

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

План. Топология, топологическое пространство, примеры, топология, порожденная базой, замкнутые множества, внутренние точки и точки прикосновения, внутренность и замыкание, непрерывность, критерий непрерывности, индуцированная топология, фактор топология, гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, связное пространство, связная компонента, непрерывная кривая, линейно связное топологическое пространство, линейно связная компонента, локально постоянная функция, хаусдорфовость, открытое покрытие топологического пространства, открытое покрытие подмножества топологического пространства, подпокрытие, компактность, теоремы Больцано, Вейерштрасса и Коши.

В данном разделе мы познакомимся с основами топологии — раздела математики, изучающего понятие непрерывности. Вопросы непрерывности очень важны не только при изучении свойств функций, но и более общих и наглядных объектов, таких как кривые и поверхности. Более детальные курсы топологии можно найти, например, в [1] и [2].

2.1 Топологические пространства и непрерывные отображения

Напомним определение непрерывной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ из курса математического анализа. Функция f называется *непрерывной в точке* $x \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, что для любой точки x' , для которой $|x - x'| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Обозначим через $U_\varepsilon(x)$ интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Множество $U_\varepsilon(x)$ принято называть ε -окрестностью точки x . Тогда предыдущее определение можно переписать так: для любой ε -окрестности $U_\varepsilon(x)$ точки x существует такая δ -окрестность $U_\delta(f(x))$ точки $f(x)$ (вообще говоря, $\delta > 0$ зависит от ε), что $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$, то есть образ δ -окрестности точки x содержится в ε -окрестности точки $f(x)$.

Вместо симметричных ε -окрестностей точки можно рассматривать произвольные интервалы, содержащие эту точку. Следующее определение эквивалентно предыдущему (Проверьте!). Функция f называется *непрерыв-*

ной в точке $x \in \mathbb{R}$, если

$$\forall(a, b) \ni f(x) \exists(c, d) \ni x : f((c, d)) \subset (a, b).$$

Интервал, напомним, является простейшим примером открытого подмножества прямой, — подмножества, каждая точка которого входит в него вместе с некоторой ε -окрестностью. Оказывается, именно свойства открытых множеств играют решающую роль в определении понятия непрерывности.

2.1.1 Топология и топологическое пространство

Мы будем использовать следующий подход. Пусть дано множество X . Фиксируем семейство его подмножеств и объявим эти множества открытыми. Оказывается, если выбранное семейство удовлетворяет набору простых аксиом, то получается содержательная теория непрерывных отображений, обобщающая понятие непрерывной функции из математического анализа. Такое семейство подмножеств называется *топологией*, а множество с фиксированной топологией называется *топологическим пространством*. Перейдем к формальностям.

Определение 2.1. Пусть X — произвольное множество и $\tau = \{U_\alpha\}$ — некоторое семейство подмножеств множества X . Семейство τ называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) само пространство X и пустое множество принадлежат τ ;
- (2) объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ ;
- (3) пересечение любого конечного семейства множеств из τ также принадлежит τ .

Определение 2.2. Множество X с фиксированной топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается через (X, τ) . Элементы множества X называются *точками*. Множества из τ называются *открытыми* в (X, τ) .

Замечание 2.3. Свойства из определения 2.1 иногда называют *аксиомами открытых множеств*. Таким образом, задать топологию на множестве X — это значит фиксировать семейство подмножеств в X , удовлетворяющих аксиомам открытых множеств.

Открытые множества используются, в том числе, для того, чтобы определить окрестности точки.

Определение 2.4. *Окрестностью точки x* топологического пространства (X, τ) будем называть произвольное открытое подмножество U , т.е. $U \in \tau$, содержащее x .

Замечание 2.5. Ниже, там, где из контекста понятно, о какой именно топологии идет речь, мы часто будем обозначать топологическое пространство (X, τ) просто через X .

Простейшие примеры

Пример 2.6. Пусть X — произвольное множество. Семейство τ_d , состоящее из всех подмножеств множества X , является, очевидно, топологией. Эта топология называется *дискретной*, а само пространство — *дискретным топологическим пространством*. Каждое подмножество дискретного топологического пространства является открытым. Любое подмножество дискретного топологического пространства является окрестностью каждой своей точки. В частности, каждая точка является своей окрестностью.

Пример 2.7. Семейство $\tau_0 = \{X, \emptyset\}$ является топологией на X . Эта топология называется *тривиальной* или *антидискретной*. Каждая точка топологического пространства (X, τ_0) обладает единственной окрестностью — множеством X . Каждое собственное (т.е. не совпадающее со всем X и не пустое) подмножество в X не является открытым.

Пример: метрическая топология

На каждом метрическом пространстве можно естественным образом задать топологию. Поэтому метрические пространства являются важным частным случаем топологических пространств.

Напоминание 2.8. Пусть X — некоторое множество. Напомним, что функция $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *метрикой* или, иногда, *функцией расстояния*, если она удовлетворяет следующим свойствам

(**неотрицательность и невырожденность**) для любых $x, y \in X$ выполнено $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$, если и только если $x = y$,

(**симметричность**) для любых $x, y \in X$ выполнено $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(**неравенство треугольника**) для любых $x, y, z \in X$ выполнено неравенство $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Если на множестве X фиксирована функция расстояния ρ , то пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*. Элементы метрического пространства называются *точками*. Значение $\rho(x, y)$ функции расстояния ρ на паре точек x и y называется *расстоянием между точками*.

Пространство \mathbb{R}^n с евклидовым расстоянием — стандартный пример метрического пространства.

Замечание 2.9. Иногда функцией расстояния называют неотрицательную симметричную функцию $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, равную нулю на диагонали. В этом смысле, например, «школьное» расстояние между подмножествами A и B метрического пространства, определенное как $\inf \{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$ является расстоянием, но не является метрикой.

Напоминание 2.10. Функция $h: L \rightarrow \mathbb{R}$ на вещественном линейном пространстве L называется *нормой*, если она удовлетворяет следующим свойствам

(**неотрицательность и невырожденность**) $h(x) \geq 0$ для любого $x \in L$, причем $h(x) = 0$, если и только если $x = 0$,

(**полуоднородность**) для любого $x \in L$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $h(\lambda x) = |\lambda|h(x)$,

(**неравенство треугольника**) для любых $x, y \in L$ выполнено неравенство $h(x+y) \leq h(x) + h(y)$.

Линейное пространство, на котором задана некоторая норма, называют *нормированным пространством*. Обычно норму $h(x)$ вектора x обозначают через $\|x\|$ или просто через $|x|$. Если \mathbb{R}^n — евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ является нормой (Проверьте!), которая называется *евклидовой нормой*.

Любое нормированное пространство $(L, \|\cdot\|)$ можно превратить в метрическое, взяв в качестве метрики функцию $d(x, y) = \|x - y\|$ (Проверьте аксиомы метрики!).

Пусть x — произвольная точка метрического пространства (X, ρ) . *Открытым шаром с центром в x радиуса ε* называется множество всех точек y из X , таких, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Точка a множества $A \subset X$ называется *внутренней точкой для A* , если в A содержится некоторый открытый шар $O_\varepsilon(a)$. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества A* и обозначается через $\text{Int } A$. Ясно, что $\text{Int } A \subset A$, обратное, вообще говоря, неверно. Множество A называется *открытым в X* (как в метрическом пространстве), если его внутренность совпадает с ним самим: $A = \text{Int } A$.

Утверждение 2.11. Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. Объединение любого семейства множеств, открытых в X , открыто в X , и пересечение конечного числа множеств, открытых в X , также открыто в X .

Доказательство. Действительно, пусть $\{A_\alpha\}$ — произвольное семейство открытых подмножеств пространства X . Обозначим через A объединение всех множеств A_α , и пусть a — произвольная точка множества A . Тогда существует такое α_0 , что $a \in A_{\alpha_0}$, а множество A_{α_0} — открыто по условию. Поэтому существует открытый шар $O_\varepsilon(a)$, целиком лежащий в A_{α_0} . Но тогда $O_\varepsilon(a) \subset A$, и, значит, каждая точка множества A — внутренняя, т.е., по определению, A — открыто в метрическом пространстве X .

