

1. ГРАФЫ

Графы можно рассматривать как простейшие геометрические объекты. Принято считать, что начало теории графов положил Л. Эйлер, предложив строгое решение широко известной в то время задачи о семи кёнигсбергских мостах. Он изобразил части суши точками, а мосты линиями, соединяющими эти точки, т.е. представил рассматриваемые объекты в виде простой условной схемы, отражающей всю необходимую информацию. Подобный подход оказался очень удобным и в дальнейшем стал использоваться в теории электрических цепей, химии и многих прикладных математических задачах. Сам термин «граф» и соответствующий раздел математики «теория графов» появились значительно позднее (уже в XX веке).

1.1. КОМБИНАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ ГРАФОВ. Обычно в терминах графов формулируют задачи о наборах дискретных объектов, связанных какими-то отношениями. Сами объекты называют *вершинами* графа, а связи между ними — *ребрами*, соединяющими эти вершины. Граф удобно представлять себе как набор точек-вершин, соединенных линиями-ребрами, однако при таком представлении важно не конкретное «изображение» графа, а лишь то, какие вершины соединены ребрами. Поэтому граф можно задавать как некоторое множество вершин V (которое мы всегда будем предполагать конечным) и некоторый набор неупорядоченных пар вершин, задающих ребра. При этом, если такой набор содержит одну и ту же пару несколько раз, то соответствующие ей ребра называют *кратными*, а если пара состоит из одинаковых вершин, то говорят что соответствующее ребро является *петлей*.

При таком комбинаторном описании графов два графа считаются «одинаковыми», если существует биекция Φ множества вершин V_1 одного графа в множество вершин V_2 другого, при которой для каждой пары вершин $a, b \in V_1$, задающих ребро первого графа, соответствующая пара вершин $\Phi(a), \Phi(b) \in V_2$ задает ребро второго, и то же самое верно для отображения $\Phi^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ (при этом, если пара a, b встречается k раз, т.е. задает ребро кратности k , то пара $\Phi(a), \Phi(b)$ задает ребро той же кратности k). Графы, для которых существует такое отображение Φ , называются *изоморфными*, а само отображение Φ называется *изоморфизмом* графов. Если занумеровать вершины обоих графов, то изоморфизм между ними можно представлять себе просто как перенумерацию вершин первого графа, в результате которой получается второй граф.

1.2. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГРАФОВ. Для многих целей достаточно комбинаторного описания графов, но в данном курсе, говоря о графах, мы будем рассматривать их как «геометрические» или, скорее, «топологические» объекты. Это означает, что, во-первых, мы хотим рассматривать граф как множество точек: точки-вершины и ребра, которые тоже состоят из точек (в отличие от комбинаторного описания, где никаких точек на ребре нет — это лишь пара вершин!¹), а во-вторых, нам надо определить, что значит «непрерывное» отображение графа (на плоскость, в пространство, в другой граф и т. п.).

Неформально говоря, отображение является непрерывным, если оно близкие точки переводит в близкие. Напомним, как это понятие формализуется в математическом анализе, например, для отображений $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (т.е. обычных функций): *отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывным в точке $x \in \mathbb{R}$, если для любой окрестности W точки $f(x)$ существует такая окрестность U точки x , что $f(U) \subset W$* . В математическом анализе приведенное определение часто формулируется «на языке ε - δ », т.е. в качестве окрестностей точки на прямой рассматриваются интервалы с центром в этой точке. Однако приведенное выше определение (где нет упоминания про ε и δ) можно дословно повторить для отображений произвольных множеств, если определить для них, что такое «окрестность точки» (точками мы называем здесь просто элементы множества).²

Итак, помимо задания графа как множества точек, нам надо определить, какие множества для каждой точки графа называть ее окрестностями. Это можно сделать разными

¹ Например, для простейшего графа, имеющего только одну вершину и одно ребро (петлю), можно рассмотреть естественное (с геометрической точки зрения) отображение этого графа в себя, «меняющее ориентацию» ребра, а на комбинаторном языке описать этот эффект не получается.

² Иногда то понятие, которое мы сейчас обсуждаем, называют «открытой окрестностью» точки. В дальнейшем мы обычно будем говорить просто «окрестность» (например, для интервала на прямой).

способами. Например, можно представлять себе граф как набор точек-вершин в пространстве, соединенных непрерывными кривыми-ребрами, которые не имеют точек пересечения или самопересечения кроме концевых³. При таком представлении графа *окрестностью* любой его точки (в графе) естественно назвать пересечение обычной шаровой окрестности этой точки (в пространстве) с самим графом. Такое описание графа наглядно и соответствует интуитивному представлению о графе как о подмножестве в обычном евклидовом пространстве, однако имеется некоторое неудобство, которое заключается в следующем. Ясно, что любой граф, рассматриваемый как набор точек-вершин, соединенных кривыми в пространстве, однозначно определяет «комбинаторный граф» (точки-вершины образуют множество V , а начало и конец каждой кривой задают пару вершин), но данный комбинаторный граф мы можем представить в виде точек-вершин, соединенных кривыми в пространстве, многими способами. Будут ли все эти «реализации» комбинаторного графа одинаковы в каком-то естественном смысле?

Мы не будем развивать этот подход. Вместо этого ниже предложен другой способ топологического описания графов, при котором граф рассматривается не как подмножество в евклидовом пространстве, а как результат «склейки» отрезков-ребер по концевым точкам.⁴

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Говоря об «отрезке», мы будем понимать под этим некоторый отрезок $[a, b]$ обычной числовой прямой $\mathbb{R}$. При этом нам не важно, какие значения на числовой прямой имеют его концы $a, b \in \mathbb{R}$ (например, можно считать, что это отрезок $[0, 1]$). Важны лишь те свойства отрезка, которые уже известны из курса математического анализа: любая последовательность точек на отрезке имеет на нем предельную точку; любое подмножество отрезка имеет супремум и инфимум (которые принадлежат этому отрезку); любая непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения, а также достигает минимума и максимума; и т. п. В частности, для каждой точки отрезка $[a, b]$ определено понятие *окрестности*. А именно, для любой внутренней точки $x \in (a, b)$ ее окрестностью будем называть произвольный интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset [a, b]$, а для концевых точек a и b их окрестностями называются полуинтервалы вида $[a, a + \varepsilon) \subset [a, b]$ и $(b - \varepsilon, b] \subset [a, b]$ соответственно, где $\varepsilon > 0$. Отметим также, что если мы говорим о наборе таких «абстрактных» отрезков, то изначально они никак не связаны между собой, т.е. можно считать, что каждый из них взят из «своей» прямой $\mathbb{R}$.

Дадим формальное определение графа как некоторого множества точек, для каждой из которых заданы подмножества, являющиеся ее окрестностями в этом графе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть V — конечное множество (точек), E — конечный набор отрезков, а ∂ — произвольное отображение из множества концов этих отрезков в множество V . *Граф* G , определенный этими данными, есть множество, элементами которого являются все точки из V (называемые *вершинами* графа) и все внутренние точки всех отрезков из E (называемые *внутренними точками ребер* графа). Окрестность внутренней точки ребра графа G определим как ее окрестность в соответствующем отрезке, а окрестность вершины $v \in V$ определим как объединение самой вершины v и окрестностей всех точек из ее прообраза $\partial^{-1}(v)$ (т.е. окрестностей всех тех концов отрезков, которые отображение ∂ переводит в эту вершину).

Отображение ∂ из определения 1.1 можно рассматривать как «приклеивание» отрезков к точкам-вершинам, в результате чего и образуется некоторый граф, каждое ребро которого состоит из внутренних точек приклеиваемого отрезка и вершин, к которым приклеены его концы. Отметим, что если в точку $v \in V$ при отображении ∂ ничего не переходит, то ее окрестность в графе состоит только из самой точки v .

³Как будет показано ниже, не любой граф можно изобразить так на плоскости; см. также задачу 1.5

⁴Отметим, что оба указанных подхода к топологическому описанию графов являются частными случаями общих топологических конструкций: представление графа в виде точек, соединенных кривыми в пространстве, позволяет ввести на нем «индуцированную топологию», а склейка графа из отрезков означает введение «фактор-топологии». Вообще, раздел математики, в котором определяются и изучаются непрерывные отображения «произвольных» пространств, называется топологией, и ему будет посвящен отдельный курс в следующем семестре. Тем не менее, позже (см. тему «Двумерные поверхности») мы обсудим чуть более подробно основные определения и конструкции топологии.

1.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ГРАФОВ. Как уже отмечалось, обычное определение непрерывности функции из курса математического анализа (см. начало раздела 1.2) можно дословно повторить для отображений произвольных множеств, если в них уже определены окрестности точек. Правда, следует отметить, что для того, чтобы полученное определение непрерывности обладало «хорошими» свойствами, нужно наложить некоторые условия на множество окрестностей каждой точки. Подробно этот вопрос будет рассматриваться для произвольных пространств в следующем семестре.⁵ Нам же пока будет достаточно наложить условие, сформулированное в следующем определении (повторяющем определение из математического анализа, но в более общей ситуации).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть X и Y — некоторые множества в которых для каждой точки p задан набор подмножеств (каждое из которых содержит точку p), называемых ее *окрестностями*, так что пересечение любых двух окрестностей точки p тоже является окрестностью точки p . Тогда отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности W точки $F(x)$ (в Y) существует такая окрестность U точки x (в X), что $F(U) \subset W$. Отображение называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке.

Отметим, что для всех обсуждавшихся выше примеров множеств с заданными на них окрестностями (прямая, интервал, отрезок, граф) пересечение окрестностей точки является ее окрестностью, т.е. указанное в определении 1.2 условие выполнено.

Далее мы будем рассматривать отображения графов в плоскость (или пространство). Определение окрестности точки на плоскости (и в пространстве) полностью аналогично определению окрестности точки на прямой. А именно, окрестностью точки p будем называть множество точек, расстояние от которых до точки p меньше r , где r — некоторое фиксированное положительное число. Такое множество $D_{p,r} = \{x \mid \rho(x,p) < r\}$ в некотором пространстве, в котором определено расстояние ρ между точками, обычно называют *диском* или *шаром* радиуса r с центром в точке p . В случае плоскости мы также будем называть его *кругом*.

Введем еще два важных понятия, которые можно использовать в любом множестве X , в котором определены окрестности точек. Подмножество O множества X называется *открытым*, если вместе с каждой точкой $x \in O$ оно содержит и некоторую окрестность этой точки. Подмножество K множества X называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus K$ является открытым. Ясно, что условие замкнутости подмножества K можно переформулировать и так: для любой точки $x \notin K$ существует окрестность точки x , не пересекающаяся с K .

Например, легко показать, что круг $D_{p,r} = \{x \mid \rho(x,p) < r\}$ на плоскости является открытым подмножеством, а множество $\overline{D}_{p,r} = \{x \mid \rho(x,p) \leq r\}$ — замкнутым. В связи с этим мы будем также называть круг $D_{p,r}$ *открытым кругом*, а $\overline{D}_{p,r}$ — *замкнутым кругом*.

После того как мы определили окрестности точек в графе и на плоскости, мы можем рассматривать непрерывные отображения графа в плоскость в соответствии с определением 1.2. Прежде чем подробнее исследовать такие отображения, сделаем несколько замечаний о непрерывных отображениях отрезка (который также можно рассматривать как пример графа с двумя вершинами и одним ребром, соединяющим их).

1.4. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ КРИВЫХ. *Непрерывной кривой* на плоскости или в пространстве называется непрерывное отображение отрезка соответственно в плоскость или пространство (отметим, что точно так же можно определить непрерывную кривую в графе или любом другом пространстве, в котором определены окрестности точек).

Если непрерывная кривая задана как отображение γ отрезка $[a, b]$ (см. замечание 1.1), то говорят, что *параметр* кривой меняется от a до b , а точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ называются соответственно *начальной* и *конечной* точками кривой γ . Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то кривая называется *замкнутой*.

В соответствии с данным определением, кривая — это отображение, а получающаяся в результате «линия» — это образ кривой. Тем не менее, удобно говорить (и мы часто будем так делать), например, что «точка p лежит на кривой», что «кривая проходит через

⁵ см. также раздел 4.1 в теме «Двумерные поверхности».

точку p », что «кривая пересекает какое-то множество» и т. п., подразумевая при этом, что речь идет об образе кривой.

Если на плоскости заданы координаты x_1, x_2 (например, декартовы), то любую кривую $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ можно задать парой функций $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

ЗАДАЧА 1.1. *Доказать, что кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ непрерывна (в смысле определения 1.2) тогда и только тогда, когда непрерывны функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, где $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$.*

Таким образом, из задачи 1.1 следует, что многие свойства непрерывной кривой на плоскости сразу следуют из свойств непрерывных функций на отрезке. Например, из теоремы о том, что непрерывная функция на отрезке ограничена, следует, что образ непрерывной кривой является ограниченным множеством на плоскости (т.е. содержится в некотором круге конечного радиуса). Другой пример: из теоремы о промежуточном значении следует, что непрерывная кривая, начальная и конечная точки которой лежат в разных полуплоскостях, определенных некоторой прямой, пересекает эту прямую. Точно так же устанавливается, что аналогичные свойства имеют и непрерывные кривые в пространстве.

Нам понадобится также следующее важное свойство непрерывной кривой.

ЛЕММА 1.1. *Образ непрерывной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ является замкнутым подмножеством плоскости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для любой точки $p \in \mathbb{R}^2$, не принадлежащей образу кривой γ , существует ее окрестность U , которая не пересекается с образом этой кривой. Действительно, рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функцию f , принимающую в каждой точке $t \in [a, b]$ значение, равное расстоянию от точки p до точки $\gamma(t)$. Эта функция положительна и непрерывна (последнее легко проверить, записав функцию $f(t)$ с помощью декартовых координат x_1, x_2 на плоскости). Значит функция f достигает своего минимума на отрезке $[a, b]$. Поэтому для любого положительного числа ε , которое меньше этого минимума, открытый круг радиуса ε с центром в точке p можно взять в качестве искомой окрестности U . $\square$

Отметим, что утверждение леммы 1.1 справедливо и для кривой в пространстве, причем его доказательство точно такое же.⁶

Докажем еще одно свойство непрерывной кривой, которое мы часто будем использовать в дальнейшем.

