1. ГРАФЫ

Графы можно рассматривать как простейшие геометрические объекты. Принято считать, что начало теории графов положил Л. Эйлер, предложив строгое решение широко известной в то время задачи о семи кёнигсбергских мостах. Он изобразил части суши точками, а мосты линиями, соединяющими эти точки, т.е. представил рассматриваемые объекты в виде простой условной схемы, отражающей всю необходимую информацию. Подобный подход оказался очень удобным и в дальнейшем стал использоваться в теории электрических цепей, химии и многих прикладных математических задачах. Сам термин «граф» и соответствующий раздел математики «теория графов» появились значительно позднее (уже в XX веке).

1.1. Комбинаторное описание графов. Обычно в терминах графов формулируют задачи о наборах дискретных объектов, связанных какими-то отношениями. Сами объекты называют *вершинами* графа, а связи между ними — *ребрами*, соединяющими эти вершины. Граф удобно представлять себе как набор точек-вершин, соединенных линиями-ребрами, однако при таком представлении важно не конкретное «изображение» графа, а лишь то, какие вершины соединены ребрами. Поэтому граф можно задавать как некоторое множество вершин V (которое мы всегда будем предполагать конечным) и некоторый набор неупорядоченных пар вершин, задающих ребра. При этом, если такой набор содержит одну и ту же пару несколько раз, то соответствующие ей ребра называют *кратными*, а если пара состоит из одинаковых вершин, то говорят что соответствующее ребро является *петлей.*

При таком комбинаторном описании графов два графа считаются «одинаковыми», если существует биекция Φ множества вершин V_1 одного графа в множество вершин V_2 другого, при которой для каждой пары вершин $a, b \in V_1$, задающих ребро первого графа, соответствующая пара вершин $\Phi(a), \Phi(b) \in V_2$ задает ребро второго, и то же самое верно для отображения $\Phi^{-1} : V_2 \to V_1$ (при этом, если пара a, b встречается k раз, т.е. задает ребро кратности k, то пара $\Phi(a), \Phi(b)$ задает ребро той же кратности k). Графы, для которых существует такое отображение Φ, называются *изоморфными*, а само отображение Φ называется *изоморфизмом* графов. Если занумеровать вершины обоих графов, то изоморфизм между ними можно представлять себе просто как перенумерацию вершин первого графа, в результате которой получается второй граф.

1.2. Топологическое описание графов. Для многих целей достаточно комбинаторного описания графов, но в данном курсе, говоря о графах, мы будем рассматривать их как «геометрические» или, скорее, «топологические» объекты. Это означает, что, во-первых, мы хотим рассматривать граф как множество точек: точки-вершины и ребра, которые тоже состоят из точек (в отличие от комбинаторного описания, где никаких точек на ребре нет — это лишь пара вершин![1]), а во-вторых, нам надо определить, что значит «непрерывное» отображение графа (на плоскость, в пространство, в другой граф и т. п.).

Неформально говоря, отображение является непрерывным, если оно близкие точки переводит в близкие. Напомним, как это понятие формализуется в математическом анализе, например, для отображений $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (т.е. обычных функций): *отображение* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *называется непрерывным в точке* $x \in \mathbb{R}$, *если для любой окрестности* W *точки* $f(x)$ *существует такая окрестность* U *точки* x, *что* $f(U) \subset W$. В математическом анализе приведенное определение часто формулируется «на языке ε–δ», т.е. в качестве окрестностей точки на прямой рассматриваются интервалы с центром в этой точке. Однако приведенное выше определение (где нет упоминания про ε и δ) можно дословно повторить для отображений произвольных множеств, если определить для них, что такое «окрестность точки» (точками мы называем здесь просто элементы множества).[2]

Итак, помимо задания графа как множества точек, нам надо определить, какие множества для каждой точки графа называть ее окрестностями. Это можно сделать разными

---

[1]Например, для простейшего графа, имеющего только одну вершину и одно ребро (петлю), можно рассмотреть естественное (с геометрической точки зрения) отображение этого графа в себя, «меняющее ориентацию» ребра, а на комбинаторном языке описать этот эффект не получается.

[2]Иногда то понятие, которое мы сейчас обсуждаем, называют «открытой окрестностью» точки. В дальнейшем мы обычно будем говорить просто «окрестность» (например, для интервала на прямой).

способами. Например, можно представлять себе граф как набор точек-вершин в пространстве, соединенных непрерывными кривыми-ребрами, которые не имеют точек пересечения или самопересечения кроме концевых[3]. При таком представлении графа *окрестностью* любой его точки (в графе) естественно назвать пересечение обычной шаровой окрестности этой точки (в пространстве) с самим графом. Такое описание графа наглядно и соответствует интуитивному представлению о графе как о подмножестве в обычном евклидовом пространстве, однако имеется некоторое неудобство, которое заключается в следующем. Ясно, что любой граф, рассматриваемый как набор точек-вершин, соединенных кривыми в пространстве, однозначно определяет «комбинаторный граф» (точки-вершины образуют множество V, а начало и конец каждой кривой задают пару вершин), но данный комбинаторный граф мы можем представить в виде точек-вершин, соединенных кривыми в пространстве, многими способами. Будут ли все эти «реализации» комбинаторного графа одинаковы в каком-то естественном смысле?

Мы не будем развивать этот подход. Вместо этого ниже предложен другой способ топологического описания графов, при котором граф рассматривается не как подмножество в евклидовом пространстве, а как результат «склейки» отрезков-ребер по концевым точкам.[4]

Замечание 1.1. Говоря об «отрезке», мы будем понимать под этим некоторый отрезок $[a, b]$ обычной числовой прямой $\mathbb{R}$. При этом нам не важно, какие значения на числовой прямой имеют его концы $a, b \in \mathbb{R}$ (например, можно считать, что это отрезок $[0, 1]$). Важны лишь те свойства отрезка, которые уже известны из курса математического анализа: любая последовательность точек на отрезке имеет на нем предельную точку; любое подмножество отрезка имеет супремум и инфимум (которые принадлежат этому отрезку); любая непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения, а также достигает минимума и максимума; и т. п. В частности, для каждой точки отрезка $[a, b]$ определено понятие *окрестности*. А именно, для любой внутренней точки $x \in (a, b)$ ее окрестностью будем называть произвольный интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset [a, b]$, а для концевых точек a и b их окрестностями называются полуинтервалы вида $[a, a + \varepsilon) \subset [a, b]$ и $(b - \varepsilon, b] \subset [a, b]$ соответственно, где $\varepsilon > 0$. Отметим также, что если мы говорим о наборе таких «абстрактных» отрезков, то изначально они никак не связаны между собой, т.е. можно считать, что каждый из них взят из «своей» прямой $\mathbb{R}$.