Пусть теперь α пробегает конечное множество значений: $\alpha = 1, \dots, N$. Обозначим через A' пересечение всех множеств A_α , и пусть a — произвольная точка из A' . Тогда $a \in A_\alpha$ для каждого $\alpha = 1, \dots, n$. Поэтому для каждого α существует такое ε_α , что шар $O_{\varepsilon_\alpha}(a)$ целиком лежит в A_α . Положим $\varepsilon = \min_\alpha \varepsilon_\alpha$ и заметим, что $\varepsilon > 0$, так как набор множеств A_α конечен. Тогда $O_\varepsilon(a) \subset O_{\varepsilon_\alpha}(a)$ для любого α , и поэтому $O_\varepsilon(a) \subset A'$, т.е. каждая точка a из A' является внутренней для A' . Доказательство закончено. \square

Так как само множество X очевидно открыто, а пустое множество открыто по определению, то имеет место следующее утверждение.

Следствие 2.12. Семейство всех открытых подмножеств метрического пространства образуют топологию.

Определение 2.13. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Топология из следствия 2.12, т.е. топология, состоящая из всех открытых подмножеств множества X (открытых как в метрическом пространстве), называется *метрической* или *порожденной метрикой ρ* и обозначается через τ_ρ .

Пример 2.14. На произвольном непустом множестве X рассмотрим функцию расстояния, равную 1 на любой паре различных элементов из X . Легко проверить, что соответствующая метрическая топология совпадает с дискретной топологией на множестве X . Поэтому дискретная топология является метрической.

Упражнение 2.1. Сколько различных топологий можно ввести на множестве X , состоящем из двух элементов? Каждая ли из них является метрической?

Пример: задание топологии с помощью базы окрестностей

Описанное выше конструкцию метрической топологии с помощью открытых шаров можно обобщить. Оказывается топологию можно построить, начав с некоторого семейства окрестностей со специальными свойствами.

Определение 2.15. Пусть X — произвольное множество. Семейство β подмножеств множества X называется *базой окрестностей*, если

- (1) каждый элемент $x \in X$ содержится в некотором $U \in \beta$, и
- (2) для любых двух пересекающихся $U, V \in \beta$ и любого $x \in U \cap V$ найдется такой $W \in \beta$, что $x \in W \subset U \cap V$.

Элементы множества X , на котором задана некоторая база, называются *точками*. Каждый элемент базы β , содержащий точку x , будем называть *β -окрестностью точки x* или ее *базовой окрестностью*.

Задача 2.16. Пусть β — некоторая база окрестностей на множестве X . Пусть конечный набор V_1, \dots, V_k элементов базы имеет непустое пересечение. Тогда для каждой точки $x \in \bigcap_{i=1}^k V_i$ существует элемент W базы β такой, что $x \in W \subset \bigcap_{i=1}^k V_i$.

Пусть дано множество X с базой β . Будем называть подмножество $A \subset X$ *открытым* (относительно базы β), если для любой точки $x \in A$ найдется такое $U \in \beta$, что $x \in U \subset A$ (т.е. каждая точка входит в A вместе с некоторой своей базовой окрестностью). Пустое множество будем считать открытым по определению.

Замечание 2.17. Как нетрудно заметить, это определение аналогично определению открытого подмножества метрического пространства (вместо открытых шаров берутся элементы базы, см. ниже пример 2.20).

Любой элемент любой базы на X является открытым подмножеством в X (в смысле этой базы).

Утверждение 2.18. *Непустое подмножество A множества X с базой β является открытым в смысле этой базы, если и только если $A = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ для некоторого семейства $\{U_{\alpha}\} \subset \beta$.*

Доказательство. Действительно, если A открыто, то, по определению, для каждой точки $x \in A$ существует $U = U_x \in \beta$ такое, что $x \in U_x \subset A$. Тогда $\cup_{x \in A} U_x = A$, что и требовалось. Обратно, если $A = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$, где $\{U_{\alpha}\} \subset \beta$, то для каждого $x \in A$ найдется U_{α} такое, что $x \in U_{\alpha} \subset A$, то есть A — открыто. \square

Утверждение 2.19. Пусть X — произвольное множество с некоторой базой β , и τ_{β} — семейство всех открытых подмножеств множества X (относительно этой базы). Тогда τ_{β} — топология на X .

Доказательство. Пустое множество является открытым по определению; каждая точка $x \in X$ содержится в некотором элементе базы, который, очевидно, содержится в X , поэтому X тоже открыто, что доказывает первое свойство топологии.

Пусть $\{U_{\alpha}\}$ — произвольное семейство открытых множеств (в смысле базы β), положим $U = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$, и пусть $x \in U$ — произвольная точка. Тогда $x \in U_{\alpha}$ для некоторого α ; множество U_{α} открыто (относительно базы), поэтому существует элемент базы V такой, что $x \in V \subset U_{\alpha}$, откуда $x \in V \subset U$, и, значит, U — открыто (относительно базы).

Наконец, пусть U_1, \dots, U_k — произвольное конечное семейство открытых множеств (в смысле базы), $U = \cap_{i=1}^k U_i$, и $x \in U$ — произвольная точка из пересечения. Так как каждое U_i — открыто, то для каждого i существует элемент базы V_i такой, что $x \in V_i \subset U_i$. Поэтому $x \in \cap_i V_i$, и существует элемент базы V , $x \in V \subset \cap_i V_i \subset U$, см. задачу 2.16. Поэтому U — открыто (в смысле базы), что и требовалось. \square

Будем называть топологию τ_{β} *топологией с базой β* и говорить, что топология τ_{β} порождена базой β или задана с помощью базы β .

Таким образом, каждая база порождает некоторую топологию. При этом разные базы могут задавать одну и ту же топологию (Приведите пример!). Обратно, пусть τ — произвольная топология на X . Тогда $\tau = \tau_{\beta}$ для некоторой базы β на X (Проверьте!).

Пример 2.20. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Семейство $\beta_{\rho} = \{U_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$ открытых шаров в метрическом пространстве образует базу. Действительно, каждая точка x метрического пространства, очевидно, содержится в открытом шаре $U_r(x)$ любого положительного радиуса. Далее, пусть шары $U_a(x)$ и $U_b(y)$ пересекаются, и z — произвольная точка их пересечения. Положим $c = \min \{a - \rho(x, z), b - \rho(y, z)\}$. Так как $z \in W := U_a(x) \cap U_b(y)$, то $c > 0$. Остается показать, что $U_c(z) \subset W$. Это следует из неравенства треугольника: если $t \in U_c(z)$, то

$$\rho(x, t) \leq \rho(x, z) + \rho(z, t) < \rho(x, z) + c \leq \rho(x, z) + (a - \rho(x, z)) = a,$$

откуда $t \in U_a(x)$. Включение $t \in U_b(y)$ проверяется точно так же. Итак семейство β_{ρ} образует базу окрестностей. Порожденная этой базой топология — это метрическая топология (Проверьте!).

Замечание 2.21. Любая топология, определенная с помощью аксиом топологии, обладает некоторой базой. Например, в качестве базы можно взять всю топологию.

2.1.2 Замкнутые подмножества

Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Его подмножество F назовем *замкнутым*, если дополнение $X \setminus F$ открыто в X .

Следующее утверждение является прямым следствием аксиом открытых множеств и простейших свойств теоретико-множественных операций (объединения, пересечения и дополнения).

Утверждение 2.22. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда его замкнутые подмножества обладают следующими свойствами.

- (1) Множества \emptyset и X являются замкнутыми.
- (2) Пересечение произвольного семейства замкнутых подмножеств пространства X замкнуто в X .
- (3) Объединение любого конечного семейства замкнутых подмножеств пространства X замкнуто в X .

Замечание 2.23. Свойства замкнутых множеств из утверждения 2.22 иногда называют *аксиомами замкнутых множеств*. Если фиксировать семейство подмножеств некоторого множества X , удовлетворяющее этим свойствам, и объявить их замкнутыми подмножествами в X , а дополнения до них объявить открытыми, то так определенная система открытых подмножеств будет удовлетворять аксиомам открытых множеств и, следовательно, задаст некоторую топологию на X (Проверьте!).

Пример 2.24. Пусть (X, τ_d) — топологическое пространство с дискретной топологией. Тогда любое подмножество X — замкнуто (и, одновременно, открыто).

Пример 2.25. Пусть (X, τ_0) — топологическое пространство с тривиальной топологией. Тогда у X только два замкнутых подмножества, а именно, \emptyset и само X .

В качестве следующего примера рассмотрим метрические пространства. В этом случае понятие замкнутого множества можно естественно определить с помощью метрики. Напомним соответствующую конструкцию и покажем, что она эквивалентна топологической.

Конструкция 2.26. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $A \subset X$ — произвольное его подмножество. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества A* , если любой открытый шар $O_\varepsilon(x)$ пересекается с A . В частности, каждая точка $a \in A$ является точкой прикосновения множества A , хотя обратное неверно.