ЛЕММА 1.2. *Пусть M — замкнутое подмножество плоскости, а $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывная кривая, для которой $\gamma(a) \notin M$ и $\gamma(b) \in M$. Тогда на кривой γ существует «первая точка», принадлежащая M , т.е. существует такое значение параметра $t_0 \in [a, b]$, что $\gamma(t_0) \in M$ и $\gamma(t) \notin M$ при всех $t \in [a, t_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подмножество $T = \{t \in [a, b] \mid \gamma(t) \in M\}$ отрезка $[a, b]$ (на котором меняется параметр кривой). Множество T не пусто (поскольку содержит точку b) и, значит, у него есть инфимум (как и у любого ограниченного подмножества прямой). Обозначим $\inf T$ через t_0 и покажем, что для t_0 выполнены оба условия, указанные в формулировке леммы.

То, что $\gamma(t) \notin M$ при всех $t \in [a, t_0)$, сразу следует из того, что t_0 — нижняя грань для тех t , при которых $\gamma(t) \in M$. Осталось показать, что $\gamma(t_0) \in M$. Предположим, что $\gamma(t_0) \notin M$ (в частности, тогда $t_0 < b$). Так как M — замкнутое подмножество, то у точки $\gamma(t_0)$ существует окрестность W (в плоскости), не пересекающаяся с M . Далее, из определения непрерывности кривой следует, что у точки t_0 существует окрестность U (на отрезке), для которой $\gamma(U) \subset W$. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$ точка $\gamma(t)$ не принадлежит M , но тогда любое такое t будет нижней гранью множества T , что противоречит тому, что t_0 — точная нижняя грань множества T . $\square$

⁶Отметим также, что доказательство леммы 1.1 можно дословно повторить для любого метрического пространства. Более того, это утверждение — частный случай общего утверждения о замкнутости непрерывного образа компактного пространства, которое будет обсуждаться в геометрических курсах следующих семестров.

Таким образом, если начальная точка непрерывной кривой лежит вне замкнутого подмножества, а конечная лежит в нем, то на этой кривой есть первая точка, в которой кривая «входит» в это подмножество. Лемму 1.2, очевидно, можно переформулировать и таким образом: *если начальная точка непрерывной кривой лежит в замкнутом подмножестве, а конечная — вне его, то на этой кривой есть последняя точка, принадлежащая этому подмножеству, т.е. точка, в которой кривая «выходит» из него.* Важно отметить следующее: в обоих случаях мы говорим о первой или последней точке, принадлежащей **замкнутому** подмножеству, и без условия замкнутости утверждение, конечно же, неверно.

ЗАДАЧА 1.2. Доказать, что если в качестве подмножества M в лемме 1.2 взять замкнутый круг, то первая точка на кривой, принадлежащая этому кругу (о существовании которой говорит лемма), лежит на граничной окружности этого круга.

1.5. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ГРАФАМИ. Выше мы описали два подхода (комбинаторный и топологический) к определению графа. Многие понятия, связанные с графами, можно излагать как на одном, так и на другом языке.

Например, *степенью вершины v* графа G (обозначение $\deg v$) называется либо (при комбинаторном описании — раздел 1.1) количество раз, которое вершина v входит в набор пар вершин, задающих ребра графа G , либо (при топологическом описании — раздел 1.2, определение 1.1) число прообразов вершины v при отображении d , задающем приклепку отрезков. Ясно, что эти определения эквивалентны, т.е. задают для данной вершины v одно и то же число $\deg v$.

Мы в основном будем использовать топологическое описание графа, но при желании определяемые понятия легко «перевести» и на комбинаторный язык.

Путем в графе G называется непрерывная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow G$, начальная и конечная точки которой являются вершинами графа G . Если начальная и конечная точки пути совпадают, то путь называется *замкнутым*.

Отметим, что обычно достаточно рассматривать лишь такие пути в графе, для которых соответствующую кривую можно разбить на части, каждая из которых является взаимно-однозначным отображением отрезка на ребро графа. В этом случае путь удобно задавать (в комбинаторном смысле) как последовательность вершин и ребер.

Граф G называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем.

Замкнутый путь в графе называется *циклом*, если все его точки самопересечения являются вершинами графа. (При этом мы не будем называть циклом «тривиальный» замкнутый путь, образ которого состоит из одной вершины.)

Связный граф, в котором нет циклов, называется *деревом*.

ЗАДАЧА 1.3. Доказать, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число его вершин V на 1 больше, чем число его ребер E .

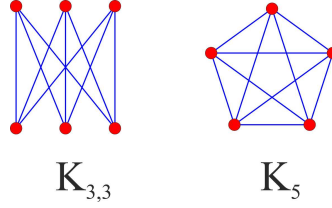
Для любого графа G , имеющего V вершин и E ребер, число $\chi(G) = V - E$ называется его *эйлеровой характеристикой*.

ЗАДАЧА 1.4. Доказать, что максимальное число ребер, которое можно удалить из связного графа G так, чтобы он остался связным, равно $1 - \chi(G)$.

Непрерывное отображение графа в плоскость или пространство называется *вложением*, если никакие две различные точки при этом отображении не переходят в одну точку. Граф называется *планарным*, если для него существует вложение в плоскость. Образ планарного графа при вложении в плоскость называется *плоским графом* (это словосочетание надо воспринимать как один термин, поскольку это не характеристика графа, а новый объект: граф вместе с его вложением).

Не любой граф можно вложить в плоскость. Например, как будет показано ниже, графы, изображенные на рис. 1.1, не являются планарными (см. также раздел 1.11, где приведен критерий планарности графа).

ЗАДАЧА 1.5. Доказать, что любой граф можно вложить в (трехмерное) пространство. Более того, если граф не содержит петель и кратных ребер, то его можно вложить в пространство так, что образ каждого ребра будет прямолинейным отрезком.

Рис. 1.1. Графы K_5 и $K_{3,3}$

1.6. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ С ПОМОЩЬЮ ЛОМАНЫХ. Следующее утверждение показывает, что любой планарный граф можно «нарисовать» на плоскости так, что его ребра изобразятся ломаными.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если существует (непрерывное) вложение графа в плоскость, то существует его вложение в плоскость, при котором образы ребер являются ломаными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — некоторый планарный граф без петель (см. ниже задачу 1.6). Рассмотрим произвольное непрерывное вложение графа в плоскость $F : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ и опишем процесс изменения этого вложения, после которого все ребра изобразятся на плоскости конечнозвенными ломаными.

Первый шаг этого изменения состоит в изменении вложения F в окрестности каждой из вершин графа.

Рассмотрим для каждой вершины v графа G замкнутый круг с центром в точке $F(v)$, не пересекающийся с образами ребер графа G , которые не содержат вершину v . Это можно сделать, так как по лемме 1.1 образы всех ребер являются замкнутыми подмножествами плоскости и их конечное число. Затем уменьшим, если нужно, построенные круги так, чтобы они попарно не пересекались. Обозначим построенные в результате замкнутые круги через D_v .

Теперь рассмотрим некоторую вершину v графа G и некоторое ребро, одним из концов которого является вершина v . Ограничение вложения F на это ребро можно рассматривать как непрерывную кривую $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которой $\gamma(b) = v$, а $\gamma(a) \notin D_v$ (мы предположили, что граф G не имеет петель). По лемме 1.2 на этой кривой есть первая точка $\gamma(t_0)$, принадлежащая кругу D_v , причем эта точка лежит на граничной окружности этого круга (см. задачу 1.2). Изменим кривую γ на отрезке $[t_0, b]$ так, чтобы этот участок кривой стал радиусом круга D_v , идущим из точки $\gamma(t_0)$ в центр $\gamma(b) = F(v)$ круга D_v . Изменяя таким образом вложение F на всех ребрах, содержащих вершину v , мы получим новое вложение графа G , для которого пересечение образа графа G с кругом D_v есть набор радиусов этого круга.

Далее, изменяя указанным образом исходное вложение F графа G для всех его вершин, мы получим такое вложение, при котором образ каждого ребра является непрерывной кривой, начальная и конечная части которой идут по радиусам соответствующих кругов. Сохраним обозначение F для этого нового вложения графа G .

Второй шаг состоит в изменении вложения на «средней» части каждого из ребер так, чтобы их образы стали ломаными. Мы не будем описывать явно это изменение, а докажем, что его можно сделать отдельно для каждого ребра.

Рассмотрим некоторое ребро e графа G , соединяющее вершины v и w . Из построения, проведенного на первом шаге, следует, что ограничение вложения F на это ребро есть кривая, начальная и конечная части которой идут по радиусам кругов D_v и D_w , а ее «средняя» часть есть некоторая непрерывная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, идущая из точки на граничной окружности круга D_v в точку на граничной окружности круга D_w .

Пусть $T \subset [a, b]$ — множество тех значений t , для которых точку $\gamma(a)$ можно соединить с точкой $\gamma(t)$ с помощью некоторой вложенной ломаной $L(t)$, которая не пересекает как образы ребер отличных от e , так и начальную и конечную части образа ребра e (являющиеся радиусами кругов D_v и D_w). Нам надо доказать, что $b \in T$.

Покажем, что если множество T содержит точку t_0 , то оно содержит и некоторую окрестность точки t_0 (в отрезке $[a, b]$). Действительно, для точки $\gamma(t_0)$ существует замкнутый круг D с центром в этой точке, не пересекающий образы ребер графа G , отличных

от e . Поскольку кривая γ непрерывна, у точки t_0 существует окрестность U , для которой $\gamma(U) \subset D$. Докажем, что $U \subset T$. Если $t_0 = a$, то для любой точки $t \in U$ в качестве ломаной $L(t)$ можно взять отрезок с концами $\gamma(a)$ и $\gamma(t)$. Если же $t_0 \neq a$, то, уменьшив (если нужно) радиус круга D , можно считать, что $a \notin D$. Тогда по лемме 1.2 на ломаной $L(t_0)$ существует первая точка, принадлежащая кругу D (обозначим ее через p). Теперь для любой точки $t \in U$ в качестве ломаной $L(t)$ можно взять ломаную, составленную из начальной части ломаной $L(t_0)$ от точки $\gamma(a)$ до точки p и отрезка с концами p и $\gamma(t)$.

Теперь покажем, что если множество $[a, b] \setminus T$ содержит точку t_0 , то оно содержит и некоторую окрестность точки t_0 (в отрезке $[a, b]$). Пусть, как и выше, D — замкнутый круг с центром $\gamma(t_0)$, не пересекающий образы ребер графа G , отличных от e , а U — окрестность точки t_0 , для которой $\gamma(U) \subset D$. Доказательство того, что $U \subset [a, b] \setminus T$ полностью аналогично предыдущему случаю. А именно, если для какой-то точки $t \in U$ существует ломаная $L(t)$, то можно построить и ломаную $L(t_0)$, объединив начальную часть ломаной $L(t)$ от точки $\gamma(a)$ до первой точки p этой ломаной в круге D с отрезком, идущим из точки p в точку $\gamma(t_0)$.

Итак, мы доказали, что оба подмножества T и $[a, b] \setminus T$ отрезка $[a, b]$ вместе с каждой точкой содержат и некоторую ее окрестность, т.е. являются открытыми подмножествами отрезка $[a, b]$. Подмножество T не пусто (поскольку $a \in T$) и, значит, существует $\sup T = d$. Так как T вместе с a содержит некоторую окрестность точки a , то a не является верхней гранью для T , т.е. $d \neq a$. Далее, если $d > a$ и $d \in [a, b] \setminus T$, то подмножество $[a, b] \setminus T$ вместе с d должно содержать некоторую окрестность точки d , что невозможно, если d — точная верхняя грань для T . Значит, $d \in T$. Тогда некоторая окрестность точки d содержится в T , что невозможно для верхней грани d , если $d < b$. Таким образом, $d = b \in T$.⁷

ЗАДАЧА 1.6. Завершить доказательство теоремы 1.1, рассматрив случай, когда граф имеет петли. □

1.7. ТЕОРЕМА ЖОРДАНА ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ ЛОМАННОЙ. Плоский граф может разбивать плоскость на части. Формальное описание этого разбиения можно определить с помощью следующих понятий.

Подмножество плоскости (или пространства) X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, образ которой содержится в X .

Легко проверяется, что для любого подмножества плоскости X «возможность соединить в нем две точки непрерывной кривой» является отношением эквивалентности на множестве X . Тем самым множество X разбивается на классы эквивалентности, которые называются его *компонентами линейной связности*. Мы также будем называть их просто *компонентами*.

Если задано вложение графа в плоскость $F : G \rightarrow \mathbb{R}^2$, то, как будет показано ниже (см. раздел 1.10), число компонент, на которые этот плоский граф разбивает плоскость (т.е. число компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus F(G)$) не произвольно, а определяется количеством его вершин и ребер. Прежде чем обсуждать этот вопрос в общем виде, мы исследуем простейший его вариант, когда в качестве графа G рассматривается граф с одной вершиной и одним ребром-петлей. Вложение такого графа в плоскость можно также рассматривать как непрерывную замкнутую вложенную кривую. На первый взгляд, почти очевидно, что такая кривая разбивает плоскость на две компоненты (это утверждение называют «теоремой Жордана»). Однако строгое доказательство этого факта нетривиально.

Отметим, что для некоторых «простых» кривых «теорема Жордана» легко следует из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции. Например, если образ кривой $\gamma(t)$ есть окружность радиуса r с центром в точке $p \in \mathbb{R}^2$, то она разбивает плоскость на две компоненты $\{x \mid \rho(x, p) < r\}$ и $\{x \mid \rho(x, p) > r\}$. То, что компонент как минимум две, следует из теоремы о промежуточном значении, примененной к функции $f(t) = \rho(\gamma(t), p)$ (см. также задачу 1.2), а то, что каждое из двух указанных подмножеств плоскости является линейно связным, легко доказать, явно указав для каждой пары точек (из одного подмножества) непрерывную кривую, соединяющую их.

⁷Мы доказали лишь, что $b \in T$. На самом деле, рассматривая не $\sup T$, а $\sup\{t \mid [a, t] \subset T\}$, и рассуждая точно так же, можно показать, что $[a, b] \setminus T = \emptyset$

Аналогично, рассматривая на плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x_1, x_2 , например, функцию $\max(x_1, x_2)$ или функцию $\max(|x_1|, |x_2|)$ (вместо функции $f(x_1, x_2) = \rho(x, p) = \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2}$, где (p_1, p_2) — координаты точки p), можно показать, соответственно, что пара лучей с общим началом или граница квадрата разбивают плоскость на две компоненты (правда, здесь надо убедиться, что указанные функции непрерывны — проверьте это!).

