## **УПРАЖНЕНИЯ** (ГРАФЫ)

**У1.1.** Доказать, что сумма степеней вершин любого графа равна удвоенному количеству его ребер. (В частности, число вершин нечетной степени всегда четно.)

**У1.2.** Доказать, что у дерева, содержащего хотя бы одно ребро, всегда есть вершина степени 1.

Зад. 1.3 **У1.3.** Доказать, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число его вершин В на 1 больше, чем, число его ребер Р.

**У1.4.** Перечислить все деревья с 6 вершинами.

Зад. 1.4 **У1.5.** Доказать, что максимальное число ребер, которое можно удалить из связного графа $G$ так, чтобы он остался связным, равно $1 - \chi(G)$.

Зад. 1.5 **У1.6.** Доказать, что любой граф можно вложить в (трехмерное) пространство. Более того, если граф не содержит петель и кратных ребер, то его можно вложить в пространство так, что образ каждого ребра будет прямолинейным отрезком.

**У1.7.** Цикл, проходящий по всем ребрам графа, называется *эйлеровым.* Доказать, что в графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

**У1.8.** Доказать, что вершины графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы вершины, соединенные ребром, были раскрашены в разные цвета, тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Зад. 1.1 **У1.9.** Доказать, что кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ непрерывна (в смысле определения 1.2) тогда и только тогда, когда непрерывны функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, где $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

**У1.10.** Доказать, что функция непрерывна на графе тогда и только тогда, когда ее ограничение на каждое ребро является непрерывной функцией.

Зад. 1.2 **У1.11.** Доказать, что если в качестве подмножества множества $M$ в лемме 1.2 взять замкнутый круг, то первая точка на кривой, принадлежащая этому кругу (о существовании которой говорит лемма), лежит на граничной окружности этого круга.

**У1.12.** Доказать, что отрезок нельзя представить в виде объединения двух его открытых непустых непересекающихся подмножеств.

**У1.13.** Для любого подмножества плоскости $A$ расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^2$ до $A$ определяется формулой $d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$ (где $\rho$ — обычное евклидово расстояние между точками). Доказать, что функция $f(x) = d(x, A)$, заданная на плоскости, непрерывна.

**У1.14.** Доказать, что пара радиусов, проведенных в круге, разбивают его ровно на две компоненты линейной связности.

Зад. 1.7 **У1.15.** Доказать, используя теорему о промежуточном значении, что граница выпуклого многоугольника разбивает плоскость ровно на две компоненты. [Под многоугольником здесь можно понимать пересечение конечного числа замкнутых полуплоскостей, причем предполагается, что это пересечение содержит хотя бы одну точку вместе с ее окрестностью. Граница многоугольника состоит из тех частей прямых, задающих эти полуплоскости, которые принадлежат многоугольнику.]

Зад. 1.8 **У1.16.** Доказать, что любая локально постоянная функция на отрезке равна константе.

Зад. 1.9 **У1.17.** Доказать, что $K_5$ не планарен, с помощью следствия 1.1 из теоремы Жордана для ломаных (т.е. не используя формулу Эйлера).

**У1.18.** Доказать, что для плоского графа без петель и кратных ребер справедливы неравенства $\frac{3}{2}\text{Г} \leq \text{Р} \leq 3\text{В} - 6$.

**У1.19.** Доказать, что в планарном графе без петель и кратных ребер есть вершина степени $\leq 5$.

**У1.20.** Доказать, что граф без петель и кратных ребер, у которого 10 вершин и все они имеют степень 5, не планарный.

Зад. 1.6 **У1.21.** Завершить доказательство теоремы 1.1, рассмотрев случай, когда граф имеет петли.

* **У1.22.** Доказать усиленную версию теоремы 1.1, где вместо «ломаными» сказано «отрезками».

* **У1.23.** Доказать теорему о пяти красках: вершины любого планарного графа без петель можно раскрасить в пять цветов так, чтобы вершины, соединенные ребром, были раскрашены в разные цвета.

* **У1.24.** Описать все плоские графы, у которых вершины имеют одну и ту же степень, а грани ограничены одним и тем же числом ребер.

**У1.25.** Доказать, что следующие графы попарно не гомеоморфны: отрезок; петля (граф с одной вершиной и одним ребром); граф с одной вершиной степени 3 и тремя ребрами, сходящимися в этой вершине.

**У1.26.** Доказать, что при гомеоморфизме графов вершина степени $k$ переходит в вершину степени $k$, если $k \neq 2$

Зад. **??** **У1.27.** Доказать следующее обобщение формулы Эйлера: для любого плоского графа верно соотношение $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 1 + k$, где $k$ — число компонент графа.