Замыканием $\text{Cl} A$ подмножества A называется множество всех точек прикосновения множества A . Ясно, что $A \subset \text{Cl} A$; обратное, вообще говоря, неверно. Если замыкание $\text{Cl} A$ множества A совпадает с самим A , т.е. $\text{Cl} A = A$, то множество A называется *замкнутым в X* .

Пример 2.27. Пусть $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$. Множество всех точек прикосновения интервала (a, b) — это отрезок $[a, b]$. В частности, a и b — точки прикосновения множества (a, b) . Поэтому замыкание $\text{Cl}(a, b)$ совпадает с отрезком $[a, b]$.

Утверждение 2.28. Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство. Подмножество $A \subset X$ является открытым, если и только если его дополнение, т.е. множество $X \setminus A$, замкнуто.

Доказательство. Пусть сначала A — открыто. Рассмотрим произвольную точку $a \in A$. По определению, существует открытый шар $O_\varepsilon(a)$, целиком лежащий в A . Но тогда этот шар не пересекается с $X \setminus A$, поэтому a не является точкой прикосновения множества $X \setminus A$. Но тогда $\text{Cl}(X \setminus A) = X \setminus A$, т.е. дополнение до A замкнуто в X .

Обратно: пусть теперь множество $X \setminus A$ замкнуто в X . Это означает, что никакая точка из A не является точкой прикосновения для $X \setminus A$. Пусть a — произвольная точка из A . Тогда существует открытый шар $O_\varepsilon(a)$ не пересекающийся с $X \setminus A$ и, значит, этот шар целиком лежит в A . Последнее означает, что каждая точка из A является внутренней для A , т.е. A открыто. Доказательство закончено. \square

2.1.3 Топологические внутренность и замыкание

Используя понятие окрестности точки, можно перенести понятие внутренности и замыкания со случая метрического пространства на общий случай топологического пространства.

Определение 2.29. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Точка a множества $A \subset X$ называется *внутренней точкой для A* , если в A содержится некоторая окрестность U точки a . Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества A* и обозначается через $\text{Int} A$.

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества $A \subset X$* , если любая окрестность точки x пересекается с A . *Замыканием* $\text{Cl} A$ множества A называется множество всех его точек прикосновения.

Утверждение 2.30. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ является открытым, если и только если $\text{Int} A = A$. Множество $A \subset X$ является замкнутым, если и только если $\text{Cl} A = A$.

Доказательство. Каждое открытое множество само является окрестностью каждой своей точки, поэтому совпадает со своей внутренностью. Обратно, если каждая точка множества A является внутренней, то для каждой точки $a \in A$ существует открытое множество $U(a) \subset A$, содержащее a .

Возьмем объединение $U = \cup_{a \in A} U(a)$. По определению, U — открыто. Кроме того, так как каждое $U(a) \subset A$, то само множество U содержится в A . В то же время $A \subset U$, так как каждая точка $a \in U(a)$. Поэтому $U = A$ и, в частности, A — открыто.

Далее, множество A — замкнуто, если и только если $X \setminus A$ открыто. Последнее, как мы только что показали, равносильно тому, что каждая точка из $X \setminus A$ обладает окрестностью, лежащей в $X \setminus A$, т.е. окрестностью, не пересекающейся с A , что, в свою очередь, равносильно включению $\text{Cl } A \subset A$, откуда $\text{Cl } A = A$. Доказательство закончено. \square

Следствие 2.31. Пусть A — произвольное подмножество топологического пространства (X, ρ) . Тогда внутренность $\text{Int } A$ множества A открыта, а замыкание $\text{Cl } A$ множества A — замкнуто.

Если топология задана с помощью некоторой базы β , то при определении внутренности и точек прикосновения достаточно рассматривать базовые окрестности.

Утверждение 2.32. Пусть топология τ пространства X задана базой β . Тогда точка $a \in A$ является внутренней для A , если и только если существует базовая окрестность $V \in \beta$ такая, что $a \in V \subset A$. Точка $x \in X$ является точкой прикосновения для A , если и только если любая базовая окрестность точки x пересекает A .

Доказательство. Начнем с первого утверждения. С одной стороны, базовая окрестность является окрестностью, поэтому если существует $V \in \beta$ такая, что $a \in V \subset A$, то точка a внутренняя по определению. Обратное, если $U \in \tau$ — открытая окрестность точки a такая, что $U \subset A$, то, так как топология порождена базой, существует элемент базы V такой, что $a \in V \subset U \subset A$, что и требовалось.

Далее, если x — предельная точка множества A , то любая окрестность точки x , в том числе и базовая, пересекается с A . Обратное, пусть каждая базовая окрестность точки x пересекает A , и U — произвольная окрестность точки x . Тогда существует $V \in \beta$ такая, что $x \in V \subset U$. Но V пересекается с A , и $(V \cap A) \subset (U \cap A)$, то есть $U \cap A$ не пусто. \square

Определение 2.33. Топологической *границей* множества $A \subset X$ называется множество $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$.

Заметим, что граница ∂A произвольного множества A замкнута как пересечение двух замкнутых множеств $\text{Cl } A$ и $X \setminus \text{Int } A$.

2.1.4 Непрерывные отображения

Перейдем к определению непрерывных отображений.

Определение 2.34. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство (Y, τ_Y) называется *непрерывным* в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V(f(x_0)) \in \tau_Y$ точки

$f(x_0)$ в пространстве Y существует такая окрестность $U(x_0) \in \tau_X$ точки x_0 в пространстве X , что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Ясно, что непрерывность зависит от выбора топологий. Прежде чем приводить примеры, докажем критерий непрерывности.

Напоминание 2.35. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение множеств, и $y \in Y$ — произвольный элемент множества Y . Каждый элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$ называется *прообразом* элемента y . *Полным прообразом элемента y* называется подмножество $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \subset X$, т.е. полный прообраз — это множество всех прообразов. Аналогично, для произвольного $A \subset Y$ множество $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ называется *полным прообразом* подмножества A . Пусть $A \subset Y$ — произвольное подмножество в Y и $\{U_\alpha\}$ — произвольное семейство подмножеств множества Y . Тогда

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(Y) = X$;
- $f^{-1}(\cup_\alpha U_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$;
- $f^{-1}(\cap_\alpha U_\alpha) = \cap_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$;
- $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Теорема 2.36. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, если и только если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

- *прообраз любого открытого множества $A \subset Y$ открыт в X ;*
- *прообраз любого замкнутого множества замкнут.*

Доказательство. Пусть сначала f непрерывно. Рассмотрим произвольное открытое множество $A \subset Y$ и обозначим через $f^{-1}(A)$ его прообраз при отображении f . Пусть $x \in f^{-1}(A)$ — произвольная точка из прообраза; обозначим через $y = f(x)$ образ точки x при отображении f . Тогда y принадлежит открытому множеству A . Возьмем A в качестве окрестности точки y : $V(y) = A$. Так как отображение f непрерывно в точке x , то существует окрестность $U(x)$ точки x , такая, что $f(U(x)) \subset V(y) = A$, но тогда $U(x) \subset f^{-1}(A)$, и множество $f^{-1}(A)$ открыто по утверждению 2.30.

Обратно, пусть прообраз произвольного открытого подмножества из Y открыт в X . Фиксируем произвольную точку $x \in X$, и пусть, как и выше, $y = f(x)$. Рассмотрим произвольную окрестность $V(y)$ точки Y . По определению, $V(y)$ — открытое множество, значит, $f^{-1}(V(y))$ — открытое подмножество в X , причем $x \in f^{-1}(V(y))$. Выберем в качестве окрестности $U(x)$ точки x множество $f^{-1}(V(y))$. Тогда $f(U(x)) \subset V(y)$, поэтому отображение f непрерывно в произвольной точке x , что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства утверждения осталось показать, что сформулированные в нем условия непрерывности эквивалентны. Это немедленно следует из соотношения $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, справедливого для произвольного множества $A \subset Y$ и отображения f . Доказательство закончено. \square

Замечание 2.37. Вообще говоря, образ открытого (замкнутого) множества при непрерывном отображении не обязан быть открытым (замкнутым). Приведите соответствующие примеры.

Упражнение 2.2. Описать все непрерывные отображения из произвольного топологического пространства X в пространство с тривиальной топологией. Описать все непрерывные отображения из пространства с дискретной топологией в произвольное топологическое пространство.