Дадим формальное определение графа как некоторого множества точек, для каждой из которых заданы подмножества, являющиеся ее окрестностями в этом графе.

Определение 1.1. Пусть V — конечное множество (точек), E — конечный набор отрезков, а ∂ — произвольное отображение из множества концов этих отрезков в множество V. *Граф* G, определенный этими данными, есть множество, элементами которого являются все точки из V (называемые *вершинами* графа) и все внутренние точки всех отрезков из E (называемые *внутренними точками ребер* графа). Окрестность внутренней точки ребра графа G определим как ее окрестность в соответствующем отрезке, а окрестность вершины $v \in V$ определим как объединение самой вершины v и окрестностей всех точек из ее прообраза $\partial^{-1}(v)$ (т.е. окрестностей всех тех концов отрезков, которые отображение ∂ переводит в эту вершину).

Отображение ∂ из определения 1.1 можно рассматривать как «приклеивание» отрезков к точкам-вершинам, в результате чего и образуется некоторый граф, каждое ребро которого состоит из внутренних точек приклеиваемого отрезка и вершин, к которым приклеены его концы. Отметим, что если в точку $v \in V$ при отображении ∂ ничего не переходит, то ее окрестность в графе состоит только из самой точки v.

[3]Как будет показано ниже, не любой граф можно изобразить так на плоскости; см. также задачу 1.5

[4]Отметим, что оба указанных подхода к топологическому описанию графов являются частными случаями общих топологических конструкций: представление графа в виде точек, соединенных кривыми в пространстве, позволяет ввести на нем «индуцированную топологию», а склейка графа из отрезков означает введение «фактор-топологии». Вообще, раздел математики, в котором определяются и изучаются непрерывные отображения «произвольных» пространств, называется топологией, и ему будет посвящен отдельный курс в следующем семестре. Тем не менее, позже (см. тему «Двумерные поверхности») мы обсудим чуть более подробно основные определения и конструкции топологии.

1.3. Непрерывные отображения графов. Как уже отмечалось, обычное определение непрерывности функции из курса математического анализа (см. начало раздела 1.2) можно дословно повторить для отображений произвольных множеств, если в них уже определены окрестности точек. Правда, следует отметить, что для того, чтобы полученное определение непрерывности обладало «хорошими» свойствами, нужно наложить некоторые условия на множество окрестностей каждой точки. Подробно этот вопрос будет рассматриваться для произвольных пространств в следующем семестре.[5] Нам же пока будет достаточно наложить условие, сформулированное в следующем определении (повторяющем определение из математического анализа, но в более общей ситуации).

Определение 1.2. Пусть X и Y — некоторые множества в которых для каждой точки p задан набор подмножеств (каждое из которых содержит точку p), называемых ее *окрестностями*, так что пересечение любых двух окрестностей точки p тоже является окрестностью точки p. Тогда отображение $F : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности W точки $F(x)$ (в Y) существует такая окрестность U точки x (в X), что $F(U) \subset W$. Отображение называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке.

Отметим, что для всех обсуждавшихся выше примеров множеств с заданными на них окрестностями (прямая, интервал, отрезок, граф) пересечение окрестностей точки является ее окрестностью, т.е. указанное в определении 1.2 условие выполнено.

Далее мы будем рассматривать отображения графов в плоскость (или пространство). Определение окрестности точки на плоскости (и в пространстве) полностью аналогично определению окрестности точки на прямой. А именно, окрестностью точки p будем называть множество точек, расстояние от которых до точки p меньше r, где r — некоторое фиксированное положительное число. Такое множество $B_{p,r} = \{x \mid \rho(x,p) < r\}$ в некотором пространстве, в котором определено расстояние ρ между точками, обычно называют *диском* или *шаром* радиуса r с центром в точке p. В случае плоскости мы также будем называть его *кругом*.

Введем еще два важных понятия, которые можно использовать в любом множестве X, в котором определены окрестности точек. Подмножество O множества X называется *открытым*, если вместе с каждой точкой $x \in O$ оно содержит и некоторую окрестность этой точки. Подмножество K множества X называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus K$ является открытым. Ясно, что условие замкнутости подмножества K можно переформулировать и так: для любой точки $x \notin K$ существует окрестность точки x, не пересекающаяся с K.

Например, легко показать, что круг $B_{p,r} = \{x \mid \rho(x,p) < r\}$ на плоскости является открытым подмножеством, а множество $\overline{B}_{p,r} = \{x \mid \rho(x,p) \le r\}$ — замкнутым. В связи с этим мы будем также называть круг $B_{p,r}$ *открытым кругом*, а $\overline{B}_{p,r}$ — *замкнутым кругом*.

После того как мы определили окрестности точек в графе и на плоскости, мы можем рассматривать непрерывные отображения графа в плоскость в соответствии с определением 1.2. Прежде чем подробнее исследовать такие отображения, сделаем несколько замечаний о непрерывных отображениях отрезка (который также можно рассматривать как пример графа с двумя вершинами и одним ребром, соединяющим их).

1.4. Простейшие свойства непрерывных кривых. *Непрерывной кривой* на плоскости или в пространстве называется непрерывное отображение отрезка соответственно в плоскость или пространство (отметим, что точно так же можно определить непрерывную кривую в графе или любом другом пространстве, в котором определены окрестности точек).

Если непрерывная кривая задана как отображение γ отрезка $[a,b]$ (см. замечание 1.1), то говорят, что *параметр* кривой меняется от a до b, а точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ называются соответственно *начальной* и *конечной* точками кривой γ. Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то кривая называется *замкнутой*.

В соответствии с данным определением, кривая — это отображение, а получающаяся в результате «линия» — это образ кривой. Тем не менее, удобно говорить (и мы часто будем так делать), например, что «точка p лежит на кривой», что «кривая проходит через

[5] см. также раздел **??** в теме «Двумерные поверхности».

точку p», что «кривая пересекает какое-то множество» и т. п., подразумевая при этом, что речь идет об образе кривой.

Если на плоскости заданы координаты x_1, x_2 (например, декартовы), то любую кривую $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ можно задать парой функций $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

Задача 1.1. *Доказать, что кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ непрерывна (в смысле определения 1.2) тогда и только тогда, когда непрерывны функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, где $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$.*

Таким образом, из задачи 1.1 следует, что многие свойства непрерывной кривой на плоскости сразу следуют из свойств непрерывных функций на отрезке. Например, из теоремы о том, что непрерывная функция на отрезке ограничена, следует, что образ непрерывной кривой является ограниченным множеством на плоскости (т.е. содержится в некотором круге конечного радиуса). Другой пример: из теоремы о промежуточном значении следует, что непрерывная кривая, начальная и конечная точки которой лежат в разных полуплоскостях, определенных некоторой прямой, пересекает эту прямую. Точно так же устанавливается, что аналогичные свойства имеют и непрерывные кривые в пространстве.