ЗАДАЧА 1.7. Доказать, используя теорему о промежуточном значении, что граница выпуклого многоугольника разбивает плоскость ровно на две компоненты. [Под многоугольником здесь можно понимать пересечение конечного числа замкнутых полуплоскостей, причем предполагается, что это пересечение содержит хотя бы одну точку вместе с ее окрестностью. Граница многоугольника состоит из тех частей прямых, задающих эти полуплоскости, которые принадлежат многоугольнику.]

Мы докажем сначала теорему Жордана для замкнутой кривой, образ которой является ломаной.

ТЕОРЕМА 1.2 (теорема Жордана для ломаной). Любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная разбивает плоскость ровно на две компоненты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будет состоять из двух шагов: сначала мы докажем, что число компонент не может быть больше двух, а затем покажем, что имеются как минимум две компоненты.

ШАГ 1. Пусть L — замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Чтобы доказать, что число компонент, на которые ломаная L разбивает плоскость, не больше двух, покажем, что любую точку $P \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ломаную L , с одной из двух фиксированных точек A_1 или A_2 . Опишем процесс выбора этих точек и построения кривой.

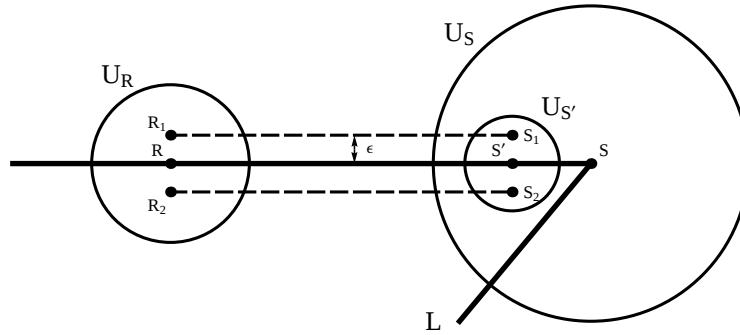
Для любой точки R , принадлежащей ломаной L , обозначим через ε_R положительное число, которое меньше расстояния от точки R до любого ребра ломаной L , не содержащего точку R . Обозначим круг радиуса ε_R с центром в точке R через U_R . Ясно, что пересечение круга U_R с ломаной L — это либо диаметр этого круга (если R — внутренняя точка ребра ломаной L), либо два радиуса (если R — вершина ломаной L). В обоих случаях круг U_R разбивается ломаной L на две компоненты (т.е. подмножество плоскости $U_R \setminus (U_R \cap L)$ состоит из двух компонент). Это легко проверяется с помощью теоремы о промежуточном значении непрерывной функции (см., например, замечание перед задачей 1.7).

Докажем, что для любых двух точек R и S , принадлежащих ломаной L , любую точку из круга U_R , не принадлежащую ломаной, можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ломаную L , с некоторой точкой из круга U_S . Ясно, что для этого достаточно рассмотреть лишь случай, когда R — некоторая внутренняя точка ребра ломаной L , а S — вершина, принадлежащая этому ребру (тогда для произвольных точек R и S мы можем «пройти» последовательно по ребрам и вершинам от точки R до точки S).

Итак, рассмотрим некоторую вершину S ломаной L и внутреннюю точку R на ребре e , содержащем эту вершину. Пусть S' — точка на отрезке $[R, S]$, расположенная на расстоянии $\varepsilon_S/2$ от точки S . Возьмем положительное число ε , которое меньше расстояния от любой точки отрезка $[R, S']$ до любого ребра, отличного от e , а также меньше ε_R и $\varepsilon_S/2$. «Сдвигая» отрезок $[R, S']$ на расстояние ε в каждом из двух направлений, перпендикулярных ребру e , получим отрезки $[R_1, S_1]$ и $[R_2, S_2]$ (рис. 1.2). Из построения следует, что $R_1, R_2 \in U_R$, а $S_1, S_2 \in U_S$, причем каждый из отрезков $[R_1, S_1]$ и $[R_2, S_2]$ не пересекает ломаную L .

Выберем теперь любую вершину B ломаной L и точки A_1 и A_2 , расположенные в двух компонентах круга U_B , на которые ломаная L делит этот круг. Мы уже доказали, что для произвольной точки R , принадлежащей ломаной L , любую точку из круга U_R , не принадлежащую ломаной, можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ломаную L , либо с точкой A_1 , либо с точкой A_2 . Поэтому для завершения шага 1 достаточно показать, что любую точку P , не принадлежащую ломаной L , можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ломаную, с какой-либо точкой из круга U_R (для некоторой точки R на ломаной).

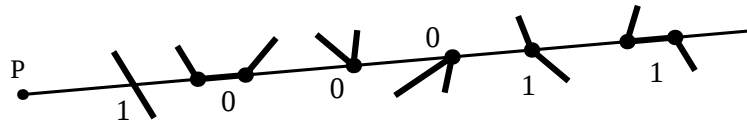
Рассмотрим произвольную точку $P \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ и соединим ее отрезком с любой точкой Q на ломаной L . На отрезке $[P, Q]$ возьмем точку R , ближайшую к точке P среди тех,

Рис. 1.2. Переход из U_R в U_S

что принадлежат ломаной L (первая точка на «непрерывной кривой» $[P, Q]$, принадлежащая L ; см. лемму 1.2). На отрезке $[P, R]$ возьмем точку R' , расположенную на расстоянии меньше ε_R от R . Ясно, что точка R' принадлежит кругу U_R , а отрезок $[P, R']$ не пересекает ломаную L .

ШАГ 2. Мы опишем некоторую функцию на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus L$, которая принимает одинаковые значения для всех точек из одной компоненты этого множества, и покажем, что существуют точки, в которых эта функция принимает разные значения. Это и будет означать, что подмножество плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus L$ не является линейно связным, т.е. имеет как минимум две компоненты.

Сначала для каждого луча N_P с началом в точке P , не принадлежащей ломаной L , определим число $\sigma(N_P)$, равное 0 или 1, по следующему правилу. Пересечение луча N_P с ломаной L состоит из набора точек и отрезков (или пусто). Все возможные варианты поведения ломаной L в окрестности каждого элемента пересечения (точки или отрезка) луча с ломаной изображены на рис. 1.3, где около каждого из этих вариантов указано число: 0 или 1. Для данного луча N_P находим сумму этих чисел, соответствующих всем его пересечениям с ломаной L , и полагаем $\sigma(N_P) = 0$, если эта сумма четная, или $\sigma(N_P) = 1$, если она нечетная.

Рис. 1.3. Определение инварианта $\sigma(P)$

Рассматривая все варианты на рис. 1.3, легко понять, что при повороте луча N_P вокруг точки P на малый угол число $\sigma(N_P)$ не меняется. Действительно, если брать угол поворота меньше, чем все углы между лучом N_P и лучами (с тем же началом P), проходящими через вершины ломаной L , не лежащие на нем, то надо следить лишь за вариантами, перечисленными на рис. 1.3. Это означает, что если задавать положение луча углом φ , отсчитываемым от фиксированного направления, то число $\sigma(N_P)$, рассматриваемое как функция угла φ , будет локально постоянной функцией (т.е. у любой точки φ существует окрестность, на которой функция постоянна).

ЗАДАЧА 1.8. Доказать, что любая локально постоянная функция на отрезке равна константе.

Таким образом, определенное выше число $\sigma(N_P)$ зависит не от луча, а только от его начала. Поэтому теперь это число можно обозначать через $\sigma(P)$. Иными словами, мы определили функцию σ на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Легко видеть, что функция σ является локально постоянной (на $\mathbb{R}^2 \setminus L$). Действительно, если сдвигать точку P вдоль луча N_P на малое расстояние (меньшее, чем расстояние от точки P до ломаной L), то число $\sigma(N_P)$, очевидно, не меняется. Поскольку это можно делать для любого луча с началом в точке P , получаем целую окрестность точки P , на которой функция σ постоянна.

Наконец, покажем, что построенная функция σ постоянна на каждой компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$.⁸ Если точки P и Q принадлежат одной компоненте, то (по определению) их можно соединить непрерывной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus L$. Из непрерывности кривой γ следует, что функция $f(t) = \sigma(\gamma(t))$ является локально постоянной на отрезке $[a, b]$ (проверьте это!). Значит, $f(t)$ постоянна на отрезке $[a, b]$ (задача 1.8), т.е. $\sigma(P) = \sigma(\gamma(a)) = f(a) = f(b) = \sigma(\gamma(b)) = \sigma(Q)$.

Для завершения шага 2 (а значит, и доказательства теоремы) осталось показать, что существуют точки $P, Q \in \mathbb{R}^2 \setminus L$, для которых $\sigma(P) \neq \sigma(Q)$. В качестве таких точек можно взять концы отрезка, пересекающего ломаную L ровно в одной внутренней точке ее ребра (например, можно взять точки R_1 и R_2 из шага 1 — см. рис. 1.2). Тогда для двух сонаправленных лучей, параллельных отрезку $[P, Q]$, с началами в точках P и Q функция σ , очевидно, принимает разные значения. $\square$

1.8. НЕПЛАНАРНОСТЬ $K_{3,3}$ И K_5 КАК СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА ДЛЯ ЛОМАНЫХ. Докажем теперь, что графы $K_{3,3}$ и K_5 (см. рис. 1.1) не являются планарными. Для обоих графов этот факт можно вывести из следующего утверждения, вытекающего из доказанной теоремы Жордана для ломаных (теорема 1.2).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть L — замкнутая вложенная ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$, а P, Q, R, S — четыре точки, расположенные на ней в указанном порядке (при обходе ломаной в одном из направлений). Пусть δ_1 — ломаная с концами P и R , а δ_2 — ломаная с концами Q и S , причем эти ломаные вложены, пересекаются с L только по конечным точкам и лежат в одной из двух компонент, на которые ломаная L разбивает плоскость. Тогда δ_1 и δ_2 пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ломаная L разбивает плоскость на две компоненты. Как и при доказательстве теоремы Жордана для ломаных (теорема 1.2), рассмотрим для точки Q малый круг U_Q , пересечение которого с ломаной L есть пара его радиусов (образующих развернутый угол, если Q — внутренняя точка ребра ломаной, или произвольный, если Q — вершина ломаной). Уменьшив, если нужно, радиус круга U_Q , можно считать, что этот круг не пересекает также ломаную δ_1 . Кроме того, будем считать, что круг U_Q замкнутый (при доказательстве теоремы 1.2 это было не важно). Рассматривая ломаную δ_2 как непрерывную кривую, идущую из точки S в точку Q , возьмем на ней первую точку Q' , принадлежащую кругу U_Q . Точка Q' лежит на граничной окружности круга U_Q (см. задачу 1.2) и принадлежит одной из компонент, на которые пара радиусов (пересечение ломаной L с кругом U_Q) разбивает этот круг. Выберем в другой компоненте круга U_Q точку Q'' . Тогда точки Q' и Q'' лежат в разных компонентах, на которые ломаная L разбивает плоскость, поскольку функция σ , построенная при доказательстве теоремы 1.2, принимает в этих точках разные значения. При этом точка Q'' лежит в той компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$, которая не содержит ломаные δ_1 и δ_2 .

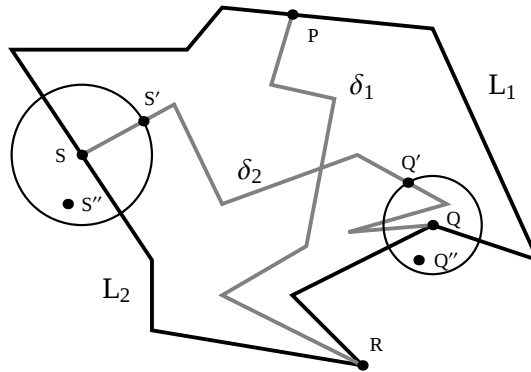


Рис. 1.4. Построение точек Q', Q'' и S', S''

⁸Отметим, что в приведенном далее рассуждении совершенно не важно конкретное определение функции σ , т.е., фактически, оно доказывает, что любая локально постоянная функция постоянна на каждой компоненте.

Аналогичным образом, рассматривая точку S вместо точки Q , построим точки S' и S'' , лежащие в малом круге U_S , причем точка S' (как и точка Q') принадлежит ломаной δ_2 , т.е. лежит в той же компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$, что и ломаные δ_1 и δ_2 , а точка S'' — в другой.

Точки P и R разбивают ломаную L на две ломаные L_1 и L_2 с концами P и R так, что $Q \in L_1$ и $S \in L_2$. Рассмотрим замкнутую ломаную $L_1 \cup \delta_1$. Она является вложенной и, следовательно, разбивает плоскость на две компоненты. Докажем, что точки Q' и S' лежат в разных компонентах относительно ломаной $L_1 \cup \delta_1$. Действительно, точки Q'' и S'' лежат в одной компоненте относительно ломаной $L_1 \cup \delta_1$, поскольку они лежат в одной и той же компоненте относительно L , которая не содержит ломаные δ_1 и δ_2 (а значит, точки Q'' и S'' можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей ни ломаную L_1 , ни ломаную δ_1). Далее, для компонент относительно ломаной $L_1 \cup \delta_1$ имеем

$$\begin{array}{ccccc} Q'' \text{ и } S'' \text{ в одной} & \implies & Q' \text{ и } S'' \text{ в разных} & \implies & Q' \text{ и } S' \text{ в разных} \\ \text{компоненте} & & \text{компонентах} & & \text{компонентах} \end{array}$$

что следует из свойств функции σ (построенной при доказательстве теоремы 1.2), поскольку отрезок $[Q', Q'']$ пересекает ломаную $L_1 \cup \delta_1$ ровно в одной точке, которой приписано число 1 (см. рис. 1.3), а отрезок $[S', S'']$ не пересекает ее.

Мы доказали, что точки Q' и S' лежат в разных компонентах относительно ломаной $L_1 \cup \delta_1$, а значит, часть ломаной δ_2 , заключенная между точками Q' и S' , пересекает ломаную $L_1 \cup \delta_1$. Поскольку по условию ломаная δ_2 (а значит, и эта ее часть) не пересекает ломаную L , она пересекает ломаную δ_1 . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Граф $K_{3,3}$ не является планарным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим вершины графа $K_{3,3}$ через $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, где каждая вершина A_i соединена с каждой вершиной B_j .