Следствие 2.38. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Доказательство. Действительно, пусть (X_i, τ_i) , $i = 1, 2, 3$, — топологические пространства, и $f: X_1 \rightarrow X_2$, $g: X_2 \rightarrow X_3$ — непрерывные отображения. Рассмотрим композицию $g \circ f: X_1 \rightarrow X_3$. Пусть $U \in \tau_3$ — произвольное открытое подмножество в (X_3, τ_3) . Заметим, что $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. По теореме 2.36 множество $g^{-1}(U)$ открыто так как g непрерывно, поэтому $f^{-1}(g^{-1}(U))$ тоже открыто по той же теореме в силу непрерывности f . Таким образом, прообраз каждого открытого множества $U \subset X_3$ при отображении $g \circ f$ открыт в X_1 , поэтому отображение $g \circ f$ непрерывно. \square

Следующие общие свойства непрерывных отображений легко следуют из теоремы 2.36. Напомним, что отображение множества в множество чисел называется *функцией*. Если рассматривается функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ на топологическом пространстве X , то на \mathbb{R} предполагается заданной стандартная топология.

Предложение 2.39. (1) *Тождественное отображение топологического пространства в себя непрерывно.*

(2) *Если $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции, и λ — произвольное вещественное число, то следующие функции также непрерывны: $\lambda f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f + g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f g: X \rightarrow \mathbb{R}$, и если $g(x) \neq 0$ при всех $x \in X$, то и $f/g: X \rightarrow \mathbb{R}$.*

2.1.5 Непрерывность и база топологии

Если топология топологических пространств заданы с помощью базы β , т.е. $\tau = \tau_\beta$, то при определении непрерывности можно ограничиться рассмотрением базовых окрестностей (а не всех).

Утверждение 2.40. *Пусть топологии пространств (X, τ_X) и (Y, τ_Y) порождены базами β_X и β_Y соответственно, и пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение. Тогда*

- *Отображение f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда для любой базовой окрестности $V \in \beta_Y$ точки $f(x)$, т.е. $f(x) \in V \in \beta_Y$, существует базовая окрестность $U \in \beta_X$ точки x , т.е. $x \in U \in \beta_X$ такая, что $f(U) \subset V$.*

- *Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждого элемента базы $V \in \beta_Y$ открыт в X .*

Доказательство. 1. Пусть сначала $f \in C(x)$. Так как каждая базовая окрестность — открытое множество, для любой базовой окрестности V точки $f(x)$ существует открытая окрестность $A \in \tau_X$ точки x такая, что $f(A) \subset V$. Но $x \in A$ и, так как τ_X порождена базой β_X , существует базовая окрестность $U \in \beta_X$ точки x , целиком лежащая в A . Но $f(U) \subset f(A) \subset V$, что и требовалось.

Обратно, пусть $B \in \tau_Y$ — произвольная открытая окрестность точки $f(x)$. Так как топология τ_Y порождена базой β_Y и $f(x) \in B$, то существует элемент $V \in \beta_Y$ такой, что $f(x) \in V \subset B$. По предположению, существует $U \in \beta_X$ такое, что $x \in U$ и $f(U) \subset V$. Но U — открытое подмножество в X , и $f(U) \subset V \subset B$, что и требовалось.

2. Пусть сначала f — непрерывно. Так как любой элемент V базы β_Y является открытым подмножеством в Y , то по теореме 2.36 заключаем, что $f^{-1}(V)$ открыто в X , что и требовалось. Обратно, пусть $B \in \tau_Y$ — произвольное открытое подмножество в Y . Тогда по утверждению 2.19 множество B представимо в виде объединения элементов базы, т.е. $B = \cup_{\alpha} V_{\alpha}$. Тогда $f^{-1}(B) = \cup_{\alpha} f^{-1}(V_{\alpha})$, а каждое множество $f^{-1}(V_{\alpha})$ является открытым по предположению, поэтому и $f^{-1}(B)$ открыто как объединение открытых множеств. Доказательство закончено. \square

Пример 2.41. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Превратим их в топологические пространства, наделив стандартными метрическими топологиями. Тогда определение непрерывности принимает следующий стандартный для метрических пространств вид. Отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств называется непрерывным в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $f(U_{\delta}(x_0)) \subset V_{\varepsilon}(f(x_0))$, т.е. из $\rho_X(x_0, x) < \delta(\varepsilon)$ следует, что $\rho_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

Пример 2.42. Еще один важный частный случай — это функции на топологическом пространстве X . Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая зависящая от ε окрестность $U(x_0)$ этой точки в пространстве X , что для любой точки x из $U(x_0)$ имеет место неравенство $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

Замечание 2.43. Рассмотрим отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Это отображение сопоставляет каждому $t \in [a, b]$ точку $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, тем самым задавая функции $x_i(t)$, которые будем называть *координатными функциями отображения γ* . Непосредственно проверяется следующее несложное, но полезное предложение.

Предложение 2.44. *Отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все задаваемые им координатные функции.*

Замечание 2.45. Выбрав подходящим образом базы, можно построить довольно неожиданные примеры непрерывных (или разрывных — не являющихся непрерывными) функций.

Пример 2.46. Рассмотрим множество \mathbb{R} и семейство его подмножеств β , состоящее из всевозможных лучей $(a, +\infty)$. Легко проверить, что β — база. Тогда функция $f(x) = 2x$ непрерывна, но функция $g(x) = -x$ непрерывной не является (проверьте), если рассматривать функции f и g как отображения из (\mathbb{R}, β) в (\mathbb{R}, β) .

Следствие 2.47. Пусть p — произвольная точка в \mathbb{R}^n . Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho_p(x) = |px|$. Тогда ρ_p — непрерывная функция на \mathbb{R}^n .

Доказательство. Действительно, если $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$, то координаты точки x — непрерывные функции на \mathbb{R}^n , и расстояние $\rho_p(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2}$ является композицией непрерывных функций, откуда и следует непрерывность ρ_p . \square

2.1.6 Конструкции

В данном разделе мы опишем несколько стандартных конструкций, позволяющих построить новые топологии из имеющихся.

Дизъюнктное объединение

Пусть X и Y — топологические пространства с топологиями τ_X и τ_Y , причем множества X и Y не пересекаются. Тогда на множестве $X \cup Y$ определена топология с базой $\tau_X \cup \tau_Y$. Другими словами, множество $U \subset X \cup Y$ открыто в этой топологии, если и только если $U \cap X$ и $U \cap Y$ открыты в X и Y соответственно, или, что все равно, $U = V_X \cup V_Y$ — объединение открытых множеств $V_X \subset X$ и $V_Y \subset Y$. Эта топология называется топологией *дизъюнктного объединения* или *несвязной суммы*.

Замечание 2.48. Если топология на X и Y задана базами β_X и β_Y соответственно, то в качестве базы на $X \cup Y$ можно взять $\beta_X \cup \beta_Y$. Проверьте, что эта база порождает топологию несвязной суммы.

Индукцированная топология

Пусть X — произвольное топологическое пространство с топологией τ_X , и Y — непустое подмножество в X . Положим $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$.

Упражнение 2.3. Проверьте, что семейство $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$ подмножеств множества Y является топологией на Y .

Определение 2.49. Пусть $Y \subset X$ — произвольное непустое подмножество топологического пространства X . Топология τ_Y называется *индуцированной из X* .

Пример 2.50. Будем рассматривать плоскость как модель листа бумаги, тогда каждый рисунок можно рассматривать как подмножество в \mathbb{R}^2 . В частности, так можно представлять себе буквы. Описанная выше конструкция индуцированной топологии превращает все такие рисунки в топологические пространства. Также получаются топологические пространства, соответствующие геометрическим фигурам, например ломаной, треугольнику, окружности, кругу и т.д.

Упражнение 2.4. Предположим, что топология на X задана базой β_X , и, как и выше, $Y \subset X$. Проверьте, что семейство $\beta_Y = \{Y \cap U : U \in \beta_X\}$ подмножеств множества Y является базой окрестностей на Y , и что топология, заданная базой β_Y , совпадает с индуцированной топологией τ_Y .

Пример 2.51. Пусть X — окружность $x^2 + y^2 = 1$ на плоскости \mathbb{R}^2 с координатами x, y . Тогда индуцированную базу окрестностей будут составлять всевозможные пересечения окружности с открытыми кругами, т.е. открытые дуги окружности, и сама окружность.

Фактор топологии

Опишем еще одну важную конструкцию, позволяющую строить новые топологические пространства (см. необходимые понятия в напоминании 1.21).

Пусть (X, τ) — топологическое пространство с топологией τ , и предположим, что на множестве X задано некоторое отношение эквивалентности. Рассмотрим следующее семейство подмножеств фактор множества X/R :

$$\tau_R = \{U \subset X/R \mid \pi^{-1}(U) \in \tau\},$$

где $\pi: X \rightarrow X/R$ — каноническая проекция.