Нам понадобится также следующее важное свойство непрерывной кривой.

Лемма 1.1. *Образ непрерывной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ является замкнутым подмножеством плоскости.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой точки $p \in \mathbb{R}^2$, не принадлежащей образу кривой γ, существует ее окрестность U, которая не пересекается с образом этой кривой. Действительно, рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функцию f, принимающую в каждой точке $t \in [a, b]$ значение, равное расстоянию от точки p до точки $\gamma(t)$. Эта функция положительна и непрерывна (последнее легко проверить, записав функцию $f(t)$ с помощью декартовых координат x_1, x_2 на плоскости). Значит функция f достигает своего минимума на отрезке $[a, b]$. Поэтому для любого положительного числа ε, которое меньше этого минимума, открытый круг радиуса ε с центром в точке p можно взять в качестве искомой окрестности U. $\square$

Отметим, что утверждение леммы 1.1 справедливо и для кривой в пространстве, причем его доказательство точно такое же.[6]

Докажем еще одно свойство непрерывной кривой, которое мы часто будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1.2. *Пусть M — замкнутое подмножество плоскости, а $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — непрерывная кривая, для которой $\gamma(a) \notin M$ и $\gamma(b) \in M$. Тогда на кривой γ существует «первая точка», принадлежащая M, т.е. существует такое значение параметра $t_0 \in [a, b]$, что $\gamma(t_0) \in M$ и $\gamma(t) \notin M$ при всех $t \in [a, t_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим подмножество $T = \{t \in [a, b] \mid \gamma(t) \in M\}$ отрезка $[a, b]$ (на котором меняется параметр кривой). Множество T не пусто (поскольку содержит точку b) и, значит, у него есть инфимум (как и у любого ограниченного подмножества прямой). Обозначим $\inf T$ через t_0 и покажем, что для t_0 выполнены оба условия, указанные в формулировке леммы.

То, что $\gamma(t) \notin M$ при всех $t \in [a, t_0)$, сразу следует из того, что t_0 — нижняя грань для тех t, при которых $\gamma(t) \in M$. Осталось показать, что $\gamma(t_0) \in M$. Предположим, что $\gamma(t_0) \notin M$ (в частности, тогда $t_0 < b$). Так как M — замкнутое подмножество, то у точки $\gamma(t_0)$ существует окрестность W (в плоскости), не пересекающаяся с M. Далее, из определения непрерывности кривой следует, что у точки t_0 существует окрестность U (на отрезке), для которой $\gamma(U) \subset W$. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$ точка $\gamma(t)$ не принадлежит M, но тогда любое такое t будет нижней гранью множества T, что противоречит тому, что t_0 — точная нижняя грань множества T. $\square$

[6] Отметим также, что доказательство леммы 1.1 можно дословно повторить для любого метрического пространства. Более того, это утверждение — частный случай общего утверждения о замкнутости непрерывного образа компактного пространства, которое будет обсуждаться в геометрических курсах следующих семестров.

Таким образом, если начальная точка непрерывной кривой лежит вне замкнутого подмножества, а конечная лежит в нем, то на этой кривой есть первая точка, в которой кривая «входит» в это подмножество. Лемму 1.2, очевидно, можно переформулировать и таким образом: *если начальная точка непрерывной кривой лежит в замкнутом подмножестве, а конечная — вне его, то на этой кривой есть последняя точка, принадлежащая этому подмножеству, т.е. точка, в которой кривая «выходит» из него.* Важное отметить следующее: в обоих случаях мы говорим о первой или последней точке, принадлежащей ***замкнутому*** подмножеству, и без условия замкнутости утверждение, конечно же, неверно.

Задача 1.2. *Доказать, что если в качестве подмножества M в лемме 1.2 взять замкнутый круг, то первая точка на кривой, принадлежащая этому кругу (о существовании которой говорит лемма), лежит на граничной окружности этого круга.*

1.5. Некоторые понятия, связанные с графами. Выше мы описали два подхода (комбинаторный и топологический) к определению графа. Многие понятия, связанные с графами, можно излагать как на одном, так и на другом языке.

Например, *степенью вершины* v графа G (обозначение $\deg v$) называется либо (при комбинаторном описании — раздел 1.1) количество раз, которое вершина v входит в набор пар вершин, задающих ребра графа G, либо (при топологическом описании — раздел 1.2, определение 1.1) число прообразов вершины v при отображении ∂, задающем приклейку отрезков. Ясно, что эти определения эквивалентны, т.е. задают для данной вершины v одно и то же число $\deg v$.

Мы в основном будем использовать топологическое описание графа, но при желании определяемые понятия легко «перевести» и на комбинаторный язык.

Путем в графе G называется непрерывная кривая $\gamma : [a, b] \to G$, начальная и конечная точки которой являются вершинами графа G. Если начальная и конечная точки пути совпадают, то путь называется *замкнутым.*

Отметим, что обычно достаточно рассматривать лишь такие пути в графе, для которых соответствующую кривую можно разбить на части, каждая из которых является взаимнооднозначным отображением отрезка на ребро графа. В этом случае путь удобно задавать (в комбинаторном смысле) как последовательность вершин и ребер.

Граф G называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем.

Замкнутый путь в графе называется *циклом*, если все его точки самопересечения являются вершинами графа. (При этом мы не будем называть циклом «тривиальный» замкнутый путь, образ которого состоит из одной вершины.)

Связный граф, в котором нет циклов, называется *деревом.*

Задача 1.3. *Доказать, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число его вершин* В *на* 1 *больше, чем число его ребер* Р.

Для любого графа G, имеющего В вершин и Р ребер, число $\chi(G) = \text{В} - \text{Р}$ называется его *эйлеровой характеристикой.*

Задача 1.4. *Доказать, что максимальное число ребер, которое можно удалить из связного графа G так, чтобы он остался связным, равно $1 - \chi(G)$.*

Непрерывное отображение графа в плоскость или пространство называется *вложением*, если никакие две различные точки при этом отображении не переходят в одну точку. Граф называется *планарным*, если для него существует вложение в плоскость. Образ планарного графа при вложении в плоскость называется *плоским графом* (это словосочетание надо воспринимать как один термин, поскольку это не характеристика графа, а новый объект: граф вместе с его вложением).