В силу теоремы 1.1 достаточно показать, что граф $K_{3,3}$ нельзя вложить в плоскость так, чтобы образы его ребер были ломаными. Предположим что такое вложение существует. Тогда образ цикла $A_1 B_2 A_3 B_1 A_2 B_3$ является замкнутой вложенной ломаной L , которая разбивает плоскость на две компоненты. Ясно, что образы по крайней мере двух из оставшихся трех ребер $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$ являются ломаными, лежащими в одной компоненте, причем концы этих ломаных расположены на ломаной L так, как это требуется в условии следствия 1.1. Поэтому эти ломаные пересекаются. $\square$

ЗАДАЧА 1.9. *Доказать, что граф K_5 не является планарным.*

1.9. ТЕОРЕМА ЖОРДАНА ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ КРИВОЙ. В случае непрерывной кривой справедливо то же самое утверждение, что и в теореме 1.2, однако его аккуратное доказательство гораздо сложнее.

ТЕОРЕМА 1.3 (теорема Жордана). *Любая замкнутая несамопересекающаяся непрерывная кривая разбивает плоскость ровно на две компоненты.*

Мы докажем эту теорему лишь в одну сторону, используя следствие 1.2. А именно, мы докажем, что для любой замкнутой несамопересекающейся непрерывной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ множество $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a, b])$ не является линейно связным (т.е. такая кривая разбивает плоскость не менее чем на две компоненты).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

БУДЕТ ДОПИСАНО: см. пока [?, Теорема 5.1 (с. 75)]

$\square$

1.10. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПЛОСКИХ ГРАФОВ. Если граф вложен в плоскость, то кроме количества его вершин V и количества его ребер E определена еще одна его характеристика — количество компонент Γ , на которые он разбивает плоскость (их также называют *гранями*).

ТЕОРЕМА 1.4 (формула Эйлера). *Для любого связного плоского графа верно соотношение $V - E + \Gamma = 2$.*

Отметим, что для графа, имеющего ровно одну вершину и одно ребро (петлю), формула Эйлера эквивалентна теореме Жордана. Поэтому ясно, что при ее доказательстве для произвольного плоского графа возникают те же сложности, что и в теореме Жордана. Поскольку полное доказательство теоремы Жордана мы провели лишь для кривой, являющейся ломаной, поступим так же и здесь, т.е. докажем формулу Эйлера для плоского графа, ребра которого являются ломаными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для связного плоского графа G (ребра которого являются ломаными) число $V - P + \Gamma$. Идея доказательства заключается в следующем: будем «упрощать» граф G , уменьшая количество его вершин и ребер, так, чтобы граф оставался связным, а соответствующее число $V - P + \Gamma$ при этом не изменялось. Оказывается, что, совершив несколько таких преобразований, всегда можно придти к простейшему графу, состоящему из одной вершины (без ребер), для которого формула Эйлера очевидна.

Реализация этой идеи основана на следующем простом утверждении: если граф имеет хотя бы одно ребро, то либо в нем есть цикл, либо у него есть вершина степени 1 (докажите!). При этом, если в графе есть какой-то цикл, то есть и цикл без самопересечений (кроме начальной и конечной точки).

Учитывая это замечание, можно предложить следующие два типа преобразований, которые приводят к нужному результату:

- 1) если в графе есть вершина степени 1, то удалим ее вместе с входящим в нее ребром;
- 2) если в графе есть цикл, то удалим одно из ребер, входящих в этот цикл.

В обоих случаях граф останется связным, причем в первом случае числа V и P уменьшатся на 1, а во втором — число P уменьшится на 1, а число V не изменится. Ясно также, что в обоих случаях число Γ не может увеличиться, поскольку если пару точек можно было соединить непрерывной кривой до удаления ребра, то их можно соединить той же кривой и после этого. Таким образом, осталось лишь доказать, что число Γ в первом случае не уменьшится, а во втором случае уменьшится ровно на 1.

Для того, чтобы доказать, что в первом случае (при удалении вершины степени 1 и соответствующего ей ребра e) число Γ не уменьшится, надо показать, что если непрерывная кривая γ , идущая из точки P в точку Q , пересекает только ребро e , то существует другая кривая γ' , соединяющая те же точки P и Q , но не имеющая общих точек с исходным графом. Строгое рассуждение, доказывающее этот факт, можно провести точно так же, как при доказательстве ШАГА 1 в теореме 1.2: рассмотреть первую точку на кривой γ , принадлежащую ребру e , и последнюю точку на кривой γ , принадлежащую ребру e , а затем заменить участок кривой γ , содержащий эти точки, на кривую, которая идет вдоль ребра e до вершины степени 1, «огibtает» ее и идет обратно вдоль ребра e .

РИСУНОК

Во втором случае (при удалении ребра e , входящего в цикл) число Γ уменьшится, поскольку образ этого цикла можно рассматривать как замкнутую вложенную ломаную L , а значит, точки A и B , близкие к некоторой точке ребра e и лежащие по разные стороны от него, принадлежат разным компонентам относительно цикла L (см. ШАГ 2 в доказательстве теоремы 1.2). То, что число Γ уменьшится ровно на 1, опять можно доказать аналогично ШАГУ 1 в теореме 1.2. Действительно, пусть точки P и Q принадлежали разным компонентам до удаления ребра e , а после удаления ребра e их можно соединить непрерывной кривой γ . Тогда ясно, что кривая γ пересекает исходный граф только в точках ребра e . Рассматривая первую и последнюю точки на кривой γ , принадлежащие ребру e , можно, как и при доказательстве ШАГА 1, показать, что точки P и Q лежат в тех же двух компонентах, что и точки A и B . Это означает, что при удалении ребра e «сливаются» в одну лишь две компоненты, содержащие точки A и B .

РИСУНОК

□

Для несвязного графа можно определить его *компоненты линейной связности* (или просто *компоненты*). Как и для подмножеств плоскости (см. выше), «возможность соединить две точки в графе непрерывной кривой» является отношением эквивалентности. Компоненты графа — это и есть соответствующие классы эквивалентности.

ЗАДАЧА 1.10. Доказать следующее обобщение формулы Эйлера: для любого плоского графа верно соотношение $V - P + \Gamma = 1 + k$, где k — число компонент графа.

1.11. ТЕОРЕМА ПОНТЯГИНА–КУРАТОВСКОГО.

Как было показано выше, графы $K_{3,3}$ и K_5 не являются планарными. Оказывается, что эти простейшие непланарные графы «содержатся» в любом непланарном графе. Для того чтобы точно сформулировать это условие, нам понадобится следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Графы G_1 и G_2 называются *гомеоморфными*, если существует непрерывное взаимно-однозначное отображение $f : G_1 \rightarrow G_2$ (в этом случае само отображение f называется *гомеоморфизмом*).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. На самом деле, в определении гомеоморфизма обычно требуют, чтобы не только отображение f , но и обратное к нему отображение f^{-1} было непрерывно. Однако для (конечных) графов это условие выполнено автоматически, т.е. непрерывность отображения f^{-1} следует из непрерывности взаимно-однозначного отображения f . Объяснение этого факта, а также подробное обсуждение гомеоморфизмов и их свойств в более общей ситуации будет в следующем семестре. В этом курсе мы подробнее поговорим о понятии гомеоморфизма в одной из следующих тем при изучении двумерных поверхностей, где уже необходимо будет «правильное» определение гомеоморфизма.

То, что граф, содержащий подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5 , не является планарным, легко следует из определения. Оказывается, что обратное утверждение также верно, но доказательство его существенно сложнее.

ТЕОРЕМА 1.5 (Понтрягин–Куратовский). *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ или K_5 .*

2. МНОГОГРАННИКИ

Графы, которые мы изучали в предыдущих лекциях, можно рассматривать как некоторые «одномерные» объекты. При этом одним из основных вопросов, которые мы исследовали, был вопрос о расположении графов на плоскости. В частности, было показано, что графы можно изображать на плоскости с помощью ломаных. Аналогом ломаных на плоскости являются «двумерные» многогранные поверхности в трехмерном пространстве. В частности, аналогом плоских многоугольников являются многогранники.

2.1. МНОГОГРАННИКИ. Согласно теореме Жордана для ломаных (теорема 1.2) каждая замкнутая несамопересекающаяся ломаная на плоскости разбивает ее на две компоненты. Ясно, что одна из них ограничена (т.е. содержится в некотором круге конечного радиуса), а другая не ограничена. Ограниченную компоненту называют *внутренней*, а неограниченную — *внешней*. Внутренняя компонента вместе с границей (т.е. ломаной) называется (плоским) *многоугольником*.

Аналогичные объекты в пространстве — это многогранники. Простейшие примеры таких объектов всем хорошо знакомы: куб, тетраэдр, параллелепипед, пирамида, призма.

Для того, чтобы дать общее определение многогранника, введем следующее понятие. Два (плоских) многоугольника в пространстве назовем *смежными по стороне a* , если отрезок a является их общей стороной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Многогранной поверхностью* называется конечный набор многоугольников, расположенных в пространстве таким образом, что для каждой стороны каждого многоугольника задан (ровно один) многоугольник из этого набора, смежный ему по этой стороне, причем это отношение симметрично.

Многоугольники называются *гранями* многогранной поверхности, а их вершины и стороны — соответственно ее *вершинами* и *ребрами*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Многогранную поверхность назовем *вложенной*, если

- 1) любая внутренняя точка каждой ее грани не принадлежит никакой другой грани,
- 2) любая внутренняя точка каждого ее ребра принадлежит ровно двум граням (смежным по этому ребру),
- 3) для любой ее вершины все грани, которым она принадлежит, образуют замкнутую цепочку граней, смежных по ребрам, содержащим эту вершину.

Мы будем рассматривать только *связные* многогранные поверхности, т.е. будем предполагать, что для любых двух граней можно перейти от одной к другой по цепочке смежных граней.

примеры (рисунки) к определению

Таким образом, многогранная поверхность является аналогом замкнутой ломаной на плоскости (в частности, вложенная многогранная поверхность — аналог вложенной ломаной). Следующее утверждение является аналогом теоремы Жордана (для ломаных) для вложенных многогранных поверхностей.

ТЕОРЕМА 2.1. *Любая (связная) вложенная многогранная поверхность разбивает пространство ровно на две компоненты.*

ЗАДАЧА 2.1. *Доказать теорему 2.1.*

Ясно, что одна из областей, на которые вложенная многогранная поверхность разбивает пространство является внутренней (ограниченной), а другая внешней (неограниченной).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Многогранником* называется вложенная многогранная поверхность вместе с ее внутренней частью.

Важный класс многогранников образуют *выпуклые* многогранники, т.е. многогранники, являющиеся выпуклыми подмножествами в $\mathbb{R}^3$.

ЗАДАЧА 2.2. *Доказать, что многогранник является выпуклым тогда и только тогда, когда для любой его грани он лежит по одну сторону от плоскости, содержащей эту грань.*

ЗАДАЧА 2.3. Доказать, что выпуклый многогранник совпадает (как подмножество $\mathbb{R}^3$) с выпуклой оболочкой своих вершин. [Выпуклой оболочкой некоторого подмножества A (плоскости или пространстве) называется минимальное выпуклое множество, содержащее A .]

2.2. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ. Количество вершин V , количество ребер P и количество граней Γ выпуклого многогранника связаны тем же соотношением, что и соответствующие числа для плоского графа.

ТЕОРЕМА 2.2 (формула Эйлера). Для любого выпуклого многогранника верно соотношение $V - P + \Gamma = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение можно вывести из уже доказанной формулы Эйлера для плоского графа. Идея заключается в том, чтобы отобразить поверхность многогранника на плоскость так, чтобы его вершины, ребра и грани соответствовали вершинам ребрам и граням некоторого плоского графа. Фактически, для этого достаточно рассмотреть проекцию на плоскость из точки, расположенной вне многогранника, но «достаточно близко» к его поверхности.

Чтобы не уточнять, что значит «достаточно близко», мы реализуем эту идею с помощью другого отображения, которое является композицией следующих двух проекций.

1) Рассмотрим произвольную точку O внутри многогранника и сферу S^2 с центром в точке O , для которой рассматриваемый многогранник лежит внутри шара, ограниченного этой сферой. Пусть F — поверхность многогранника. Рассмотрим проекцию $p : F \rightarrow S^2$ из точки O на сферу S^2 , т.е. для любой точки $x \in F$ ее образ при проекции p — это пересечение луча Ox со сферой S^2 .

2) Рассмотрим точку $N \in S^2$, которая является образом внутренней точки грани многогранника при проекции p . Пусть $\mathbb{R}^2$ — плоскость, проходящая через точку O и перпендикулярная прямой ON . Рассмотрим проекцию π из точки N на плоскость $\mathbb{R}^2$, т.е. для любой точки $A \in S^2$ ее образ при проекции π — это пересечение луча NA с плоскостью $\mathbb{R}^2$.

Пусть $x_0 = p^{-1}(N)$ — прообраз точки N при проекции p . Тогда определено отображение $f = \pi \circ p : (F \setminus x_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Отображение f есть биекция между точками плоскости $\mathbb{R}^2$ и поверхностью многогранника без точки x_0 . При этой биекции вершины и ребра многогранника переходят в вершины и ребра некоторого плоского графа G , а грани многогранника — в компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus G$ (грань, содержащая точку x_0 переходит в неограниченную компоненту). В частности, количество вершин V , количество ребер P и количество граней Γ рассматриваемого многогранника равны соответствующим значениям V , P и Γ для плоского графа G . $\square$

2.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ. Аналогично правильным многоугольникам на плоскости среди многогранников выделяют наиболее «симметричные». Это понятие можно формализовать различными способами, но все они приводят к одному и тому же списку «правильных» многогранников, которые были хорошо известны еще древнегреческим математикам (и часто называются платоновыми телами).

Одно из возможных условий: все грани являются правильными многоугольниками (т.е. равны все ребра и все плоские углы) и все двугранные углы равны.

Для решения задачи классификации правильных многогранников удобнее другое определение: назовем многогранник *правильным*, если все его грани — правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. (То, что эти определения эквивалентны будет следовать из полученного описания и теоремы Коши, обсуждаемой ниже).

Пусть все грани выпуклого многогранника являются правильными n -угольниками, а в каждой вершине сходится k граней. Тогда, подсчитывая количество ребер многогранника двумя способами (по граням и по вершинам), получаем соотношения:

$$kV = 2P = n\Gamma.$$

Выражая V и G через P из этих соотношений, и подставляя их в формулу Эйлера $V - P + G = 2$, после простых преобразований получим

$$\frac{2}{k} + \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{P}.$$

Ясно, что $n, k \geq 3$.