Следующее утверждение — простое упражнение на свойства полного прообраза.

Лемма 2.52. Семейство τ_R удовлетворяет аксиомам топологии.

Доказательство. Действительно, $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$ и $\pi^{-1}(X/R) = X \in \tau$, поэтому выполнена первая аксиома топологии. Далее, пусть $\{U_\alpha\} \subset \tau_R$ произвольное семейство элементов τ_R . Тогда $\pi^{-1}(U_\alpha) \in \tau$ для каждого α . С другой стороны, по упоминавшимся уже свойствам полного прообраза, $\pi^{-1}(\cup_\alpha U_\alpha) = \cup_\alpha \pi^{-1}(U_\alpha) \in \tau$. Наконец, пусть $\{U_i\} \subset \tau_R$ произвольное конечное семейство элементов τ_R . Тогда $\pi^{-1}(U_i) \in \tau$ для каждого i , и $\pi^{-1}(\cap_i U_i) = \cap_i \pi^{-1}(U_i) \in \tau$. \square

Топология τ_R называется *фактор-топологией*, а топологическое пространство $(X/R, \tau_R)$ — *фактор-пространством*. Из определения фактор-топологии вытекает следующий результат.

Лемма 2.53. Каноническая проекция $\pi: X \rightarrow X/R$ на фактор-пространство непрерывна.

Замечание 2.54. Топологии на фиксированном множестве естественным образом упорядочены по включению. Фактор-топология — самая большая топология на X/R , в которой каноническая проекция непрерывна.

Пример 2.55 (Склеивание пары точек). Пусть X — топологическое пространство, $x, y \in X$ — пара его различных точек. Определим отношение эквивалентности R на X , положив $a \sim b$, если и только если $a = b$, или $a = x$ и $b = y$, или $b = x$ и $a = y$. Тогда пространство X/R говорят, что оно получено из X *склеивкой точек x и y* .

Пример 2.56 (Букет). Пусть X и Y — топологические пространства, $x \in X, y \in Y$ — фиксированные точки в них, и $X \sqcup Y$ — дизъюнктное объединение. Тогда склейка $X \sqcup Y$ по точкам x и y называется *букетом* пространств X и Y (с отмеченными точками x и y).

Пример 2.57 (Склеивание концов отрезка). Пусть $X = [a, b]$. Рассмотрим пространство Y , полученное из X склейкой точек a и b , см. пример 2.55. Точки этого пространства — это одноэлементные классы эквивалентности точек интервала (a, b) , которые естественно отождествлять с самими точками интервала, и еще один класс эквивалентности $[a] = [b] = \{a, b\}$, состоящий из двух склеенных точек. В качестве окрестности точки $x \in (a, b) \subset Y$ можно взять любой интервал вида $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2) \subset (a, b)$, а в качестве окрестности точки $[a]$ можно взять образ объединения $[a, a + \varepsilon_1] \cup (b - \varepsilon_2, b]$ двух открытых в $[a, b]$ полуинтервалов при канонической проекции $\pi: X \rightarrow Y$. При этой проекции точки $a, b \in X$ переходят в один и тот же класс $[a] \in Y$ («точки a и b склеиваются»).

Пример 2.58 (Факторизация по подмножеству). Более общо, пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ — его непустое подмножество. Определим отношение эквивалентности R_A на X , положив $a \sim b$, если и только если $a = b$, или $a, b \in A$. Тогда пространство X/R_A говорят, что оно получено из X *факторизацией по множеству A* . Будем обозначать его через X/A . Если $A = \{x, y\}$, то получаем пространство со склеенными точками x и y , см. примеры 2.55, 2.56, 2.57.

Пример 2.59 (Фактор по сюръекции). Пусть X — топологическое пространство, и $f: X \rightarrow Y$ — его сюръективное отображение на некоторое множество Y . Тогда семейство полных прообразов $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ задает разбиение множества X , или, что одно и то же, отношение эквивалентности R_f на множестве X , при котором $xR_f x'$, если и только если $f(x) = f(x')$. Тогда фактор множество X/R_f обозначают также через X/f и говорят, что оно получено из X факторизацией по сюръекции f . На $X/f = X/R_f$ определена фактор-топология. Точки пространства X/f — это полные прообразы $f^{-1}(y)$. Заметим, что если $\pi: X \rightarrow X/f$ — каноническая проекция, переводящая x в содержащий его класс эквивалентности, то $\pi(x) = f^{-1}(f(x))$.

Пример 2.60 (Топологический граф). Пусть $G = (V, E, \partial)$ — некоторый граф. Используем операцию склеивания точек для построения по графу

G топологического пространства X_G , которое будем называть *топологическим графом*, соответствующим G . Каждому ребру $e \in E$ графа G поставим в соответствие отрезок $[a_e, b_e]$, будем считать, что отрезки попарно не пересекаются, тогда их объединение $\sqcup_{e \in E} [a_e, b_e]$ представляет собой топологическое пространство. Добавим к полученному пространству множество вершин графа, каждая из которых рассматривается как одноточечное пространство: $Y = V \cup (\sqcup_{e \in E} [a_e, b_e])$. Склеим теперь некоторые точки из Y так. Для каждого $e \in E$, если $\partial^{-1}(e)$ состоит из одной вершины, то склеим концы отрезка $[a_e, b_e]$ с этой вершиной, а если $\partial^{-1}(e)$ состоит из двух вершин, то склеим один конец отрезка $[a_e, b_e]$ с одной из них, а второй — со второй.

2.1.7 Гомеоморфизм

Какие топологические пространства следует считать «одинаковыми»? Например, два линейных пространства изоморфны, если между ними существует линейная биекция. В случае топологических пространств ключевым свойством является непрерывность.

Определение 2.61. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если f взаимно однозначно, и оба отображения f и f^{-1} непрерывны. Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow Y$.

Замечание 2.62. Из теоремы 2.36 вытекает, что если $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, то множество $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $f(U) \subset Y$. Поэтому гомеоморфизм устанавливает биекцию между топологиями.

Замечание 2.63. На гомеоморфизм f можно смотреть как на «переименование точек» в пространстве Y : если $f(x) = y$, то x можно воспринимать как новое имя точки y . При таком взгляде становится очевидно, что все топологические свойства гомеоморфных топологических пространств одинаковы.

Топологические пространства принято рассматривать с точностью до гомеоморфизма.

Замечание 2.64. Из предложения 2.39 вытекает, что

- каждое пространство гомеоморфно само себе,
- X гомеоморфно Y , если и только если Y гомеоморфно X ,
- если X гомеоморфно Y , а Y гомеоморфно Z , то и X гомеоморфно Z .

Таким образом, отношение гомеоморфности — это отношение эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно).

Обычно гомеоморфность двух пространств проще всего устанавливается явным предъявлением подходящего гомеоморфизма.

Пример 2.65. Покажем, что прямая \mathbb{R} и интервал (a, b) гомеоморфны. Действительно, в частном случае, когда $(a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$, гомеоморфизм устанавливается функцией $y = \operatorname{arctg} x$, так как она и обратная к ней, равная ограничению функции $x = \operatorname{tg} y$ на $(-\pi/2, \pi/2)$, являются непрерывными функциями.

В общем случае, интервал (a, b) сначала переводится гомеоморфно на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ с помощью отображения вида $y = kx + c$, где k и c — некоторые вещественные числа (найдите явные выражения для k и c); затем можно воспользоваться замечанием 2.64.

Пример 2.66. Рассмотрим на плоскости с координатами x, y окружность $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, и пусть $X = S^1 \cap \{(x, y) : y \geq 0\}$ — замкнутая полуокружность. Тогда X гомеоморфно отрезку $[-1, 1]$. Для проверки достаточно представить отрезок $[-1, 1]$ как подмножество оси x , рассмотреть взаимно однозначное отображение $f: X \rightarrow [-1, 1]$, положив $f: (x, y) \mapsto x$, и показать, что f — гомеоморфизм (сделайте это).

Пример 2.67. Если в примере 2.66 рассмотреть открытую полуокружность $X = S^1 \cap \{(x, y) : y > 0\}$, то аналогичное построение покажет, что X гомеоморфно интервалу $(-1, 1)$, а, значит, в силу примера 2.65 и замечания 2.64, открытая полуокружность гомеоморфна прямой.