Не любой граф можно вложить в плоскость. Например, как будет показано ниже, графы, изображенные на рис. 1.1, не являются планарными (см. также раздел 1.11, где приведен критерий планарности графа).

Задача 1.5. *Доказать, что любой граф можно вложить в (трехмерное) пространство. Более того, если граф не содержит петель и кратных ребер, то его можно вложить в пространство так, что образ каждого ребра будет прямолинейным отрезком.*

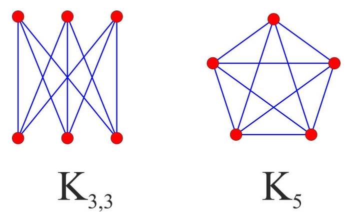

Рис. 1.1. Графы K_5 и $K_{3,3}$

1.6. Изображение планарных графов с помощью ломаных. Следующее утверждение показывает, что любой планарный граф можно «нарисовать» на плоскости так, что его ребра изобразятся ломаными.

Теорема 1.1. *Если существует (непрерывное) вложение графа в плоскость, то существует его вложение в плоскость, при котором образы ребер являются ломаными.*

Доказательство. Пусть G — некоторый планарный граф без петель (см. ниже задачу 1.6). Рассмотрим произвольное непрерывное вложение графа в плоскость $F : G \to \mathbb{R}^2$ и опишем процесс изменения этого вложения, после которого все ребра изобразятся на плоскости конечнозвенными ломаными.

Первый шаг этого изменения состоит в изменении вложения F в окрестности каждой из вершин графа.

Рассмотрим для каждой вершины v графа G замкнутый круг с центром в точке $F(v)$, не пересекающийся с образами ребер графа G, которые не содержат вершину v. Это можно сделать, так как по лемме 1.1 образы всех ребер являются замкнутыми подмножествами плоскости и их конечное число. Затем уменьшим, если нужно, построенные круги так, чтобы они попарно не пересекались. Обозначим построенные в результате замкнутые круги через D_v.

Теперь рассмотрим некоторую вершину v графа G и некоторое ребро, одним из концов которого является вершина v. Ограничение вложения F на это ребро можно рассматривать как непрерывную кривую $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, для которой $\gamma(b) = v$, а $\gamma(a) \notin D_v$ (мы предположили, что граф G не имеет петель). По лемме 1.2 на этой кривой есть первая точка $\gamma(t_0)$, принадлежащая кругу D_v, причем эта точка лежит на граничной окружности этого круга (см. задачу 1.2). Изменим кривую γ на отрезке $[t_0, b]$ так, чтобы этот участок кривой стал радиусом круга D_v, идущим из точки $\gamma(t_0)$ в центр $\gamma(b) = F(v)$ круга D_v. Изменяя таким образом вложение F на всех ребрах, содержащих вершину v, мы получим новое вложение графа G, для которого пересечение образа графа G с кругом D_v есть набор радиусов этого круга.

Далее, изменяя указанным образом исходное вложение F графа G для всех его вершин, мы получим такое вложение, при котором образ каждого ребра является непрерывной кривой, начальная и конечная части которой идут по радиусам соответствующих кругов. Сохраним обозначение F для этого нового вложения графа G.

Второй шаг состоит в изменении вложения на «средней» части каждого из ребер так, чтобы их образы стали ломаными. Мы не будем описывать явно это изменение, а докажем, что его можно сделать отдельно для каждого ребра.

Рассмотрим некоторое ребро e графа G, соединяющее вершины v и w. Из построения, проведенного на первом шаге, следует, что ограничение вложения F на это ребро есть кривая, начальная и конечная части которой идут по радиусам кругов D_v и D_w, а ее «средняя» часть есть некоторая непрерывная кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, идущая из точки на граничной окружности круга D_v в точку на граничной окружности круга D_w.

Пусть $T \subset [a, b]$ — множество тех значений t, для которых точку $\gamma(a)$ можно соединить с точкой $\gamma(t)$ с помощью некоторой вложенной ломаной $L(t)$, которая не пересекает как образы ребер отличных от e, так и начальную и конечную части образа ребра e (являющиеся радиусами кругов D_v и D_w). Нам надо доказать, что $b \in T$.

Покажем, что если множество T содержит точку t_0, то оно содержит и некоторую окрестность точки t_0 (в отрезке $[a, b]$). Действительно, для точки $\gamma(t_0)$ существует замкнутый круг D с центром в этой точке, не пересекающий образы ребер графа G, отличных от e. Поскольку кривая γ непрерывна, у точки t_0 существует окрестность U, для которой $\gamma(U) \subset D$. Докажем, что $U \subset T$. Если $t_0 = a$, то для любой точки $t \in U$ в качестве ломаной $L(t)$ можно взять отрезок с концами $\gamma(a)$ и $\gamma(t)$. Если же $t_0 \neq a$, то, уменьшив (если нужно) радиус круга D, можно считать, что $a \notin D$. Тогда по лемме 1.2 на ломаной $L(t_0)$ существует первая точка, принадлежащая кругу D (обозначим ее через p). Теперь для любой точки $t \in U$ в качестве ломаной $L(t)$ можно взять ломаную, составленную из начальной части ломаной $L(t_0)$ от точки $\gamma(a)$ до точки p и отрезка с концами p и $\gamma(t)$.

Теперь покажем, что если множество $[a, b] \setminus T$ содержит точку t_0, то оно содержит и некоторую окрестность точки t_0 (в отрезке $[a, b]$). Пусть, как и выше, D — замкнутый круг с центром $\gamma(t_0)$, не пересекающий образы ребер графа G, отличных от e, а U — окрестность точки t_0, для которой $\gamma(U) \subset D$. Доказательство того, что $U \subset [a, b] \setminus T$ полностью аналогично предыдущему случаю. А именно, если для какой-то точки $t \in U$ существует ломаная $L(t)$, то можно построить и ломаную $L(t_0)$, объединив начальную часть ломаной $L(t)$ от точки $\gamma(a)$ до первой точки p этой ломаной в круге D с отрезком, идущим из точки p в точку $\gamma(t_0)$.

Итак, мы доказали, что оба подмножества T и $[a, b] \setminus T$ отрезка $[a, b]$ вместе с каждой точкой содержат и некоторую ее окрестность, т.е. являются открытыми подмножествами отрезка $[a, b]$. Подмножество T не пусто (поскольку $a \in T$) и, значит, существует $\sup T = d$. Так как T вместе с a содержит некоторую окрестность точки a, то a не является верхней гранью для T, т.е. $d \neq a$. Далее, если $d > a$ и $d \in [a, b] \setminus T$, то подмножество $[a, b] \setminus T$ вместе с d должно содержать некоторую окрестность точки d, что невозможно, если d — точная верхняя гранью для T. Значит, $d \in T$. Тогда некоторая окрестность точки d содержится в T, что невозможно для верхней грани d, если $d < b$. Таким образом, $d = b \in T$.[7]

Задача 1.6. *Завершить доказательство теоремы* 1.1*, рассмотрев случай, когда граф имеет петли.* □

1.7. Теорема Жордана для замкнутой ломаной. Плоский граф может разбивать плоскость на части. Формальное описание этого разбиения можно определить с помощью следующих понятий.

