первой и последней) различны. Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым*. Граф, содержащий некоторый гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым*.

Предложение 1.11. *При изучении гамильтоновых графов можно ограничиться простыми графами.*

Полным графом K_n называется простой граф с n вершинами, в котором каждая пара вершин смежна, т.е. любые две различные вершины соединены единственным ребром.

Теорема 1.12 (Дирак)**.** *Пусть* $G = (V, E)$ — *простой граф с* $n \geq 3$ *вершинами. Предположим, что степени вершин графа* G *не меньше* $n/2$. *Тогда граф* G *гамильтонов, в частности, граф* G — *связный.*

Доказательство. См. [3]. □

Рекомендуемая литература к семинару 1

[1] Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. *Курс наглядной геометрии и топологии.* Серия: Классический учебник МГУ. – Москва, изд-во URSS, Леланд, 2014.

[2] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.

[3] `http://dfgm.math.msu.su/files/0specdfgm/Tuzhilin/Geometry2.pdf`