Пример 2.68. На плоскости \mathbb{R}^2 с координатами x, y рассмотрим кольцо $X = \{(x, y) : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b\}$, где $0 < a < b < \infty$. Также в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 с координатами (x, y, z) рассмотрим цилиндр $Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, a \leq z \leq b\}$. Тогда X и Y гомеоморфны. Для доказательства достаточно показать, что отображение $f: X \rightarrow Y$, заданное так:

$$f: (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

является гомеоморфизмом (сделайте это).

Пример 2.69. Вырежем из бумаги прямоугольную ленту и склеим две противоположных стороны, предварительно перекрутив ленту на 360° . Тогда полученное топологическое пространство будет гомеоморфно обычному цилиндру (попробуйте это показать).

Проверка того, что данное отображение не является гомеоморфизмом, обычно несложная. Следующий пример демонстрирует, что для гомеоморфности отображения может оказаться недостаточно его взаимной однозначности и непрерывности.

Пример 2.70. Отображение f из полуинтервала $[0, 2\pi)$ в окружность $\{x^2 + y^2 = 1\}$, заданное формулой $h: t \mapsto (\cos t, \sin t)$, взаимно однозначно и непрерывно (проверьте!), но обратное к нему непрерывным не является, поэтому отображение f — не гомеоморфизм.

Пример 2.71. Рассмотрим пространство $X = [a, b]/\{a, b\}$, полученное из отрезка $[a, b]$ склейкой его концов a и b , см. пример 2.57. Тогда X гомеоморфно окружности (проверьте!).

Пример 2.72. Пусть $X = D^n$ — замкнутый n -мерный диск, и $A \subset X$ — граничная сфера. Рассмотрим пространство $Y = X/A$, полученное из D^n факторизацией по граничной сфере, см. пример 2.58. Тогда Y гомеоморфно n -мерной сфере (проверьте!).

А вот доказать, что гомеоморфизма не существует вообще — это довольно непростая задача. По большому счету, единственный способ состоит в том, чтобы сравнивать какие-то свойства или характеристики рассматриваемых пространств, которые у гомеоморфных пространств должны быть одинаковыми. Такие свойства или характеристики называются *топологическими инвариантами*. Если какая-то из таких характеристик у двух данных пространств различается, то пространства не гомеоморфны. Если же эти характеристики совпадают, то ничего определенного сказать нельзя.

Пример 2.73. Приведем идею доказательства того, что буквы Γ и Γ не гомеоморфны (детали станут понятны позже, после того, как мы обсудим понятие связности). Действительно, если бы существовал гомеоморфизм $f: \Gamma \rightarrow \Gamma$, то для любой точки $x \in \Gamma$ ограничение f на $\Gamma \setminus \{x\}$ было бы гомеоморфизмом с $\Gamma \setminus \{f(x)\}$. Однако если из Γ выкинуть точку крепления горизонтальной перекладины, то Γ распадется на три куска. Буква Γ , после выкидывания любой точки, распадается не более чем на два куска. «Количество кусков», из которых состоит топологическое пространство, является топологическим инвариантом. Тем самым, буквы Γ и Γ не гомеоморфны.

2.2 Связность и линейная связность

Определение 2.74. Топологическое пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых подмножеств A_1 и A_2 , каждое из которых является открытым в X . Если такое представление возможно, то пространство X называется *несвязным*.

Замечание 2.75. Если $X = A_1 \cup A_2$, где A_i — открытые непустые подмножества X , и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то каждое A_i является дополнением открытого множества A_j , $j \neq i$, и поэтому замкнуто в X . Такие одновременно открытые и замкнутые подмножества топологического пространства иногда называют *открыто-замкнутыми*.

Определение 2.76. Подмножество A топологического пространства X называется *связным*, если связным является топологическое пространство A с топологией, индуцированной из X .

Утверждение 2.77. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ — *связен*.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $[a, b] = A \cup B$, где множества A и B открыты, непусты и не пересекаются. Предположим для определенности, что $a \in A$. Рассмотрим множество всех таких ε , что полуинтервал $[a, a + \varepsilon)$ содержится в A , и пусть ε_0 — точная верхняя грань этого множества. Тогда, так как A — открыто, $\varepsilon_0 > 0$. Поскольку множество A замкнуто, точка $a + \varepsilon_0$ принадлежит A . Но тогда, если только $a + \varepsilon_0 \neq b$, существует открытый интервал $(a + \varepsilon_0 - \delta, a + \varepsilon_0 + \delta)$, целиком лежащий в открытом A , и поэтому полуинтервал $[a, a + (\varepsilon_0 + \delta))$ содержится в A , что противоречит выбору ε_0 . Поэтому $a + \varepsilon_0 = b$. Но тогда $A = [a, b]$ и множество B пусто. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Упражнение 2.5. Показать, что интервал (a, b) связан.

Упражнение 2.6. Пусть $X \cup Y$ — несвязная сумма произвольных топологических пространств. Показать, что пространство $X \cup Y$ несвязно.

Упражнение 2.7. Показать, что букет (см. пример 2.56) связных топологических пространств по любой паре точек является связным.

Определение 2.78. Максимальное по включению связное подпространство пространства X называется его *связной компонентой* или *компонентой связности*.

Замечание 2.79. Максимальность означает, что если связная компонента C пространства X содержится в связном подмножестве $Y \subset X$, то $Y = C$.

Утверждение 2.80. *Связные компоненты топологического пространства X попарно не пересекаются и являются замкнутыми подмножествами пространства X .*

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 — разные связные компоненты пространства X . Рассмотрим их объединение $Y = X_1 \cup X_2$. Оно не может быть связным (иначе получаем противоречие с максимальной связностью). Тогда $Y = A \cup B$, где A и B — непустые непересекающиеся открытые подмножества. Но $X_i \cap A$ и $X_i \cap B$ открыты в X_i , поэтому не могут быть одновременно не пусты (иначе X_i будет не связным). Следовательно каждая компонента X_i содержится или в A , или в B . При этом, если $X_1 \subset A$, то $X_2 \subset B$ так как иначе B пусто. Поэтому X_1 и X_2 не пересекаются.

Далее, пусть X_1 — не замкнутая связная компонента, и $x \in X$ — ее точка прикосновения, которая не входит в X_1 . Рассмотрим $Y = X_1 \cup \{x\} \subset X$. Множество Y не может быть связным (иначе получаем противоречие с максимальной связностью X_1). Тогда $Y = A \cup B$, где A и B — непустые непересекающиеся открытые подмножества. Так же как и выше проверяется, что X_1 целиком содержится или в A , или в B , и, если $X_1 \subset A$ для определенности, то $x \in B$. Но тогда B — открытая окрестность точки x , которая не пересекается с X_1 , поэтому x не является точкой прикосновения для X_1 , противоречие. Утверждение доказано. \square

Замечание 2.81. Связные компоненты не обязаны быть открытыми подмножествами. В качестве примера рассмотрим подмножество X вещественной прямой, полученное из отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием последовательности $\{1/n\}$. Тогда $\{0\} \subset X$ — связная компонента пространства X .

Упражнение 2.8. Показать, что пространство X связно, если и только если каждое его открыто-замкнутое подмножество или пусто, или совпадает со всем X .

Упражнение 2.9. Сколько компонент связности имеет пространство X , наделенное дискретной топологией?

Утверждение 2.82. *Предположим, что в топологическом пространстве X для каждой пары $\{x, y\}$ его различных точек найдется связное подмножество C_{xy} , содержащее x и y . Тогда пространство X связно.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $X = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты, причем $A \cap B = \emptyset$. Выберем точки $a \in A$, $b \in B$ и рассмотрим связное множество C_{ab} , содержащее a и b . Однако множество C_{ab} разлагается в объединение двух своих непустых, открытых и непересекающихся подмножеств $C_{ab} \cap A$ и $C_{ab} \cap B$, что противоречит связности C_{ab} . Доказательство закончено. \square

Утверждение 2.83. *Образ связного подмножества топологического пространства при непрерывном отображении связан.*

Доказательство. В самом деле, если образ $Y = f(X)$ связного множества X при непрерывном отображении f несвязен, то, по определению, $Y = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты и не пересекаются. Но тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, причем множества $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ непусты, открыты и не пересекаются, т.е. X несвязно. Полученное противоречие и завершает доказательство. \square

Следствие 2.84 (В. Р. J. N. Bolzano, А. L. Cauchy). *Непрерывная функция, заданная на связном топологическом пространстве X , принимает все промежуточные значения.*

Доказательство. Действительно, если, скажем, значение y_0 не принимается непрерывной функцией $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, но принимаются некоторые значения больше и меньше y_0 , то образ $f(X)$ распадается в объединение двух открытых, непустых, непересекающихся подмножеств $f(X) \cap (y_0, +\infty)$ и $f(X) \cap (-\infty, y_0)$. Последнее противоречит утверждению 2.83. Следствие доказано. \square

Определение 2.85. *Непрерывной кривой* в топологическом пространстве X называется любое непрерывное отображение γ отрезка $[a, b]$ в X . При этом говорят, что эта непрерывная кривая *соединяет точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.*

Определение 2.86. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

Так как композиция непрерывных отображений — тоже непрерывное отображение, мгновенно получаем следующий результат.