Перебираем варианты + рисунок

2.4. ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ.

Будет добавлено (этого почти не было на лекциях, но должно было обсуждаться на семинарах)

2.5. ТЕОРЕМА КОШИ. Из опыта мы знаем, что выпуклые многогранники являются «жесткими», т.е. их нельзя непрерывно деформировать, даже если каждое ребро устроено как «шарнир», позволяющий вращать вокруг него примыкающие грани. Доказательство этого факта (и даже более сильного утверждения) впервые получил Коши.

Будем говорить, что два многогранника имеют одинаковое *комбинаторное строение*, если для них можно установить соответствие между вершинами, ребрами и гранями, при котором сохраняется отношение принадлежности.

ТЕОРЕМА 2.3 (теорема Коши). *Два выпуклых многогранника, имеющие одинаковое комбинаторное строение и равные соответствующие грани, конгруэнтны (т.е. совмещаются движением пространства).*

рисунок для невыпуклых

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что у данных многогранников равны соответствующие двугранные углы. Доказательство этого факта требует некоторых дополнительных рассуждений в случае, когда многогранники имеют вершины, в которых сумма плоских углов равна 2π . Если таких вершин у многогранника нет, то будем называть его *строго выпуклым* (а если такие вершины есть, то *нестрого выпуклым*). Аналогично, будем называть выпуклый многоугольник *строго выпуклым*, если у него нет вершин, в которых угол равен π , и *нестрого выпуклым*, если такие вершины у него есть.

В случае строго выпуклых многогранников равенство двугранных углов (при выполнении условий теоремы) доказывается с помощью следующих двух лемм.

ЛЕММА 2.1 (лемма Коши). *Если некоторые из ребер выпуклого многогранника помечены знаками “+” и “−”, то найдется вершина, к которой подходит хотя бы одно ребро и в которой число перемен знаков при ее обходе меньше 4.*

ЛЕММА 2.2. *Пусть у двух строго выпуклых n -угольников (на плоскости или на сфере) соответствующие стороны равны, а среди соответствующих углов есть неравные. Отметим знаками “+” или “−” вершины первого многоугольника, в которых углы соответственно больше или меньше углов второго многоугольника. Тогда число перемен знаков при обходе вершин первого многоугольника не меньше 4.*

Прежде чем доказывать эти леммы, покажем, что из них следует теорема Коши (в случае строго выпуклых многогранников).

Действительно, если у многогранников есть неравные двугранные углы, то отметим знаками “+” или “−” ребра первого многогранника, при которых двугранные углы соответственно больше или меньше углов второго многогранника. Тогда по лемме 2.1 найдется вершина первого многогранника, в которой число перемен знаков меньше 4 (и к ней подходит хотя бы одно отмеченное ребро). Рассмотрим для этой вершины первого многогранника и для соответствующей ей вершины второго многогранника сферы с центрами в этих вершинах достаточно малого радиуса (пересекающие только ребра, примыкающие к этим вершинам). Пересечение этих двух сфер с соответствующими многогранниками образуют два сферических многоугольника, у которых соответствующие стороны равны (так как равны соответствующие плоские углы в рассматриваемых вершинах), а среди углов есть

неравные (так как к рассматриваемой вершине первого многогранника подходит хотя бы одно отмеченное ребро). Значит, по лемме 2.2, примененной к этим сферическим многоугольникам, число перемен знаков при обходе первого многоугольника должно быть не меньше 4. Полученное противоречие показывает, что у рассматриваемых многогранников все соответствующие двугранные углы равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1.

добавить рисунки

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2.

добавить рисунки

□

Осталось рассмотреть случай нестрого выпуклых многогранников.

добавить рисунки

Теорема Коши доказана.

□

3. ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ (ТРЕТЬЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА)

Уже в школе для доказательства равновеликости двух пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами используют понятие предела (или интегрирование). В то же время, в планиметрии для доказательства аналогичных фактов о площадях простых фигур используют элементарные средства. Например, каждый многоугольник можно разрезать на конечное число частей, из которых можно сложить квадрат (см. ниже теорему 3.1). Таким образом можно ввести понятие площади по крайней мере для многоугольников. Оказывается, что для многогранников такой простой подход уже не работает (что и приводит к необходимости использовать методы анализа для определения объема уже для самых простых пространственных фигур). А именно, существуют равновеликие, но не равноставленные многогранники (теорема 3.2).

Задачу о том, можно ли данный многогранник разрезать так, чтобы сложить из него другой данный (равновеликий ему) многогранник, поставил Д. Гильберт в 1900 году на I Международном математическом конгрессе. В своей речи он сформулировал 23 проблемы, 3-я из которых и была о равноставленности многогранников⁹. Мотивировкой проблемы Гильберта было желание понять, каким наиболее простым набором аксиом можно обойтись при описании стереометрии. В частности, нельзя ли для многогранников при определении понятия объема избежать применения интегрирования.

Эту задачу уже через год решил его ученик М. Ден. Он получил даже больше: не только ответ (отрицательный) на вопрос Гильберта, но и критерий того, когда два данных равновеликих многогранника могут быть преобразованы друг в друга путем разрезания.

3.1. РАВНОСТАВЛЕННОСТЬ НА ПЛОСКОСТИ. Рассмотрим сначала аналогичную задачу в двумерном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Два многоугольника *равноставленны*, если их можно разрезать на одинаковые многоугольники.

Ясно, что равноставленные многоугольники должны иметь равную площадь. Оказывается, любые два многоугольника равной площади равноставленны.

ТЕОРЕМА 3.1 (Бойяи–Гервин). *Два многоугольника, имеющие равные площади, равноставленны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сейчас известно множество способов осуществить требуемое разрезание равновеликих многоугольников. Опишем один из возможных путей сделать это в виде серии следующих утверждений.

ЛЕММА 3.1. *Любой многоугольник можно разрезать на треугольники.*

ЛЕММА 3.2. *Любой треугольник равноставлен с каким-нибудь параллелограммом.*

ЛЕММА 3.3. *Два параллелограмма, имеющие соответственно равные основания и высоты, равноставленны.*

ЛЕММА 3.4. *Два прямоугольника, имеющие равные площади, равноставленны.*

ЗАДАЧА 3.1. *Доказать леммы 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.*

Доказав эти леммы, можно доказать теорему 3.1 следующим образом.

Ясно, что утверждение теоремы эквивалентно тому, что любой многоугольник площади S равноставлен с прямоугольником со сторонами 1 и S . Для доказательства этого факта сделаем следующее:

- 1) разрежем многоугольник на треугольники;
- 2) разрежем каждый из треугольников так, чтобы получить из него параллелограмм;
- 3) разрежем каждый параллелограмм и сложим из него прямоугольник;
- 4) каждый прямоугольник (разрезая и складывая) преобразуем в прямоугольник, у которого одна сторона имеет длину 1;

⁹На самом деле, Гильберт сформулировал вопрос для треугольных пирамид с одинаковыми основаниями и равными высотами, но можно показать, что этот вопрос эквивалентен общей проблеме (см. задачу ...).

5) наконец, приложим полученные прямоугольники последовательно друг к другу так, чтобы получился прямоугольник со сторонами 1 и S . $\square$

3.2. РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. Перейдем теперь к задаче о равноставленности многогранников.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Два многогранника *равноставленны*, если их можно разрезать на одинаковые многогранники.

Как уже было сказано, ответ на вопрос Гильберта о равноставленности равновеликих многогранников оказался отрицательным. Для того, чтобы показать это, мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. *Куб и правильный тетраэдр равных объемов не равноставленны.*

ЗАДАЧА 3.2. *Доказать, что если бы было верно, что треугольные пирамиды с одинаковыми основаниями и равными высотами равноставленны, то было бы верно и что любые два многогранника одинаковых объемов равноставленны.*

Для доказательства теоремы 3.2 нам понадобится инвариант Дена. Чтобы его определить, введем сначала следующее вспомогательное понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Для набора действительных чисел $x_1, \dots, x_k$ будем называть *зависимостью* любое соотношение вида

$$n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0, \quad (1)$$

где $n_1, \dots, n_k$ — целые числа. Функцию f , заданную на некотором множестве действительных чисел M , будем называть *аддитивной*¹⁰, если для каждой зависимости вида (1) между элементами множества M выполнена зависимость с теми же коэффициентами для чисел $f(x_1), \dots, f(x_k)$:

$$n_1f(x_1) + \dots + n_kf(x_k) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть A — многогранник, длины ребер которого равны $l_1, \dots, l_N$, а двугранные углы — $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Для любой аддитивной функции, заданной на множестве M , содержащем все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, назовем *деновским инвариантом* многогранника A число

$$f(A) = l_1f(\alpha_1) + \dots + l_Nf(\alpha_N).$$

ТЕОРЕМА 3.3 (Хадвигер). *Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ — величины двугранных углов многогранника A , а $\beta_1, \dots, \beta_q$ — величины двугранных углов многогранника B . Если на множестве M , содержащем все числа α_i, β_j и число π , существует аддитивная функция f , такая что $f(\pi) = 0$, а соответствующие деновские инварианты многогранников A и B различны, т.е. $f(A) \neq f(B)$, то многогранники A и B не равноставленны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить следующие два утверждения.

ЛЕММА 3.5. *Аддитивную функцию, заданную на множестве M всегда можно продолжить на множество $M' = M \cup \gamma$, где γ — любое число.*

ЛЕММА 3.6. *Пусть многогранник A составлен из многогранников $P_1, \dots, P_k$, и пусть M — множество, содержащее число π и величины всех двугранных углов многогранников $A, P_1, \dots, P_k$. Если f — аддитивная функция, заданная на множестве M и удовлетворяющая условию $f(\pi) = 0$, то для соответствующих деновских инвариантов выполнено*

$$f(A) = f(P_1) + \dots + f(P_k).$$

$\square$

Применим теперь теорему 3.3 для доказательства того, что куб и тетраэдр не равноставленны.

Доказательство теоремы 3.2. Все двугранные углы тетраэдра равны $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$, а все двугранные углы куба равны $\frac{\pi}{2}$. Поэтому множество M из теоремы 3.3 состоит в

¹⁰Более естественно определить аддитивную функцию условием $f(x+y) = f(x) + f(y)$, но мы хотим рассматривать функции, заданные лишь на некотором множестве M . Доказательство существования таких функций на всей числовой прямой (кроме линейных) требует привлечения аксиомы выбора.

данном случае из чисел $\pi, \frac{\pi}{2}, \varphi$. Положим $f(\pi) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ и $f(\varphi) = 1$. То, что эта функция f аддитивна, легко вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 3.7. *Число $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ иррационально.*

Вычисляя теперь соответствующие деновские инварианты, получаем: для куба Q имеем $f(Q) = 12af(\frac{\pi}{2}) = 0$, а для тетраэдра T — $f(T) = 6bf(\varphi) = 6b \neq 0$, где a и b — длины ребер куба и тетраэдра соответственно. Теорема 3.2 доказана. $\square$

4. ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В предыдущих темах мы обсудили несколько вопросов, связанных с «геометрией» многогранников (жесткость выпуклых многогранников, равноставленность многогранников). Сама постановка этих вопросов существенно использует понятие «расстояния», на основе которого уже можно определить площадь, объем и другие «геометрические» характеристики. В начале курса мы рассматривали также вопросы другого сорта, связанные с «топологическими» свойствами графов (такими как планарность, связность, наличие циклов). Теперь мы обсудим некоторые задачи «топологического» характера для двумерных поверхностей.

Интуитивное представление о двумерной поверхности дают нам простые примеры: плоскость, сфера, поверхность многогранника. Оказывается, что все возможные двумерные поверхности можно описать (классифицировать) с топологической точки зрения. Однако прежде чем обсуждать их классификацию, необходимо четко определить, что же мы будем понимать под двумерной поверхностью. Поэтому сначала мы напомним некоторые определения, уже обсуждавшиеся в связи с графами (см. разделы 1.2 и 1.3) и введем несколько новых топологических понятий.

4.1. ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ.

Напомним (см. раздел 1.3), что для множества X , в котором определены окрестности точек, мы называли подмножество $O \subset X$ открытым, если вместе с каждой точкой $x \in O$ оно содержит некоторую окрестность этой точки.

не дописано (определение топологии через окрестности)

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПРИМЕРЫ.

Теперь мы можем дать определение поверхности.

рисунки (примеры склеек)

5. ГЛАДКИЕ КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

КОММЕНТАРИЙ

В этой лекции мы обсуждаем некоторые «глобальные» свойства кривых плоскости и других двумерных поверхностях. Как мы уже видели, различные двумерные поверхности имеют разные топологические свойства. Например, имеются числовые инварианты, такие как эйлерова характеристика. Другой пример: в отличие от плоскости (сферы) теорема Жордана для других поверхностей уже не верна (фактически, ее уточнение и приводит к понятию эйлеровой характеристики). Еще один из примеров проявления таких «отличий» можно увидеть, решая задачу классификации замкнутых самопересекающихся (погруженных) кривых на поверхностях с точностью до деформации, при которой кривая остается регулярной (регулярная гомотопия).

РЕГУЛЯРНЫЕ КРИВЫЕ, ГОМОТОПИЯ

Когда мы говорим о «гладкой» кривой, то интуитивно представляем себе линию на плоскости «без углов», т.е. имеющую касательную в каждой точке. С другой стороны, если представлять себе кривую, как траекторию движения точки по плоскости, то эту траекторию можно записать, например, в декартовых координатах (x, y) в виде функций $(x(t), y(t))$, где t — параметр (время). При таком представлении, «гладкой» кривой естественно назвать ту, для которой эти функции гладкие, т.е. дифференцируемые. Оказывается, что, вообще говоря, эти два представления о гладких кривых различны, т.е. пара гладких функций $x(t)$ и $y(t)$ может задавать кривую, имеющую «излом» (например, ломаную), и наоборот, линию, имеющую касательную в каждой точке, можно задать не дифференцируемыми функциями.

Примеры:

1) Кривую, вида



можно задать гладкими (бесконечно дифференцируемыми) функциями.

2) Прямую на плоскости (например, ось y) можно задать функциями $x(t) = 0$, $y(t) = |t| + 2t$.

Итак, прежде чем переходить к содержательным геометрическим задачам о кривых, дадим формальное определение гладкой кривой и выделим некоторый класс «регулярных» кривых, для которых оба описанных выше представления о кривой дают одно и то же.