Подмножество плоскости (или пространства) X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, образ которой содержится в X.

Легко проверяется, что для любого подмножества плоскости X «возможность соединить в нем две точки непрерывной кривой» является отношением эквивалентности на множестве X. Тем самым множество X разбивается на классы эквивалентности, которые называются его *компонентами линейной связности*. Мы также будем называть их просто *компонентами*.

Если задано вложение графа в плоскость $F : G \to \mathbb{R}^2$, то, как будет показано ниже (см. раздел 1.10), число компонент, на которые этот плоский граф разбивает плоскость (т.е. число компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus F(G)$) не произвольно, а определяется количеством его вершин и ребер. Прежде чем обсуждать этот вопрос в общем виде, мы исследуем простейший его вариант, когда в качестве графа G рассматривается граф с одной вершиной и одним ребром-петлей. Вложение такого графа в плоскость можно также рассматривать как непрерывную замкнутую вложенную кривую. На первый взгляд, почти очевидно, что такая кривая разбивает плоскость на две компоненты (это утверждение называют «теоремой Жордана»). Однако строгое доказательство этого факта нетривиально.

Отметим, что для некоторых «простых» кривых «теорема Жордана» легко следует из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции. Например, если образ кривой $\gamma(t)$ есть окружность радиуса r с центром в точке $p \in \mathbb{R}^2$, то она разбивает плоскость на две компоненты $\{x \mid \rho(x, p) < r\}$ и $\{x \mid \rho(x, p) > r\}$. То, что компонент как минимум две, следует из теоремы о промежуточном значении, примененной к функции $f(t) = \rho(\gamma(t), p)$ (см. также задачу 1.2), а то, что каждое из двух указанных подмножеств плоскости является линейно связным, легко доказать, явно указав для каждой пары точек (из одного подмножества) непрерывную кривую, соединяющую их.

[7] Мы доказали лишь, что $b \in T$. На самом деле, рассматривая не $\sup T$, а $\sup\{t \mid [a, t] \subset T\}$, и рассуждая точно так же, можно показать, что $[a, b] \setminus T = \emptyset$

Аналогично, рассматривая на плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x_1, x_2, например, функцию $\max(x_1, x_2)$ или функцию $\max(|x_1|, |x_2|)$ (вместо функции $f(x_1, x_2) = \rho(x, p) = \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2}$, где (p_1, p_2) — координаты точки p), можно показать, соответственно, что пара лучей с общим началом или граница квадрата разбивают плоскость на две компоненты (правда, здесь надо убедиться, что указанные функции непрерывны — проверьте это!).

Задача 1.7. *Доказать, используя теорему о промежуточном значении, что граница выпуклого многоугольника разбивает плоскость ровно на две компоненты.* [Под многоугольником здесь можно понимать пересечение конечного числа замкнутых полуплоскостей, причем предполагается, что это пересечение содержит хотя бы одну точку вместе с ее окрестностью. Граница многоугольника состоит из тех частей прямых, задающих эти полуплоскости, которые принадлежат многоугольнику.]

Мы докажем сначала теорему Жордана для замкнутой кривой, образ которой является ломаной.

Теорема 1.2 (теорема Жордана для ломаной). *Любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная разбивает плоскость ровно на две компоненты.*

Доказательство. Доказательство будет состоять из двух шагов: сначала мы докажем, что число компонент не может быть больше двух, а затем покажем, что имеются как минимум две компоненты.

<u>ШАГ 1</u>. Пусть L — замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Чтобы доказать, что число компонент, на которые ломаная L разбивает плоскость, не больше двух, покажем, что любую точку $P \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ломаную L, с одной из двух фиксированных точек A_1 или A_2. Опишем процесс выбора этих точек и построения кривой.

Для любой точки R, принадлежащей ломаной L, обозначим через ε_R положительное число, которое меньше расстояния от точки R до любого ребра ломаной L, не содержащего точку R. Обозначим круг радиуса ε_R с центром в точке R через U_R. Ясно, что пересечение круга U_R с ломаной L — это либо диаметр этого круга (если R — внутренняя точка ребра ломаной L), либо два радиуса (если R — вершина ломаной L). В обоих случаях круг U_R разбивается ломаной L на две компоненты (т.е. подмножество плоскости $U_R \setminus (U_R \cap L)$ состоит из двух компонент). Это легко проверяется с помощью теоремы о промежуточном значении непрерывной функции (см., например, замечание перед задачей 1.7).

Докажем, что для любых двух точек R и S, принадлежащих ломаной L, любую точку из круга U_R, не принадлежащую ломаной, можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ломаную L, с некоторой точкой из круга U_S. Ясно, что для этого достаточно рассмотреть лишь случай, когда R — некоторая внутренняя точка ребра ломаной L, а S — вершина, принадлежащая этому ребру (тогда для произвольных точек R и S мы можем «пройти» последовательно по ребрам и вершинам от точки R до точки S).

Итак, рассмотрим некоторую вершину S ломаной L и внутреннюю точку R на ребре e, содержащем эту вершину. Пусть S' — точка на отрезке $[R, S]$, расположенная на расстоянии $\varepsilon_S/2$ от точки S. Возьмем положительное число ε, которое меньше расстояния от любой точки отрезка $[R, S']$ до любого ребра, отличного от e, а также меньше ε_R и $\varepsilon_S/2$. «Сдвигая» отрезок $[R, S']$ на расстояние ε в каждом из двух направлений, перпендикулярных ребру e, получим отрезки $[R_1, S_1]$ и $[R_2, S_2]$ (рис. 1.2). Из построения следует, что $R_1, R_2 \in U_R$, а $S_1, S_2 \in U_S$, причем каждый из отрезков $[R_1, S_1]$ и $[R_2, S_2]$ не пересекает ломаную L.

Выберем теперь любую вершину B ломаной L и точки A_1 и A_2, расположенные в двух компонентах круга U_B, на которые ломаная L делит этот круг. Мы уже доказали, что для произвольной точки R, принадлежащей ломаной L, любую точку из круга U_R, не принадлежащую ломаной, можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ломаную L, либо с точкой A_1, либо с точкой A_2. Поэтому для завершения шага 1 достаточно показать, что любую точку P, не принадлежащую ломаной L, можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ломаную, с какой-либо точкой из круга U_R (для некоторой точки R на ломаной).