Утверждение 2.87. *Образ линейно связного пространства при непрерывном отображении — линейно связан. В частности, линейная связность — топологический инвариант.*

Из утверждений 2.77, 2.82 и 2.83 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.88. *Линейно-связное топологическое пространство связно.*

Замечание 2.89. Обратное, вообще говоря, не верно. Приведите пример.

Лемма 2.90. *Пусть в топологическом пространстве X даны две непрерывные кривые $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$ и $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow X$, причем $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Тогда отображение $g : [a, c] \rightarrow X$, которое на $[a, b]$ совпадает с γ_1 , а на $[b, c]$ с γ_2 , тоже является непрерывной кривой.*

Доказательство. Достаточно показать, что отображение γ непрерывно в точке b , т.е. для любой окрестности U точки $\gamma(b)$ существует такой интервал $(b - \delta, b + \delta) \subset [a, c]$, что его γ -образ содержится в U . Так как γ_i непрерывны в b , существуют полуинтервалы $(b - \delta_1, b]$ и $[b, b + \delta_2)$ такие, что

$$\gamma_1((b - \delta_1, b]) \subset U, \quad \text{и} \quad \gamma_2([b, b + \delta_2)) \subset U.$$

Но тогда достаточно положить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Лемма доказана. \square

Лемма 2.91. *Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ — непрерывная кривая в топологическом пространстве X , соединяющая точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$, и пусть $[c, d]$ — произвольный отрезок. Тогда существует непрерывная кривая $\gamma' : [c, d] \rightarrow X$, соединяющая те же точки такая, что $\gamma'(c) = \gamma(a)$, $\gamma'(d) = \gamma(b)$, а также непрерывная кривая $\gamma'' : [c, d] \rightarrow X$, соединяющая те же точки и такая, что $\gamma''(c) = \gamma(b)$, $\gamma''(d) = \gamma(a)$.*

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть композицию $\gamma' = \gamma \circ f$, где $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$ линейное отображение

$$f(t) = \frac{(b-a)t + ad - bc}{d-c}, \quad t \in [c, d].$$

Тогда $f(c) = a$, $f(d) = b$, поэтому γ' — непрерывная кривая, и $\gamma'(c) = \gamma(f(c)) = \gamma(a)$ и $\gamma'(d) = \gamma(f(d)) = \gamma(b)$. Аналогично, если положить

$$h(t) = \frac{(a-b)t + bd - ac}{d-c}, \quad t \in [c, d],$$

то $h(c) = b$, $h(d) = a$, и если $\gamma'' = \gamma \circ h$, то $\gamma''(c) = \gamma(h(c)) = \gamma(b)$ и $\gamma''(d) = \gamma(h(d)) = \gamma(a)$, что и требовалось. \square

Теорема 2.92. *Зафиксируем в топологическом пространстве X некоторую точку x_0 . Тогда X линейно связно, если и только если любую точку можно соединить непрерывной кривой с x_0 .*

Доказательство. Если X линейно связно, то утверждение теоремы мгновенно следует из определения линейной связности. Обратно, пусть y_1 и y_2 — произвольные точки из X , и пусть $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow X$, $\gamma_i(a_i) = y_i$, $\gamma_i(b_i) = x_0$, $i = 1, 2$, — непрерывные кривые, соединяющие y_1 и y_2 с точкой x_0 . По лемме 2.91 можно заменить кривую γ_2 на кривую $\gamma'_2: [b_1, c] \rightarrow X$, соединяющую те же точки, что и γ_2 , причем $\gamma'_2(b_1) = x_0$, $\gamma'_2(c) = y_2$. Применяя лемму 2.90, получаем непрерывную кривую, соединяющую y_1 и y_2 . Таким образом, пространство X — линейно связно. \square

Определение 2.93. Максимальное по включению линейно связное подмножество топологического пространства X , называется *линейно связной компонентой пространства X* или *компонентой линейной связности пространства X* .

Разбор следующих примеров оставим в качестве упражнений.

Пример 2.94. Пусть X — подмножество плоскости \mathbb{R}^2 , которое получается из \mathbb{R}^2 выбрасыванием оси x . Тогда X состоит из двух компонент линейной связности — открытых полуплоскостей $\{(x, y) : y < 0\}$ и $\{(x, y) : y > 0\}$.

Пример 2.95. Пусть X — подмножество плоскости \mathbb{R}^2 , которое получается из \mathbb{R}^2 выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Тогда X состоит из двух компонент линейной связности.

Пример 2.96. Пусть X — подмножество плоскости \mathbb{R}^2 , которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием произвольного его радиуса AC . Тогда X — линейно связное пространство.

Пример 2.97. Пусть X — подмножество плоскости \mathbb{R}^2 , которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием двух различных его радиусов AC и AD . Тогда X состоит из двух компонент линейной связности.

2.3 Хаусдорфовость

Еще одной важной характеристикой топологического пространства являются свойства отделимости. Мы здесь приведем только одну из многих так называемых аксиом отделимости, аксиому Хаусдорфа¹.

Определение 2.98. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любых двух его различных точек существуют непересекающиеся открытые окрестности.

¹Felix Hausdorff (1868–1942), замечательный немецкий математик, один из основателей топологии, теории размерностей, метрической геометрии. Служил профессором в Лейпциге, Грейфсвальде и Бонне. В 1935 году был отстранен от преподавания, в 1942 перед отправкой в лагерь принял яд вместе с женой и ее сестрой.

Очевидно, не любое пространство является хаусдорфовым. Простейший пример нехаусдорфова — пространство X , состоящее из двух и более точек, с тривиальной топологией $\{X, \emptyset\}$. Стандартный пример хаусдорфова пространства — пространство с метрической топологией.

Утверждение 2.99. *Любая метрическая топология — хаусдорфова.*

Доказательство. Пусть (X, d) — метрическое пространство, и x, y — любые две его различные точки. Положим $r = d(x, y)/3$. Тогда открытые шаровые окрестности $U_r(x)$ и $U_r(y)$ не пересекаются. Действительно, пусть $z \in U_r(x) \cap U_r(y)$. Тогда по неравенству треугольника имеем: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r = 2d(x, y)/3$, противоречие. \square

Следствие 2.100. *Нехаусдорфова топология не является метрической.*

Утверждение 2.101. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, и $x \in X$ — произвольная его точка. Тогда множество $\{x\} \subset X$ замкнуто в X .*

Доказательство. Действительно, для каждой точки $y \in X \setminus \{x\}$ найдется окрестность $U(y)$, которая не пересекается с некоторой окрестностью точки x , а значит $x \notin U(y)$. Но тогда $X \setminus \{x\} = \cup_{y \in X \setminus \{x\}} U(y)$ открыто как объединение открытых множеств. \square

Задача 2.102. Покажите, что метрические пространства обладают следующим более сильным свойством. Для каждой точки x и каждого замкнутого подмножества F метрического пространства X , таких, что $x \notin F$, найдутся непересекающиеся открытые окрестности, т.е. такие открытые непересекающиеся подмножества $U, V \subset X$, что $x \in U$ и $F \subset V$.

Задача 2.103. Покажите, что метрические пространства обладают еще более сильным свойством. Для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств F_1 и F_2 метрического пространства X найдутся непересекающиеся открытые окрестности, т.е. такие открытые непересекающиеся подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $F_1 \subset U_1$ и $F_2 \subset U_2$.

Замечание 2.104. Хаусдорфовы топологические пространства, обладающие свойством, сформулированным в задаче 2.103, называются *нормальными*. Таким образом, из утверждения 2.99 и задачи 2.103 следует, что *любое метрическое пространство нормально*.

2.4 Компактность

Понятие компактности обсуждается в курсе анализа. Общее определение практические такое же.

Определение 2.105. *Открытым покрытием топологического пространства X называется семейство $\{U_\alpha\}$ открытых в X множеств U_α такое,*

что $X = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$. *Открытым покрытием* подмножества Y топологического пространства X называется семейство $\{U_{\alpha}\}$ открытых в X множеств U_{α} такое, что $Y \subset \cup_{\alpha} U_{\alpha}$. *Подпокрытием* называется произвольное подсемейство покрытия, само являющееся покрытием.

