

СПИСОК ВОПРОСОВ
Наглядная геометрия и топология (А. Иванов, весна 2023)

1. Граф, вершины, ребра, отображение инцидентности, простой граф, степень вершины, лемма о сумме степеней вершин.
2. Маршруты, цепи, пути, циклы в графе. Связные графы. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости связного графа.
3. Гамильтоновы графы. Теорема Дирака.
4. Подграфы. Компоненты связности. Отношение достижимости.
5. Деревья. Пять определений дерева. Цикломатическое число.
6. Графы с весами. МОД. Алгоритм Краскала. Теорема об алгоритме Краскала.
7. Топология и топологическое пространство. Примеры: дискретная топология, метрическая топология, индуцированная топология, фактор топология.
8. Топология и топологическое пространство. Задание топологии с помощью базы окрестностей. Примеры: база метрической топологии, база индуцированной топологии.
9. Открытые и замкнутые подмножества топологического пространства, их взаимосвязь и свойства.
10. Точки прикосновения и внутренние точки подмножества топологического пространства. Внутренность, замыкание и граница подмножества топологического пространства, их свойства.
11. Непрерывные отображения топологических пространств. Критерий непрерывности. Непрерывность композиции непрерывных отображений.
12. Непрерывность в терминах баз топологий. Пример: непрерывность отображения метрических пространств.
13. Гомеоморфизмы, гомеоморфность. Гомеоморфность как отношение эквивалентности. Примеры.
14. Связность топологического пространства. Связность отрезка. Компоненты связности. Замкнутость компонент связности.
15. Достаточное условие связности. Связность и непрерывные отображения. Теорема Больцано–Коши.
16. Непрерывные кривые. Линейная связность. Связность и линейная связность.
17. Локально постоянные функции, непрерывность, описание таких функций на линейно связном пространстве.
18. Хаусдорфовы пространства. Замкнутость точки в хаусдорфовом пространстве. Хаусдорфовость метрической топологии. Пример неметрической топологии.
19. Компактность. Образ компактного пространства при непрерывном отображении. Теорема Вейерштрасса.
20. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства.
21. Замкнутость компактного подмножества хаусдорфова пространства.
22. Непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство — гомеоморфизм.
23. Фактор-топология. Непрерывная сюръекция компактного пространства — гомеоморфизм на фактор-пространство.
24. Теорема Жордана, случай простых замкнутых ломаных: компонент не более двух.
25. Теорема Жордана, случай простых замкнутых ломаных: компонент ровно две.

26. Теорема Жордана, случай простых незамкнутых ломаных.
27. Лемма «о перегородках» (следствие из теоремы Жордана для ломаных).
28. Топологический граф. Вложимость графа в пространство. Планарные и плоские графы.
29. Невложимость графа $K_{3,3}$ в плоскость в виде объединения ломаных.
30. Эквивалентность вложимости графа в плоскость в виде объединения ломаных и непрерывной вложимости.
31. Теорема Жордана для простой непрерывной замкнутой кривой, доказательство того, что компонент не меньше двух.
32. Теорема Жордана для простой непрерывной замкнутой кривой, доказательство того, что компонент ровно две.
33. Отображения графов. Изоморфизмы графов. Гомеоморфные графы. Плоские и планарные графы. Формулировка теоремы Понтрягина–Куратовского.
34. Формула Эйлера для плоских графов.
35. Раскраски плоских графов. Теорема Хивуда о пяти красках.
36. Триангуляции подмножества плоскости. Лемма Шпернера, доказательство.
37. Лемма Шпернера, формулировка и применение к задаче о разделе пирога..
38. лемма Шпернера, формулировка. Теорема Брауэра в размерности два.
39. Многогранные поверхности. Многогранники. Формулировка теоремы Жордана для замкнутых многогранных поверхностей.
40. Выпуклые многогранники. Критерий выпуклости многогранника.
41. Граф многогранника. Двойственный граф. Их планарность для выпуклого многогранника. Диаграмма Шлегеля.
42. Формула Эйлера для выпуклого многогранника. Правильные многогранники.
43. Теорема Минковского о еде многогранника. Доказательство равенства нулю суммы векторов еда.
44. Теорема Минковского о еде многогранника. Критерий центральной симметричности выпуклого многогранника.
45. Равновеликость и равноставленность многоугольников и многогранников. Теорема Бойяи, Уоллеса, Гервина (формулировка и схема доказательства).
46. Функция Дена семейства многогранников. Инварианты Дена. Вычисление инвариантов Дена для куба и для призмы.
47. Теорема Дена (необходимое условие равноставленности многогранников). Формулировка теоремы Дена–Сидлера.
48. Следствие теоремы Дена: тетраэдр и куб не равноставлены.
49. Следствие теоремы Дена: тетраэдр и октаэдр не равноставлены.
50. Равнодополняемые многогранники и инварианты Дена.
51. Тетраэдр Хилла и координатный тетраэдр. Решение третьей проблемы Гильберта.
52. Топологическая классификация замкнутых многогранных поверхностей. Формулировка теоремы, склейки модельных поверхностей из многоугольников.

53. Топологическая классификация замкнутых многогранных поверхностей. Доказательство достаточности двух серий.
54. Ориентируемые и неориентируемые многогранные поверхности. Цепочки граней, сохраняющие и обращающие ориентацию. Примеры.
55. Топологическая классификация замкнутых многогранных поверхностей. Эйлерова характеристика. Схема доказательства попарной негомеоморфности.
56. Формулировка теоремы Коши, комбинаторной и геометрической лемм Коши. Доказательство теоремы на основе этих двух лемм.
57. Формулировка теоремы Коши. Доказательство комбинаторной леммы Коши.
58. Формулировка теорема Коши. Доказательство геометрической леммы Коши (лемма «о плече» без доказательства).
59. Изгибаемые многогранники. Неизгибаемость выпуклых многогранников. Октаэдр Брикара — пример погруженного изгибаемого многогранника.