Рассмотрим произвольную точку $P \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ и соединим ее отрезком с любой точкой Q на ломаной L. На отрезке $[P, Q]$ возьмем точку R, ближайшую к точке P среди тех,

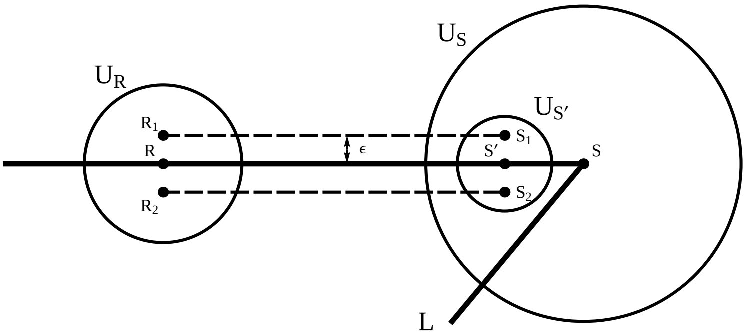

Рис. 1.2. Переход из U_R в U_S

что принадлежат ломаной L (первая точка на «непрерывной кривой» $[P, Q]$, принадлежащая L; см. лемму 1.2). На отрезке $[P, R]$ возьмем точку R', расположенную на расстоянии меньше ε_R от R. Ясно, что точка R' принадлежит кругу U_R, а отрезок $[P, R']$ не пересекает ломаную L.

ШАГ 2. Мы опишем некоторую функцию на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus L$, которая принимает одинаковые значения для всех точек из одной компоненты этого множества, и покажем, что существуют точки, в которых эта функция принимает разные значения. Это и будет означать, что подмножество плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus L$ не является линейно связным, т.е. имеет как минимум две компоненты.

Сначала для каждого луча N_P с началом в точке P, не принадлежащей ломаной L, определим число $\sigma(N_P)$, равное 0 или 1, по следующему правилу. Пересечение луча N_P с ломаной L состоит из набора точек и отрезков (или пусто). Все возможные варианты поведения ломаной L в окрестности каждого элемента пересечения (точки или отрезка) луча с ломаной изображены на рис. 1.3, где около каждого из этих вариантов указано число: 0 или 1. Для данного луча N_P находим сумму этих чисел, соответствующих всем его пересечениям с ломаной L, и полагаем $\sigma(N_P) = 0$, если эта сумма четная, или $\sigma(N_P) = 1$, если она нечетная.

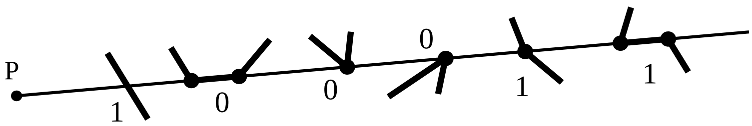

Рис. 1.3. Определение инварианта $\sigma(P)$

Рассматривая все варианты на рис. 1.3, легко понять, что при повороте луча N_P вокруг точки P на малый угол число $\sigma(N_P)$ не меняется. Действительно, если брать угол поворота меньше, чем все углы между лучом N_P и лучами (с тем же началом P), проходящими через вершины ломаной L, не лежащие на нем, то надо следить лишь за вариантами, перечисленными на рис. 1.3. Это означает, что если задавать положение луча углом φ, отсчитываемым от фиксированного направления, то число $\sigma(N_P)$, рассматриваемое как функция угла φ, будет локально постоянной функцией (т.е. у любой точки φ существует окрестность, на которой функция постоянна).

Задача 1.8. *Доказать, что любая локально постоянная функция на отрезке равна константе.*

Таким образом, определенное выше число $\sigma(N_P)$ зависит не от луча, а только от его начала. Поэтому теперь это число можно обозначать через $\sigma(P)$. Иными словами, мы определили функцию σ на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Легко видеть, что функция σ является локально постоянной (на $\mathbb{R}^2 \setminus L$). Действительно, если сдвигать точку P вдоль луча N_P на малое расстояние (меньшее, чем расстояние от точки P до ломаной L), то число $\sigma(N_P)$, очевидно, не меняется. Поскольку это можно делать для любого луча с началом в точке P, получаем целую окрестность точки P, на которой функция σ постоянна.

Наконец, покажем, что построенная функция σ постоянна на каждой компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$.[8] Если точки P и Q принадлежат одной компоненте, то (по определению) их можно соединить непрерывной кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus L$. Из непрерывности кривой γ следует, что функция $f(t) = \sigma(\gamma(t))$ является локально постоянной на отрезке $[a,b]$ (проверьте это!). Значит, $f(t)$ постоянна на отрезке $[a,b]$ (задача 1.8), т.е. $\sigma(P) = \sigma(\gamma(a)) = f(a) = f(b) = \sigma(\gamma(b)) = \sigma(Q)$.

Для завершения шага 2 (а значит, и доказательства теоремы) осталось показать, что существуют точки $P, Q \in \mathbb{R}^2 \setminus L$, для которых $\sigma(P) \neq \sigma(Q)$. В качестве таких точек можно взять концы отрезка, пересекающего ломаную L ровно в одной внутренней точке ее ребра (например, можно взять точки R_1 и R_2 из шага 1 — см. рис. 1.2). Тогда для двух сонаправленных лучей, параллельных отрезку $[P,Q]$, с началами в точках P и Q функция σ, очевидно, принимает разные значения. □

1.8. Непланарность $K_{3,3}$ и K_5 как следствие теоремы Жордана для ломаных. Докажем теперь, что графы $K_{3,3}$ и K_5 (см. рис. 1.1) не являются планарными. Для обоих графов этот факт можно вывести из следующего утверждения, вытекающего из доказанной теоремы Жордана для ломаных (теорема 1.2).