Кривую на плоскости, заданную в виде траектории точки, т.е. в виде вектор-функции $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ (где параметр t пробегает некоторый отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$) будем называть *параметризованной кривой*. Вектор $\mathbf{r}$ называется *радиус-вектором* параметризованной кривой, а его производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ (если она существует) — *вектором скорости* кривой. При этом параметризованная кривая называется *непрерывной, дифференцируемой, дважды дифференцируемой, и т.п.*, если вектор-функция $\mathbf{r}$ соответственно непрерывна, дифференцируема, дважды дифференцируема, и т.п. Слово «гладкий» мы обычно будем употреблять как синоним к «бесконечно дифференцируемый».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Гладкая параметризованная кривая называется *регулярной*, если ее вектор скорости ни в какой точке не равен нулю.

ЗАДАЧА 5.1. Доказать, что для любой точки $\mathbf{r}(t_0)$ регулярной кривой $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ без самопересечений существует круг с центром в точке $\mathbf{r}(t_0)$, пересечение которого с кривой состоит только из дуги кривой $\mathbf{r}([t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2])$, причем эту дугу можно рассматривать либо как график гладкой функции $y(x)$, либо как график гладкой функции $x(y)$.

Кривая $\mathbf{r}(t)$ называется *замкнутой*, если ее начальная и конечная точки совпадают, т.е. $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. При этом часто удобно не фиксировать эту точку на кривой. Для этого можно продолжить периодически вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$ на всю вещественную прямую, т.е. так, что $\mathbf{r}(t+b-a) = \mathbf{r}(t)$ при всех t . Итак, замкнутой (параметризованной) кривой на плоскости мы будем называть периодическую вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$, для которой фиксирован некоторый (возможно не минимальный!) период T . При этом, говоря о замкнутой кривой, мы также

будем использовать для этой вектор-функции запись $\mathbf{r} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, подразумевая, что на всей прямой эта функция определена правилом $\mathbf{r}(t + T) = \mathbf{r}(t)$.

Отметим, что замкнутую кривую, определенную таким образом, можно рассматривать и как отображение окружности в плоскость $\mathbf{r} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (вместо периодического отображения $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$).

Непрерывность, гладкость, регулярность для замкнутых кривых определяются точно так же, как и выше.

Нас будут интересовать «деформации» замкнутой регулярной кривой, которые являются частными случаями понятия гомотопии в топологии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть $\mathbf{r}_0 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\mathbf{r}_1 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — замкнутые регулярные кривые на плоскости. Они называются *регулярно гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $F : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, что

- 1) $F(0, t) = \mathbf{r}_0(t)$ и $F(1, t) = \mathbf{r}_1(t)$ при всех t ,
- 2) при любом фиксированном s кривая $\mathbf{r}_s(t) = F(s, t)$ является замкнутой и регулярной.

Неформально говоря, гомотопия F — это семейство кривых $\mathbf{r}_s$, «начинающееся» в $\mathbf{r}_0$ и «заканчивающееся» в $\mathbf{r}_1$, в котором все кривые замкнутые и регулярные. При этом F непрерывна как вектор-функция двух переменных — *параметра гомотопии* s и параметра на кривой t .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Говоря о гомотопии кривых в определении 5.2, мы считаем, что они заданы как отображения *одного и того же* отрезка, поскольку это нужно для определения отображения F , осуществляющего гомотопию. Однако, по существу, при задании кривой нам важна сама траектория, а не отрезок, на котором определен параметр (если интерпретировать параметр как время, то отрезок задает лишь «начало отсчета» и «скорость движения» по траектории).

Ясно, что для любых двух отрезков прямой мы можем отобразить один отрезок на другой, например, линейно (с сохранением направления). Поступая таким образом со всеми рассматриваемыми кривыми, мы можем считать, что все они заданы, например, на отрезке $[0, 1]$. В дальнейшем мы не будем каждый раз явно указывать эту замену, но будем подразумевать, что она сделана, если нужно.

Отметим, что в топологии рассматриваются различные варианты определения гомотопии. Если говорить о кривых на плоскости, то можно, например, убрать условие регулярности или рассматривать незамкнутые кривые. Однако если при этом не накладывать какие-то дополнительные условия, то полученные определения будут бессодержательными.

ЗАДАЧА 5.2. Доказать, что любые две замкнутые кривые на плоскости гомотопны (в смысле определения 5.2 без условия регулярности).

ЗАДАЧА 5.3. Доказать, что любые две незамкнутые кривые на плоскости регулярно гомотопны (в смысле определения 5.2 без условия замкнутости).

Здесь следует отметить, что утверждение задачи 5.2 может стать неверным, если рассматривать кривые не на плоскости, а на какой-то другой поверхности (например, как будет ясно из дальнейшего, оно неверно на плоскости с выброшенной точкой). Иными словами, для замкнутых кривых все-таки имеет смысл рассматривать понятие «обычной» гомотопии (т.е. без условия регулярности).

Напротив, утверждение задачи 5.3, грубо говоря, «верно всегда», т.е. для произвольных связных топологических пространств и для произвольного класса кривых (непрерывных, гладких, регулярных). Поэтому для незамкнутых кривых обычно рассматривают следующее определение гомотопности. Сформулируем его для непрерывных кривых в произвольном топологическом пространстве (точно такое же определение можно дать и для регулярных кривых на поверхностях).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Пусть $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow X$ и $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$ — непрерывные кривые с началом в точке $P = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и концом в точке $Q = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Они называются *гомотопными с фиксированными концами*, если существует такое непрерывное отображение $F : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow X$, что

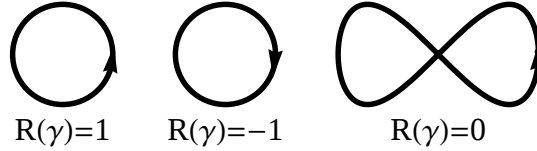
- 1) $F(0, t) = \gamma_0(t)$ и $F(1, t) = \gamma_1(t)$ при всех t ,
- 2) $F(s, a) = P$ и $F(s, b) = Q$ при всех s .

ЗАДАЧА 5.4. Доказать, что любые две (незамкнутые) регулярные кривые на плоскости с одинаковыми началом и концом регулярно гомотопны с фиксированными концами.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ С ТОЧНОСТЬЮ ДО РЕГУЛЯРНОЙ ГОМОТОПИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Число вращения $R(\gamma)$ замкнутой регулярной кривой $\gamma(t)$ на плоскости — это число оборотов, которое делает вектор скорости кривой при движении точки вдоль кривой. Более формально это число можно определить следующим образом. В декартовых координатах на плоскости вектор скорости кривой $\gamma(t)$, где $a \leq t \leq b$, можно записать в виде $\gamma'(t) = (\rho(t) \cos \varphi(t), \rho(t) \sin \varphi(t))$, где $\rho(t) > 0$, а $\varphi(t)$ — непрерывная (и даже гладкая) функция. Так как кривая замкнута, то $\varphi(b) = \varphi(a) \bmod 2\pi$. Тогда число вращения $R(\gamma) \in \mathbb{Z}$ определяется формулой $R(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В каждой точке регулярной (параметризованной) кривой ее вектор скорости указывает направление, в котором точка движется по кривой при возрастании параметра. Таким образом, фактически мы рассматриваем ориентированные кривые. В частности, для каждой кривой $\gamma(t)$ можно рассмотреть кривую $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ (здесь $t \in [0, 1]$ — см. замечание 5.1), которая изображается той же «линией» на плоскости, но пробегается в обратном направлении. Как легко понять, $R(\gamma^{-1}) = -R(\gamma)$. Например:



ТЕОРЕМА 5.1 (Теорема Уитни на плоскости). *Две замкнутые регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения равны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения числа вращения ясно, что оно непрерывно зависит от параметра гомотопии и является целым. Отсюда следует, что для регулярно гомотопных кривых числа вращения равны.

Докажем теперь, что кривые с равными числами вращения регулярно гомотопны.

Во-первых, отметим, что для любой регулярной кривой $\gamma(t)$ можно рассматривать регулярные гомотопии, соответствующие «замене параметра». А именно, если $\tau(t)$ — гладкая функция, у которой область определения совпадает с множеством значений (например, это отрезок $[a, b]$) и производная $\frac{d\tau}{dt}$ всюду положительна, то можно рассмотреть гомотопию $F(s, t) = \gamma((1 - s)t + s\tau(t))$. При $s = 0$ получаем кривую $\gamma(t)$, а при $s = 1$ — кривую $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\tau(t))$. Ясно, что при любом значении параметра гомотопии s кривая $\gamma_s(t) = F(s, t)$ является регулярной и изображается той же «линией» на плоскости, что и кривая $\gamma(t)$.

Для любой регулярной кривой $\gamma(t)$ функцию $\tau(t)$ можно подобрать таким образом, что у кривой $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\tau(t))$ длина вектора скорости будет постоянна. Действительно, такая функция $\tau(t)$ задается соотношением $|\gamma'(\tau)| \frac{d\tau}{dt} \equiv c$, т.е. является обратной к функции

$$t(\tau) = a + \frac{1}{c} \int_a^\tau |\gamma'(u)| du, \text{ где константа } c \text{ равна } \frac{1}{b-a} \int_a^b |\gamma'(u)| du.$$

Более того, рассматривая также гомотопии вида $F(s, t) = ((1 - s) + s\lambda)\gamma(t)$ (т.е. гомотетии кривой, где $\lambda > 0$), мы можем считать, что эта константа c (длина вектора скорости

кривой) равна 1. Отметим, что число $\int_a^b |\gamma'(u)| du$ можно рассматривать как определение *длины* гладкой кривой $\gamma(t)$, где $a \leq t \leq b$, а параметр τ , для которого длина вектора скорости постоянна и равна 1, называется *натуральным*. Поэтому другое его описание заключается в том, что для двух точек кривой, для которых значения натурального параметра равны соответственно τ_1 и τ_2 , длина дуги кривой, заключенной между этими точками, равна $|\tau_2 - \tau_1|$.

Итак, пусть $\gamma_0 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\gamma_1 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — две замкнутые регулярные кривые, имеющие одинаковые числа вращения $R(\gamma_0) = R(\gamma_1) = k$. Применяя (если нужно) гомотопии, описанные выше, мы можем считать, что для обеих кривых длина вектора скорости постоянна и равна 1. Кроме того, будем считать, что при $t = 0$ обе кривые выходят из начала координат в одном и том же направлении, т.е. $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = (0, 0)$ и $\gamma_0'(0) = \gamma_1'(0) = (1, 0)$

(этого легко добиться, непрерывно поворачивая кривую и параллельно сдвигая ее, т.е. опять же применяя регулярную гомотопию).

Нам нужно построить регулярную гомотопию между кривыми $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$. Можно попытаться написать для этого формулу, основанную на том же приеме, что уже применялся выше: $\gamma_s(t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$. Однако такая гомотопия может не быть регулярной, поскольку вектор скорости $\gamma'_s(t)$ может стать нулевым при каких-то значениях s и t . Поэтому мы применим этот прием не к самим кривым, а к «угловым» функциям, задающим их вектора скорости.

Поскольку длины векторов скорости кривых $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ тождественно равны 1, их можно записать в виде $\gamma'_0(t) = (\cos \varphi_0(t), \sin \varphi_0(t))$ и $\gamma'_1(t) = (\cos \varphi_1(t), \sin \varphi_1(t))$, где $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ — гладкие функции, однозначно определенные условием $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0$. При этом, поскольку числа вращения обеих кривых равны k , имеем $\varphi_0(T) = \varphi_1(T) = 2\pi k$.

Для каждого $s \in [0, 1]$ рассмотрим функцию $\varphi_s(t) = (1-s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)$. Она определяет единичный вектор $\mathbf{v}_s(t) = (\cos \varphi_s(t), \sin \varphi_s(t))$, который, в свою очередь, однозначно задает некоторую кривую с данным вектором скорости (проходящую через точку $(0, 0)$ при $t = 0$):

$$\tilde{\gamma}_s(t) = \int_0^t \mathbf{v}_s(u) du.$$

Построенное семейство кривых $\tilde{\gamma}_s(t)$ содержит исходные замкнутые регулярные кривые $\gamma_0(t)$ при $s = 0$ и $\gamma_1(t)$ при $s = 1$, однако при $s \neq 0, 1$ эти кривые могут не быть замкнутыми (хотя, очевидно, являются регулярными). Для окончательного построения нужного семейства кривых, осуществляющих регулярную гомотопию между кривыми $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ можно «исправить» кривые $\tilde{\gamma}_s(t)$, сделав их замкнутыми, следующим образом: $\gamma_s(t) = \tilde{\gamma}_s(t) - \frac{t}{T}\tilde{\gamma}_s(T)$. Геометрически этот процесс «исправления», заданный указанной формулой, можно описать так: конец радиус-вектора кривой $\gamma_s(t)$ пробегает кривую $\tilde{\gamma}_s(t)$, а начало при этом равномерно движется по отрезку $[\tilde{\gamma}_s(0), \tilde{\gamma}_s(T)]$ (где $\tilde{\gamma}_s(0) = (0, 0)$).

Из построения ясно, что при каждом s кривая $\gamma_s(t)$ будет гладкой замкнутой кривой. Для проверки ее регулярности надо доказать, что $\gamma'_s(t) \neq 0$ при всех t . Имеем:

$$|\gamma'_s(t)| = |\tilde{\gamma}'_s(t) - \frac{1}{T}\tilde{\gamma}_s(T)| \geq |\tilde{\gamma}'_s(t)| - \frac{1}{T}|\tilde{\gamma}_s(T)| = 1 - \frac{|\tilde{\gamma}_s(T)|}{T} \geq 0,$$

поскольку T — длина кривой $\tilde{\gamma}_s$, а $|\tilde{\gamma}_s(T)|$ — расстояние между ее концами. При этом выписанные неравенства обращаются в равенства только в том случае, когда $\tilde{\gamma}'_s(t) = (1, 0)$ при всех t , т.е. $\varphi_s(t) = 0$ при всех t .

Задача 5.5. Привести пример двух плоских замкнутых регулярных кривых γ_0 и γ_1 с одинаковыми числами вращения, для которых функция $\varphi_s(t) = (1-s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)$, построенная по их векторам скорости $\gamma'_0(t) = (\cos \varphi_0(t), \sin \varphi_0(t))$ и $\gamma'_1(t) = (\cos \varphi_1(t), \sin \varphi_1(t))$, при некотором s тождественно (по t) равна 0. При каких значениях числа вращения это возможно? Закончить доказательство теоремы 5.1 в этом случае.

Теорема доказана. □

В приведенном доказательстве теоремы 5.1 деформация кривой задается формулой, которая сразу приводит к нужному результату. При этом следует отметить, что в этой формуле мы существенно использовали именно свойства плоскости как евклидова пространства, поскольку рассматривали вектор скорости кривой как вектор-функцию на плоскости, т.е., фактически, «параллельно переносили» все вектора скорости в начало координат.

Дадим еще одно доказательство теоремы 5.1 (более геометрическое), в котором явно опишем и процесс гомотопии кривой, и классы эквивалентности кривых относительно регулярной гомотопии. В частности, это описание позволит нам потом применить те же соображения и для классификации кривых на других поверхностях.

Другое доказательство теоремы 5.1. Для того, чтобы показать, что кривые с равными числами вращения регулярно гомотопны, мы рассмотрим произвольную регулярную кривую γ и опишем процесс гомотопии, приводящий ее к некоторому «каноническому» виду.

ЛЕММА 5.1. Любая замкнутая регулярная кривая регулярно гомотопна кривой, у которой число точек самопересечения конечно, причем все они двойные и пересечения в них трансверсальны (т.е. с непараллельными векторами скорости).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Не дописано

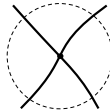
□

Будем называть кривые, описанные в лемме 5.1, кривыми *общего положения*.

ЛЕММА 5.2. *Любая замкнутая регулярная кривая общего положения либо не имеет точек самопересечения, либо имеет петлю, т.е. такую точку самопересечения $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, что на интервале (t_1, t_2) точек самопересечения нет.*

ЗАДАЧА 5.6. *Доказать, лемму 5.2.*

Пусть замкнутая регулярная кривая общего положения γ имеет хотя бы одну точку пересечения $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Тогда существует круг с центром в этой точке, пересечение которого с кривой γ имеет вид



т.е. состоит из двух дуг кривой, пересекающихся только в центре круга и не имеющих самопересечений. Действительно, для доказательства этого достаточно рассмотреть ограничения кривой γ на два достаточно малых (непересекающихся) отрезка, содержащих соответственно точки t_1 и t_2 , и применить к этим двум кривым утверждение задачи 5.1.

Рассмотрим некоторую петлю, заданную точкой самопересечения $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, и круг с центром в этой точке, описанный выше. Кривая γ «входит» в этот круг в точке $\gamma(t_1 - \varepsilon_1)$, затем делает петлю при $t \in [t_1, t_2]$ и «выходит» из круга в точке $\gamma(t_2 + \varepsilon_2)$.

ЛЕММА 5.3. *Пусть γ — замкнутая регулярная кривая общего положения и $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ — ее точка самопересечения, определяющая петлю на отрезке $[t_1, t_2]$. Существует регулярная гомотопия, которая не меняет кривую вне отрезка $[t_1 - \varepsilon_1, t_2 + \varepsilon_2]$, а на этом отрезке деформирует ее к одному из следующих двух видов:*



ЗАДАЧА 5.7. *Доказать, лемму 5.3.*

После гомотопии, описанной в лемме 5.3, мы получаем кривую, у которой исходная петля стала «маленькой» и не пересекает другие части кривой. При дальнейшей деформации кривой мы можем не обращать внимания на такую петлю. А именно, будем рассматривать участок кривой от точки $\gamma(t_1 - \varepsilon_1)$ до точки $\gamma(t_2 + \varepsilon_2)$ как гладкий с отмеченной на нем точкой $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ (запомнив при этом, с какой стороны находилась эта маленькая петля).

Применяя гомотопию, описанную в лемме 5.3, конечное число раз, мы приходим к кривой (с отмеченными точками), которая не имеет точек самопересечения.

ЛЕММА 5.4. *Замкнутая регулярная кривая, не имеющая точек самопересечения, регулярно гомотопна стандартной окружности на плоскости (пробегаемой в одном из двух возможных направлений: либо по часовой стрелке, либо против).*

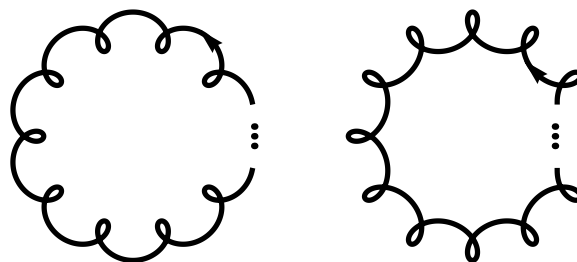
ЗАДАЧА 5.8. *Доказать, лемму 5.4.*

В результате мы получаем, что любая замкнутая регулярная кривая регулярно гомотопна окружности с набором маленьких петель, каждая из которых расположена либо внутри, либо вне этой окружности. Таким образом, мы продеформировали произвольную кривую к некоторому виду, который можно было бы назвать каноническим, но, на самом деле, среди полученных кривых еще есть регулярно гомотопные. Оказывается, что петли,

расположенные по разные стороны от окружности, можно попарно «уничтожить», а направление, в котором пробегается окружность, поменять на противоположное (добавляя при этом пару петель).

Тем самым, канонический вид замкнутой регулярной кривой можно описать следующим образом.

ЛЕММА 5.5. *Замкнутая регулярная кривая, не имеющая точек самопересечения, регулярно гомотопна стандартной окружности на плоскости, пробегаемой против часовой стрелки, с набором петель, расположенных по одну сторону от окружности:*



ЗАДАЧА 5.9. *Доказать, лемму 5.5.*

Кривые, перечисленные в лемме 5.5, задаются количеством петель и их расположением. Как легко подсчитать, число вращения для кривой с k внутренними петлями равно $1 + k$, а для кривой с k внешними петлями равно $1 - k$, т.е. число вращения однозначно определяет число k и расположение петель. Это означает, что любые две замкнутые регулярные кривые с равными числами вращения регулярно гомотопны одной и той же канонической кривой из леммы 5.5.

Теорема 5.1 доказана. □

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ НА НЕКОТОРЫХ «ПРОСТЫХ» ПОВЕРХНОСТЯХ С ТОЧНОСТЬЮ ДО РЕГУЛЯРНОЙ ГОМОТОПИИ

Рассмотрим теперь аналогичную задачу классификации замкнутых регулярных кривых, но не на плоскости, а на других двумерных поверхностях.

Для каждой поверхности аналогом теоремы Уитни на плоскости (теорема 5.1) должна быть теорема с формулировкой следующего вида: *две замкнутые регулярные кривые на поверхности M регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их «инварианты» совпадают*. Как мы видели, для плоскости таким инвариантом (единственным!) является число вращения. Это и есть теорема Уитни (теорема 5.1).

Для некоторых других поверхностей нужные инварианты описаны ниже. Они выглядят по-разному для разных поверхностей. При этом следует отметить, что имеется общий подход к описанию таких «инвариантов» для произвольной поверхности M , но описание этого подхода выходит за рамки нашего курса (см. краткий комментарий в конце этого раздела). Мы же опишем эти инварианты (на различных примерах поверхностей) в простой наглядной форме, демонстрируя при этом некоторые идеи, которые важны и для построения общей теории.

Прежде чем переходить к классификации кривых на различных поверхностях, сделаем следующее замечание по поводу определений.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. При определении регулярной кривой и регулярной гомотопии на плоскости (см. определения 5.1 и 5.2) мы рассматривали кривую как вектор-функцию, т.е., фактически, использовали декартовы координаты на плоскости. Если заменить плоскость на двумерную поверхность M , то надо потребовать, чтобы условие регулярности $\gamma'(t) \neq 0$ для всех точек кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ было выполнено в некоторых (а тогда и в любых) локальных координатах.

• СФЕРА

Уже на примере сферы мы видим, что «теорема Уитни» выглядит по-другому для других поверхностей.

ТЕОРЕМА 5.2 (Теорема Уитни на сфере). *Любая замкнутая регулярная кривая на сфере регулярно гомотопна окружности или «восьмерке».*

ЗАДАЧА 5.10. *Доказать теорему 5.2*

Случай сферы мы уже обсудили (здесь каждая кривая регулярно гомотопна либо «окружности», либо «восьмерке»). Таким образом, для сферы: «инвариант» принимает всего два значения.

• ЦИЛИНДР

Пример сферы показывает, что для кривых на сфере нет чего-то похожего на «число вращения». По крайней мере, нет никакого числового «инварианта» (т.е. числа, сопоставляемого кривой, которое сохраняется при регулярной гомотопии), принимающего различные целочисленные значения (как было для кривых на плоскости).

Чтобы понять, почему так происходит, надо проанализировать то, как определялось число вращения на плоскости. При движении точки вдоль кривой (на плоскости) мы следили за изменением угла между вектором скорости кривой и некоторым фиксированным направлением (осью x), т.е., фактически, мы использовали то, что на плоскости это фиксированное направление задано во всех точках плоскости. На сфере этого сделать нельзя. Это не очевидная теорема (она будет доказываться в курсе дифференциальной геометрии). Ее можно сформулировать так: *если в каждой точке двумерной сферы выбрать касательный вектор так, чтобы он непрерывно зависел от точки, то в некоторой точке он будет равен нулю.*

На цилиндре выбрать такое «фиксированное направление» во всех точках можно. Например, можно представить цилиндр как часть плоскости.

ЗАДАЧА 5.11. *Доказать, что цилиндр гомеоморфен плоскости без точки.*

Таким образом, для кривой на цилиндре есть по крайней мере один инвариант — число вращения (если рассматривать цилиндр, как плоскость с выброшенной точкой).

Легко привести пример двух кривых без самопересечений на цилиндре, которые не являются регулярно гомотопными (в плоскости без точки!). Каким «инвариантом» они различаются? Например, этот инвариант можно описать следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. Пусть кривая γ на плоскости задана радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$ и не проходит через точку O (начало координат). Назовем *числом оборотов* кривой γ относительно точки O число оборотов, которые делает единичный вектор $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$.

ЗАДАЧА 5.12. *Сформулируйте и докажите аналог теоремы Уитни для кривых на цилиндре.*

ТЕОРЕМА 5.3. *Две замкнутые регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения и числа обходов равны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм действий точно такой же как и при доказательстве теоремы Уитни на плоскости. Отличается лишь конечный стандартный вид кривой.

Еще рисунки

□

• ЛИСТ МЁБИУСА

На листе Мёбиуса, как и на цилиндре, можно выбрать «фиксированное направление» во всех точках. Но, на самом деле, для определения «число вращения» этого мало. Для его корректного определения нужно еще, чтобы можно было согласованно (во всех точках сразу) выбрать «направление отсчета угла»

ЗАДАЧА 5.13. *Приведите примеры кривых без самопересечений на листе Мёбиуса, которые не являются регулярно гомотопными. Сколько таких кривых попарно неэквивалентных (т.е. являющихся регулярно гомотопными) существует?*

ЗАДАЧА 5.14. *Рассмотрим кривую γ_1 на листе Мёбиуса, которая идет вдоль его оси и имеет одну «маленькую петельку». Пусть γ_2 — такая же кривая, но с петелькой в другую сторону. Будут ли эти кривые регулярно гомотопны?*

ЗАДАЧА 5.15. *Сформулируйте и докажите теорему классификации кривых (с точностью до регулярной гомотопии) на листе Мёбиуса.*

• ТОР

В случае тора полезно сначала получить ответ на следующий вопрос: когда две замкнутые кривые на торе гомотопны (без условия регулярности!)?.

ЗАДАЧА 5.16. *Сформулируйте и докажите теорему классификации кривых (с точностью до гомотопии — не обязательно регулярной) на торе. «Инвариантом» здесь являются два целых числа — их и надо определить.*

ЗАДАЧА 5.17. *Определите число вращения для регулярной кривой на торе.*

ЗАДАЧА 5.18. *Сформулируйте и докажите теорему классификации кривых с точностью до регулярной гомотопии на торе.*

• ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Можно предложить следующие два способа классификации кривых на проективной плоскости (с точностью до регулярной гомотопии).

I. Можно, как и в случае тора, сначала разобраться с кривыми, рассматривая их с точностью до гомотопии (не обязательно регулярной), а затем «учесть маленькие петельки».

II. Можно, как и в случае сферы, использовать то, что мы знаем ответ для проективной плоскости без точки (вспомните, чему гомеоморфна проективная плоскость с выброшенной точкой).

ЗАДАЧА 5.19. *Сформулируйте и докажите теорему классификации кривых с точностью до регулярной гомотопии на проективной плоскости.*

6. КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

6.1. ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ.

Отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния, называется *движением* (или *изометрией*).

параллельный перенос

поворот

осевая симметрия

скользящая симметрия

Следующее утверждение должно быть известно из аналитической геометрии ???

ТЕОРЕМА 6.1 (Шаль). *Любое движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо симметрией.*

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Любое движение плоскости представляется в виде композиции ≤ 3 осевых симметрий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

рисунки

□

Композиции перечисленных движений задаются следующей таблицей ...

Движения плоскости образуют группу относительно композиции. Обозначение: $\text{Iso } \mathbb{R}^2$.

6.2. ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ НА МНОЖЕСТВЕ.

Говорят, что задано *действие* ρ группы G на множестве X , если каждому элементу g группы G сопоставлена биекция $\rho(g) : X \rightarrow X$, так что $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$.

Иными словами, ρ — это гомоморфизм группы G в группу «преобразований» множества X . В качестве этих преобразований могут рассматриваться любые биекции $X \rightarrow X$ (если X — просто множество) или биекции некоторого специального вида (если на X задана какая-то структура). Например, если X — топологическое пространство, то обычно требуют, чтобы эти биекции были непрерывны, т.е. являлись гомеоморфизмами, а если на X задана метрика, то требуют, чтобы эти биекции ее сохраняли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Орбита — ...

Стабилизатор — ...

Мы будем рассматривать в качестве X плоскость $\mathbb{R}^2$, а в качестве преобразований — ее движения.

6.3. КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ГРУППЫ НА ПЛОСКОСТИ.