Следствие 1.1. *Пусть L — замкнутая вложенная ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$, а P, Q, R, S — четыре точки, расположенные на ней в указанном порядке (при обходе ломаной в одном из направлений). Пусть δ_1 — ломаная с концами P и R, а δ_2 — ломаная с концами Q и S, причем эти ломаные вложены, пересекаются с L только по концевым точкам и лежат в одной из двух компонент, на которые ломаная L разбивает плоскость. Тогда δ_1 и δ_2 пересекаются.*

Доказательство. Ломаная L разбивает плоскость на две компоненты. Как и при доказательстве теоремы Жордана для ломаных (теорема 1.2), рассмотрим для точки Q малый круг U_Q, пересечение которого с ломаной L есть пара его радиусов (образующих развернутый угол, если Q — внутренняя точка ребра ломаной, или произвольный, если Q — вершина ломаной). Уменьшив, если нужно, радиус круга U_Q, можно считать, что этот круг не пересекает также ломаную δ_1. Кроме того, будем считать, что круг U_Q замкнутый (при доказательстве теоремы 1.2 это было не важно). Рассматривая ломаную δ_2 как непрерывную кривую, идущую из точки S в точку Q, возьмем на ней первую точку Q', принадлежащую кругу U_Q. Точка Q' лежит на граничной окружности круга U_Q (см. задачу 1.2) и принадлежит одной из компонент, на которые пара радиусов (пересечение ломаной L с кругом U_Q) разбивает этот круг. Выберем в другой компоненте круга U_Q точку Q''. Тогда точки Q' и Q'' лежат в разных компонентах, на которые ломаная L разбивает плоскость, поскольку функция σ, построенная при доказательстве теоремы 1.2, принимает в этих точках разные значения. При этом точка Q'' лежит в той компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$, которая не содержит ломаные δ_1 и δ_2.

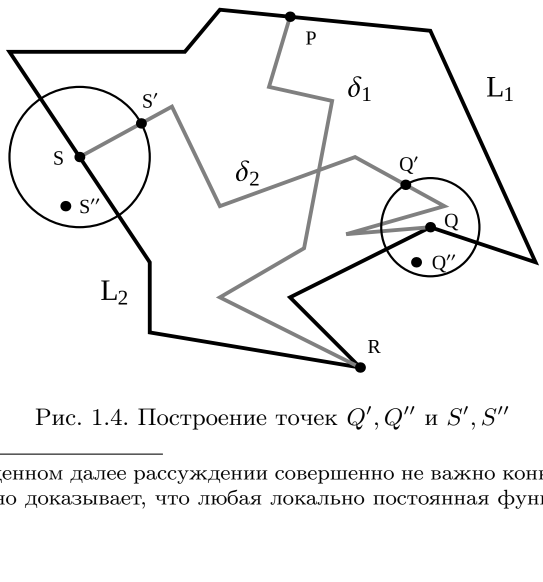

Рис. 1.4. Построение точек Q', Q'' и S', S''

[8] Отметим, что в приведенном далее рассуждении совершенно не важно конкретное определение функции σ, т.е., фактически, оно доказывает, что любая локально постоянная функция постоянна на каждой компоненте.

Аналогичным образом, рассматривая точку S вместо точки Q, построим точки S' и S'', лежащие в малом круге U_S, причем точка S' (как и точка Q') принадлежит ломаной δ_2, т.е. лежит в той же компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$, что и ломаные δ_1 и δ_2, а точка S'' — в другой.

Точки P и R разбивают ломаную L на две ломаные L_1 и L_2 с концами P и R так, что $Q \in L_1$ и $S \in L_2$. Рассмотрим замкнутую ломаную $L_1 \cup \delta_1$. Она является вложенной и, следовательно, разбивает плоскость на две компоненты. Докажем, что точки Q' и S' лежат в разных компонентах относительно ломаной $L_1 \cup \delta_1$. Действительно, точки Q'' и S'' лежат в одной компоненте относительно ломаной $L_1 \cup \delta_1$, поскольку они лежат в одной и той же компоненте относительно L, которая не содержит ломаные δ_1 и δ_2 (а значит, точки Q'' и S'' можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ни ломаную L_1, ни ломаную δ_1). Далее, для компонент относительно ломаной $L_1 \cup \delta_1$ имеем

$$\begin{array}{c} Q'' \text{ и } S'' \text{ в одной} \\ \text{компоненте} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} Q' \text{ и } S'' \text{ в разных} \\ \text{компонентах} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} Q' \text{ и } S' \text{ в разных} \\ \text{компонентах} \end{array}$$

что следует из свойств функции σ (построенной при доказательстве теоремы 1.2), поскольку отрезок $[Q', Q'']$ пересекает ломаную $L_1 \cup \delta_1$ ровно в одной точке, которой приписано число 1 (см. рис. 1.3), а отрезок $[S', S'']$ не пересекает ее.

Мы доказали, что точки Q' и S' лежат в разных компонентах относительно ломаной $L_1 \cup \delta_1$, а значит, часть ломаной δ_2, заключенная между точками Q' и S', пересекает ломаную $L_1 \cup \delta_1$. Поскольку по условию ломаная δ_2 (а значит, и эта ее часть) не пересекает ломаную L, она пересекает ломаную δ_1. □

Следствие 1.2. *Граф $K_{3,3}$ не является планарным.*

Доказательство. Обозначим вершины графа $K_{3,3}$ через $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, где каждая вершина A_i соединена с каждой вершиной B_j.

В силу теоремы 1.1 достаточно показать, что граф $K_{3,3}$ нельзя вложить в плоскость так, чтобы образы его ребер были ломаными. Предположим что такое вложение существует. Тогда образ цикла $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ является замкнутой вложенной ломаной L, которая разбивает плоскость на две компоненты. Ясно, что образы по крайней мере двух из оставшихся трех ребер A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 являются ломаными, лежащими в одной компоненте, причем концы этих ломаных расположены на ломаной L так, как это требуется в условии следствия 1.1. Поэтому эти ломаные пересекаются. □

Задача 1.9. *Доказать, что граф K_5 не является планарным.*

1.9. Теорема Жордана для замкнутой непрерывной кривой. В случае непрерывной кривой справедливо то же самое утверждение, что и в теореме 1.2, однако его аккуратное доказательство гораздо сложнее.

Теорема 1.3 (теорема Жордана). *Любая замкнутая несамопересекающаяся непрерывная кривая разбивает плоскость ровно на две компоненты.*

Мы докажем лишь “половину” этой теоремы, используя следствие 1.2. А именно, мы докажем, что для любой замкнутой несамопересекающейся непрерывной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ множество $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a, b])$ не является линейно связным (т.е. такая кривая разбивает плоскость не менее чем на две компоненты).

Доказательство. Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — замкнутая непрерывная кривая на плоскости. В декартовых координатах (x, y) она имеет вид $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, где $x(t)$ и $y(t)$ — некоторые непрерывные функции на отрезке $[a, b]$ (см. задачу 1.1). Значит, функция $x(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ некоторое минимальное значение x_1 и некоторое максимальное значение x_2. Проведем две “вертикальные” прямые $l_1 = \{x = x_1\}$ и $l_2 = \{x = x_2\}$ и выберем на каждой из них самую “верхнюю” из точек, принадлежащих кривой γ (проверьте, что такие “верхние” точки существуют, поскольку пересечение кривой γ с прямой есть замкнутое ограниченное подмножество). Обозначим выбранные точки через $A_1 \in l_1$ и $A_2 \in l_2$ (см. рис. 1.5).