Кристаллографической группой (на плоскости) называется дискретная подгруппа группы движений плоскости, имеющая ограниченную фундаментальную область. Ниже объясняется, что значит «дискретная подгруппа» и что значит «фундаментальная область».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Подгруппа $G \subset \text{Iso } \mathbb{R}^2$ называется дискретной, если для любой точки плоскости x существует окрестность U_x , пересечение, которой с орбитой O_x точки x состоит только из точки x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Замощение плоскости — это представление плоскости в виде $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{\alpha} K_{\alpha}$, где

1) K_{α} — замкнутые подмножества плоскости,

2) K_{α} и K_{β} не имеют общих внутренних точек (при $\alpha \neq \beta$),

3) семейство K_{α} локально конечно, т.е. для любой точки плоскости x существует окрестность U_x , пересекающаяся лишь с конечным числом подмножеств K_{α} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Фундаментальная область для подгруппы G группы движений плоскости — это замкнутое подмножество $D \subset \mathbb{R}^2$, такое что семейство $\{g(D) \mid g \in G\}$ является замощением плоскости.

Область Вороного (или область Дирихле):

$$D(G, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| \leq \|x - g(x_0)\| \forall g \in G\}$$

Таким образом, в качестве фундаментальной области всегда можно выбрать выпуклый многоугольник (возможно, бесконечный)

6.4. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП НА ПРЯМОЙ.

6.5. КЛАССИФИКАЦИЯ КОНЕЧНЫХ ПОДГРУПП ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ.

УПРАЖНЕНИЯ (ГРАФЫ)

У1.1. Доказать, что сумма степеней вершин любого графа равна удвоенному количеству его ребер. (В частности, число вершин нечетной степени всегда четно.)

У1.2. Доказать, что у дерева, содержащего хотя бы одно ребро, всегда есть вершина степени 1.

Зад. 1.3 **У1.3.** Доказать, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число его вершин V на 1 больше, чем, число его ребер P .

У1.4. Перечислить все деревья с 6 вершинами.

Зад. 1.4 **У1.5.** Доказать, что максимальное число ребер, которое можно удалить из связного графа G так, чтобы он остался связным, равно $\chi(G) - 1$.

Зад. 1.5 **У1.6.** Доказать, что любой граф можно вложить в (трехмерное) пространство. Более того, если граф не содержит петель и кратных ребер, то его можно вложить в пространство так, что образ каждого ребра будет прямолинейным отрезком.

У1.7. Цикл, проходящий по всем ребрам графа, называется *эйлеровым*. Доказать, что в графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

У1.8. Доказать, что вершины графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы вершины, соединенные ребром, были раскрашены в разные цвета, тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Зад. 1.1 **У1.9.** Доказать, что кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ непрерывна (в смысле определения 1.2) тогда и только тогда, когда непрерывны функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, где $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

У1.10. Доказать, что функция непрерывна на графе тогда и только тогда, когда ее ограничение на каждое ребро является непрерывной функцией.

Зад. 1.2 **У1.11.** Доказать, что если в качестве подмножества множества M в лемме 1.2 взять замкнутый круг, то первая точка на кривой, принадлежащая этому кругу (о существовании которой говорит лемма), лежит на граничной окружности этого круга.

У1.12. Доказать, что пара радиусов, проведенных в круге, разбивают его ровно на две компоненты линейной связности.

Зад. 1.7 **У1.13.** Доказать, используя теорему о промежуточном значении, что граница выпуклого многоугольника разбивает плоскость ровно на две компоненты. [Под многоугольником здесь можно понимать пересечение конечного числа замкнутых полуплоскостей, причем предполагается, что это пересечение содержит хотя бы одну точку вместе с ее окрестностью. Граница многоугольника состоит из тех частей прямых, задающих эти полуплоскости, которые принадлежат многоугольнику.]

Зад. 1.8 **У1.14.** Доказать, что любая локально постоянная функция на отрезке равна константе.

Зад. 1.9 **У1.15.** Доказать, что K_5 не планарен, с помощью следствия 1.1 из теоремы Жордана для ломаных (т.е. не используя формулу Эйлера).

У1.16. Доказать, что для плоского графа без петель и кратных ребер справедливы неравенства $\frac{3}{2}V \leq P \leq 3V - 6$.

У1.17. Доказать, что в планарном графе без петель и кратных ребер есть вершина степени ≤ 5 .

У1.18. Доказать, что граф без петель и кратных ребер, у которого 10 вершин и все они имеют степень 5, не планарный.

У1.19. Доказать, что не существует графа без петель и кратных ребер, у которого всего 5 вершин и их степени равны 4,4,4,4,2.

Зад. 1.6 **У1.20.** Завершить доказательство теоремы 1.1, рассмотрев случай, когда граф имеет петли.

* **У1.21.** Доказать усиленную версию теоремы 1.1, где вместо «ломаными» сказано «отрезками».

* **У1.22.** Доказать теорему о пяти красках: вершины любого планарного графа без петель можно раскрасить в пять цветов так, чтобы вершины, соединенные ребром, были раскрашены в разные цвета.

* **У1.23.** Описать все плоские графы, у которых вершины имеют одну и ту же степень, а грани ограничены одним и тем же числом ребер.

У1.24. Доказать, что следующие графы попарно не гомеоморфны: отрезок; петля (граф с одной вершиной и одним ребром); граф с одной вершиной степени 3 и тремя ребрами, сходящимися в этой вершине.

У1.25. Доказать, что при гомеоморфизме графов вершина степени k переходит в вершину степени k , если $k \neq 2$

Зад. 1.10 **У1.26.** Доказать следующее обобщение формулы Эйлера: для любого плоского графа верно соотношение $B - P + \Gamma = 1 + k$, где k — число компонент графа.

УПРАЖНЕНИЯ (МНОГОГРАННИКИ)

У2.1. Доказать, что вложенная многогранная поверхность является связной (см. определение 2.2) тогда и только тогда, когда граф, образованный ее вершинами и ребрами, является связным. Верно ли это для произвольной многогранной поверхности?

У2.2. Доказать, что в строго выпуклом многограннике всегда есть две грани с одинаковым числом сторон. Верно ли это для нестрого выпуклого многогранника?

У2.3. Доказать, что не существует строго выпуклого многогранника с 7 ребрами. Верно ли это для нестрого выпуклого многогранника?

Зад. 2.1 **У2.4.** Доказать теорему 2.1.

Зад. 2.2 **У2.5.** Доказать, что многогранник является выпуклым тогда и только тогда, когда для любой его грани он лежит по одну сторону от плоскости, содержащей эту грань.

Зад. 2.3 **У2.6.** Доказать, что выпуклый многогранник совпадает (как подмножество $\mathbb{R}^3$) с выпуклой оболочкой своих вершин. [Выпуклой оболочкой некоторого подмножества A (плоскости или пространстве) называется минимальное выпуклое множество, содержащее A .]

У2.7. Доказать, что если в каждой вершине выпуклого многогранника сходятся ≥ 4 ребра, то у него есть треугольная грань.

У2.8. Пусть у выпуклого многогранника все грани правильные 5-угольники и 6-угольники. Сколько у него 5-угольных граней?

Пересечение многогранного угла со сферой единичного радиуса с центром в его вершине называется *сферическим многоугольником*. Стороны сферического многоугольника — это дуги больших кругов на сфере, являющиеся пересечениями граней многогранного угла со сферой. Величины углов сферического многоугольника равны величинам соответствующих двугранных углов многогранного угла (или, что то же самое, величинам углов между касательными к соответствующим сторонам).

Подмножество сферы называется *выпуклым* (на сфере), если вместе с каждой парой своих точек оно содержит хотя бы одну кратчайшую, соединяющую эту пару точек, т.е. половину большого круга, если эти точки диаметрально противоположны, или, в противном случае, — более короткую их (двух) дуг большого круга, проходящего через эти точки, если они не противоположны.

У2.9. Доказать, что сферический многоугольник является выпуклым (на сфере) тогда и только тогда, когда соответствующий многогранный угол является выпуклым (в $\mathbb{R}^3$). (Останется ли верным это утверждение, если многоугольник заменить на произвольное подмножество сферы, а многогранный угол — на объединение всех лучей с началом в центре сферы, проходящих через точки этого подмножества?)

У2.10. Доказать, что сферический многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда все его углы не превосходят π .

У2.11. Пусть в сферическом треугольнике

Доказать теорему косинусов для сферического треугольника: $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \hat{C}$, где α, β, γ — длины сторон треугольника, лежащих против его вершин A, B, C соответственно.

У2.12. Доказать, неравенство треугольника для сферического треугольника.

У2.13. Доказать, что в сферическом треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

У2.14. Аналог теоремы о ежике для многоугольников.

* **У2.15.** Формула для объема тетраэдра через длины сторон.

УПРАЖНЕНИЯ (ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ)

- Зад. 3.1 **У3.1.** Доказать леммы 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.
- У3.2.** Даны два квадрата. Разрежьте один квадрат на четыре части, и из этих частей и другого квадрата сложите квадрат. (Замечание. используя эту задачу можно завершить доказательство теоремы 3.1 по-другому: преобразовывать каждый треугольник не в прямоугольник со сторонами 1 и S , а в квадрат.)
- У3.3.** Доказать, что в любом многоугольнике можно провести диагональ, лежащую строго внутри него.
- У3.4.** Разрезать куб на 6 равных треугольных пирамид.
- У3.5.** Привести пример тетраэдра, равноставленного с кубом.
- У3.6.** Привести пример двух равновеликих, но не равноставленных тетраэдров (с использованием теоремы 3.2).
- ! **У3.7.** Доказать леммы 3.5 и 3.6.
- ! **У3.8.** Доказать, что если $\cos \varphi \in \mathbb{Q}$ и $\varphi/\pi \in \mathbb{Q}$, то $\cos \varphi = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$. (Это обобщение леммы 3.7.)
- * **У3.9.** Любой многогранник можно разрезать на тетраэдры.
- * **У3.10.** Доказать, что если бы было верно, что треугольные пирамиды с одинаковыми основаниями и равными высотами равноставленны, то было бы верно и что любые два многогранника одинаковых объемов равноставленны.
- * **У3.11.** Доказать, что деновский инвариант любого параллелепипеда равен нулю (для любой аддитивной функции).
- * **У3.12.** Доказать, что деновский инвариант любой призмы равен нулю (для любой аддитивной функции).
- * **У3.13.** Доказать аналог теоремы Больяи–Гервина на сфере.

УПРАЖНЕНИЯ (ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ)

У4.1. Доказать, что интервал и прямая гомеоморфны.

Зад. ??

У4.2. Доказать, что плоскость и открытый круг гомеоморфны.

У4.3. Доказать, что следующие топологические пространства попарно не гомеоморфны: интервал, отрезок, окружность, плоскость, сфера.

У4.4. Доказать, что отрезок нельзя представить в виде объединения двух открытых непустых непересекающихся множеств.

У4.5. Для любого подмножества плоскости A расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^2$ до A определяется формулой $d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Доказать, что функция $f(x) = d(x, A)$, заданная на плоскости, непрерывна.

УПРАЖНЕНИЯ (КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТЯХ)

- ! **У5.1.** Доказать, что для любой точки $\mathbf{r}(t_0)$ регулярной кривой $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ без самопересечений существует круг с центром в точке $\mathbf{r}(t_0)$, пересечение которого с кривой есть дуга кривой $\mathbf{r}([t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2])$ и в котором эту кривую можно рассматривать либо как график гладкой функции $y(x)$, либо как график гладкой функции $x(y)$.
- ! **У5.2.** Доказать, что любые две замкнутые кривые на плоскости гомотопны (в смысле определения 5.2 без условия регулярности).
- ! **У5.3.** Доказать, что любые две незамкнутые кривые на плоскости регулярно гомотопны (в смысле определения 5.2 без условия замкнутости).
- * **У5.4.** Доказать, что любые две (незамкнутые) регулярные кривые на плоскости с одинаковыми началом и концом регулярно гомотопны с фиксированными концами.
- !* **У5.5.** Привести пример двух плоских замкнутых регулярных кривых γ_0 и γ_1 с одинаковыми числами вращения, для которых функция $\varphi_s(t) = (1-s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)$, построенная по их векторам скорости $\gamma'_0(t) = (\cos \varphi_0(t), \sin \varphi_0(t))$ и $\gamma'_1(t) = (\cos \varphi_1(t), \sin \varphi_1(t))$, при некотором s тождественно (по t) равна 0. При каких значениях числа вращения это возможно? Закончить доказательство теоремы 5.1 в этом случае.
- У5.6.** Доказать, что гомотопия кривых является отношением эквивалентности (можно рассмотреть различные варианты определения — например, см. определения 5.2 и 5.3).
- ! **У5.7.** Доказать лемму 5.2
- ! **У5.8.** Доказать лемму 5.3
- ! **У5.9.** Доказать лемму 5.4
- ! **У5.10.** Доказать лемму 5.5

УПРАЖНЕНИЯ (КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ГРУППЫ)

У6.1. Описать композиции различных типов движений (параллельный перенос $T^{\vec{a}}$, поворот R_A^α , осевая симметрия S_l , скользящая симметрия $S_l^{\vec{a}}$).

У6.2. Доказать, сопряжение параллельного переноса, поворота, симметрии с помощью любого аффинного преобразования плоскости является соответственно параллельным переносом, поворотом, симметрией.

У6.3. Описать все конечные подгруппы группы движений плоскости. Указать для каждой из них фундаментальную область (в частности, показать, что она не может быть ограниченной).

У6.4. Доказать, что подгруппа, порожденная поворотом R_A^α (вокруг точки A на угол α), является дискретной тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$.

У6.5. Доказать, что для дискретной подгруппы движений плоскости стабилизатор любой точки является конечной подгруппой.

У6.6. Какая ограниченная фигура на плоскости имеет наибольшую группу симметрий?

У6.7. Можно ли замостить плоскость

- а) произвольным треугольником;
- б) произвольным четырехугольником;
- с) произвольным пятиугольником;

У6.8. Пусть G — дискретная подгруппа движений плоскости. Доказать, что область Вороного

$$D(G, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| \leq \|x - g(x_0)\| \forall g \in G\}$$

а) является пересечением конечного числа полуплоскостей, т.е. является выпуклым (возможно, неограниченным) многоугольником,

б) является фундаментальной областью для группы G .

У6.9. Пусть G — дискретная подгруппа группы движений плоскости, для которой подгруппа параллельных переносов состоит из переносов параллельных одному направлению. Доказать, что фундаментальная область группы G не может быть ограниченной (т.е. G не является кристаллографической группой).

**** У6.10.** Описать все дискретные подгруппы движений плоскости, для которых подгруппа параллельных переносов состоит из переносов параллельных одному направлению.

*** У6.11.** Описать все «симметричные» паркеты, т.е. замощения плоскости правильными многоугольниками (возможно, различными), граничащими по сторонам, для которых любую вершину можно перевести в любую другую движением, сохраняющим паркет.