$\boxed{\text{БУДЕТ ДОПИСАНО: рисунок + окончание доказательства}}$

□

Рис. 1.5. Доказательство теремы Жордана

1.10. Формула Эйлера для плоских графов. Если граф вложен в плоскость, то кроме количества его вершин В и количества его ребер Р определена еще одна его характеристика — количество компонент Г, на которые он разбивает плоскость (их также называют *гранями*).

Теорема 1.4 (формула Эйлера). *Для любого связного плоского графа верно соотношение* $\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2$.

Отметим, что для графа, имеющего ровно одну вершину и одно ребро (петлю), формула Эйлера эквивалентна теореме Жордана. Поэтому ясно, что при ее доказательстве для произвольного плоского графа возникают те же сложности, что и в теореме Жордана. Поскольку полное доказательство теоремы Жордана мы провели лишь для кривой, являющейся ломаной, поступим так же и здесь, т.е. докажем формулу Эйлера для плоского графа, ребра которого являются ломаными.

Доказательство. Рассмотрим для связного плоского графа G (ребра которого являются ломаными) число $\text{В} - \text{Р} + \text{Г}$. Идея доказательства заключается в следующем: будем «упрощать» граф G, уменьшая количество его вершин и ребер, так, чтобы граф оставался связным, а соответствующее число $\text{В} - \text{Р} + \text{Г}$ при этом не изменялось. Оказывается, что, совершив несколько таких преобразований, всегда можно придти к простейшему графу, состоящему из одной вершины (без ребер), для которого формула Эйлера очевидна.

Реализация этой идеи основана на следующем простом утверждении: если граф имеет хотя бы одно ребро, то либо в нем есть цикл, либо у него есть вершина степени 1 (докажите!). При этом, если в графе есть какой-то цикл, то есть и цикл без самопересечений (кроме начальной и конечной точки).

Учитывая это замечание, можно предложить следующие два типа преобразований, которые приводят к нужному результату:

1) если в графе есть вершина степени 1, то удалим ее вместе с входящим в нее ребром;

2) если в графе есть цикл, то удалим одно из ребер, входящих в этот цикл.

В обоих случаях граф останется связным, причем в первом случае числа В и Р уменьшатся на 1, а во втором — число Р уменьшится на 1, а число В не изменится. Ясно также, что в обоих случаях число Г не может увеличиться, поскольку если пару точек можно было соединить непрерывной кривой до удаления ребра, то их можно соединить той же кривой и после этого. Таким образом, осталось лишь доказать, что число Г в первом случае не уменьшится, а во втором случае уменьшится ровно на 1.

Для того, чтобы доказать, что в первом случае (при удалении вершины степени 1 и соответствующего ей ребра e) число Г не уменьшится, надо показать, что если непрерывная кривая γ, идущая из точки P в точку Q, пересекает только ребро e, то существует другая кривая γ', соединяющая те же точки P и Q, но не имеющая общих точек с исходным графом. Строгое рассуждение, доказывающее этот факт, можно провести точно так же, как при доказательстве ШАГА 1 в теореме 1.2: рассмотреть первую точку на кривой γ, принадлежащую ребру e, и последнюю точку на кривой γ, принадлежащую ребру e, а затем заменить участок кривой γ, содержащий эти точки, на кривую, которая идет вдоль ребра e до вершины степени 1, «огибает» ее и идет обратно вдоль ребра e.

РИСУНОК

Во втором случае (при удалении ребра e, входящего в цикл) число Г уменьшится, поскольку образ этого цикла можно рассматривать как замкнутую вложенную ломаную L, а значит, точки A и B, близкие к некоторой точке ребра e и лежащие по разные стороны от него, принадлежат разным компонентам относительно цикла L (см. ШАГ 2 в доказательстве теоремы 1.2). То, что число Г уменьшится ровно на 1, опять можно доказать аналогично ШАГУ 1 в теореме 1.2. Действительно, пусть точки P и Q принадлежали разным компонентам до удаления ребра e, а после удаления ребра e их можно соединить непрерывной привой γ. Тогда ясно, что кривая γ пересекает исходный граф только в точках ребра e. Рассматривая первую и последнюю точки на кривой γ, принадлежащие ребру e, можно, как и при доказательстве ШАГА 1, показать, что точки P и Q лежат в тех же двух компонентах, что и точки A и B. Это означает, что при удалении ребра e «сливаются» в одну лишь две компоненты, содержащие точки A и B.

РИСУНОК

$\square$

Для несвязного графа можно определить его *компоненты линейной связности* (или просто *компоненты*). Как и для подмножеств плоскости (см. выше), «возможность соединить две точки в графе непрерывной кривой» является отношением эквивалентности. Компоненты графа — это и есть соответствующие классы эквивалентности.

Задача 1.10. *Доказать следующее обобщение формулы Эйлера: для любого плоского графа верно соотношение* $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 1 + k$, *где* k *— число компонент графа.*

1.11. Теорема Понтрягина–Куратовского.

Как было показано выше, графы $K_{3,3}$ и K_5 не являются планарными. Оказывается, что эти простейшие непланарные графы «содержатся» в любом непланарном графе. Для того чтобы точно сформулировать это условие, нам понадобится следующее понятие.

Определение 1.3. Графы G_1 и G_2 называются *гомеоморфными*, если существует непрерывное взаимно-однозначное отображение $f : G_1 \to G_2$ (в этом случае само отображение f называется *гомеоморфизмом*).

Замечание 1.2. На самом деле, в определении гомеоморфизма обычно требуют, чтобы не только отображение f, но и обратное к нему отображение f^{-1} было непрерывно. Однако для (конечных) графов это условие выполнено автоматически, т.е. непрерывность отображения f^{-1} следует из непрерывности взаимно-однозначного отображения f. Объяснение этого факта, а также подробное обсуждение гомеоморфизмов и их свойств в более общей ситуации будет в следующем семестре. В этом курсе мы подробнее поговорим о понятии гомеоморфизма в одной из следующих тем при изучении двумерных поверхностей, где уже необходимо будет «правильное» определение гомеоморфизма.

То, что граф, содержащий подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5, не является планарным, легко следует из определения. Оказывается, что обратное утверждение также верно, но доказательство его существенно сложнее.

Теорема 1.5 (Понтрягин–Куратовский). *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных* $K_{3,3}$ *или* K_5.