Определение 2.106. Топологическое пространство X (подмножество Y топологического пространства X) называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Пример 2.107. Как показывается в математическом анализе (Теорема Бореля), отрезок $[a, b]$ компактен.

Определение 2.108. Подмножество метрического пространства называется *ограниченным*, если оно лежит в некотором шаре конечного радиуса.

Следующее важное утверждение (Теорема Бореля–Гейне–Лебега), являющееся критерием компактности подмножества евклидова пространства, доказано в курсе математического анализа.

Теорема 2.109 (E. Borel, E. Heine, H.-L. Lebesgue). *Подмножество Y в \mathbb{R}^n компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Нам понадобятся некоторые общие свойства компактных пространств.

Предложение 2.110. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Предположим, что X компактно. Тогда $f(X)$ — компактное подмножество Y .*

Доказательство. Пусть $\{U_{\alpha}\}$ — произвольное открытое покрытие множества $f(X)$, тогда $\{f^{-1}(U_{\alpha})\}$ — открытое покрытие компакта X , поэтому в нем существует некоторое конечное подпокрытие. Но тогда семейство тех U_{β} , для которых множества $f^{-1}(U_{\beta})$ образуют это конечное подпокрытие, является конечным подпокрытием покрытия $\{U_{\alpha}\}$ множества $f(X)$. \square

Следствие 2.111. *Образ непрерывной кривой в \mathbb{R}^n компактен и, значит, замкнут и ограничен.*

Доказательство. Это следует из компактности отрезка (пример 2.107), предложения 2.110 и теоремы 2.109. \square

Следствие 2.112 (K. Th. W. Weierstraß). *Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на компактном топологическом пространстве. Тогда функция f ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения.*

Доказательство. Действительно, по предложению 2.110, множество $f(X) \subset \mathbb{R}$ компактно, следовательно, по теореме 2.109, оно замкнуто и ограничено. Ограниченность множества $f(X)$ означает ограниченность функции f . Замкнутость множества $f(X)$ означает, что $\inf f(X)$ и $\sup f(X)$ лежат в $f(X)$, т.е. функция достигает своего наименьшего и наибольшего значений. \square

Следствие 2.113. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная кривая, и $P \in \mathbb{R}^n$ — некоторая точка. Тогда функция $f(t) = |P\gamma(t)|$ расстояния от P до точек кривой $\gamma(t)$ непрерывна и достигает своего минимума и максимума. Если к тому же точка P не лежит на этой кривой, т.е. не принадлежит образу отображения γ , то этот минимум положителен.

Доказательство. Действительно, функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому, в силу следствия 2.112, функция f достигает своего наименьшего и наибольшего значения. Пусть наименьшее значение достигается в точке $t_0 \in [a, b]$. Если P не лежит на γ , то $f(t_0) = |P\gamma(t_0)| > 0$ в силу положительной определенности метрики. \square

Определение 2.114. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на топологическом пространстве, называется *локально постоянной*, если для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U , что f постоянна на U .

Предложение 2.115. *Локально постоянная функция непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — локально постоянная функция. Тогда для каждой $x \in X$ существует окрестность U точки x , на которой f постоянно. Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем: $f(U) = \{f(x)\} \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$, поэтому f непрерывна в каждой точке x . \square

Следствие 2.116. *Локально постоянная функция f постоянна на каждой компоненте линейной связности.*

Доказательство. Пусть x и y — произвольные точки из компоненты линейной связности, т.е. существует непрерывная кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, для которой $x = \gamma(a)$ и $y = \gamma(b)$. Образ $\Gamma = \gamma([a, b])$ кривой γ компактен в силу предложения 2.110. Для каждой точки $t \in \Gamma$ существует окрестность $U(t)$ на которой функция f постоянна. Выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U(t)\}$ компакта Γ . Из существования этого конечного покрытия следует, что функция f принимает конечное число значений на Γ . С другой стороны, если среди этих значений есть пара различных, то, по теореме Больцано–Коши (см. следствие 2.84) таких значений континуум, противоречие. \square

Утверждение 2.117. *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое подмножество компактного пространства X , и $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие множества A . Так как $X \setminus A$ — открытое подмножество в X , то семейство $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ является открытым покрытием всего пространства X . Пространство X компактно, поэтому у этого покрытия существует конечное подпокрытие $\{X \setminus A, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$. Но тогда $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ — это конечное покрытие множества A . Доказательство закончено. \square

В общем случае замкнутость не является необходимым условием компактности. Однако справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.118. *Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество хаусдорфова пространства X . Покажем, что произвольная точка $x \in X \setminus K$ не является точкой прикосновения для K . Действительно, в силу хаусдорфовости, для каждой точки $y \in K$ существует пара непересекающихся открытых окрестностей $U(x, y)$ и $V(y)$ точек x и y соответственно, причем окрестность точки x зависит, вообще говоря, от y . Воспользуемся компактностью K и выберем его конечное покрытие окрестностями $\{V(y_i)\}_{i=1}^k$. Тогда $U(x) = \bigcap_i U(x, y_i)$ — конечное пересечение открытых окрестностей точки x , которое само является окрестностью точки x . Таким образом, $U(x)$ — открытая окрестность точки x , которая не пересекается с $\cup_i V(y_i)$, а значит и с K (поскольку $K \subset \cup_i V(y_i)$), что и требовалось. \square

Компактность — сильное условие, позволяющее упростить, в том числе, доказательство гомеоморфности.

Теорема 2.119. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y . Тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ определено благодаря взаимной однозначности. Остается доказать его непрерывность. Пусть $F \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество. Тогда F компактно (утверждение 2.117). Прообраз $(f^{-1})^{-1}(F)$ при отображении f^{-1} равен $f(F)$ — компактному подмножеству в Y (предложение 2.110). Но компактное подмножество в хаусдорфовом пространстве Y замкнуто (утверждение 2.118), значит прообраз любого замкнутого подмножества $F \subset X$ при отображении f^{-1} замкнут. Осталось применить критерий непрерывности. \square

Замечание 2.120. Теорема 2.119 может быть переформулирована в следующем, немного более общем, виде. Пусть $f: X \rightarrow Y$ непрерывное взаимно однозначное с образом отображение компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y . Тогда f — гомеоморфизм с образом, т.е. $f: X \rightarrow f(X)$ — гомеоморфизм.

Теорема 2.119 обобщается на случай сюръективных отображений.

Теорема 2.121. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ непрерывное сюръективное отображение компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y . Тогда Y гомеоморфно фактор-пространству X/f .*

Доказательство. Обозначим через π каноническую проекцию $\pi: X \rightarrow X/f$. Напомним, что точками пространства X/f являются полные прообразы $f^{-1}(y)$ точек y пространства Y , а в качестве топологии берется фактор топология, заданная проекцией π . Рассмотрим отображение $g: X/f \rightarrow Y$, переводящее $f^{-1}(y)$ в y . Очевидно, g — биекция и, кроме того, $g \circ \pi = f$. Покажем, что g — гомеоморфизм.

Проверим сначала непрерывность отображения g . Пусть $V \subset Y$ — произвольное открытое подмножество пространства Y . Тогда $g^{-1}(V)$ — подмножество в X/f , состоящее из точек $f^{-1}(y)$ таких, что $y \in V$, поэтому $g^{-1}(V) = \pi(f^{-1}(V))$. Но тогда $\pi^{-1}(g^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ — открытое подмножество в X в силу непрерывности f , поэтому $g^{-1}(V)$ — открытое подмножество в X/f по определению фактор-топологии, и, значит, g непрерывно. Отметим, что пока мы не пользовались ни хаусдорфовостью Y , ни компактностью X .

Перейдем к отображению g^{-1} . Возьмем произвольное замкнутое подмножество F в X/f . Покажем, что его g^{-1} -прообраз замкнут в Y . Для этого заметим, что этот прообраз совпадает с $g(F)$, и $g(F) = f(\pi^{-1}(F))$. Но $\pi^{-1}(F)$ — замкнутое, а значит и компактное подмножество компакта X (утверждение 2.117), образ $f(\pi^{-1}(F))$ которого при непрерывном отображении f является компактным подмножеством в Y (предложение 2.110). Это компактное подмножество замкнуто, поскольку Y хаусдорфово (утверждение 2.118). Таким образом, отображение g^{-1} непрерывно. Теорема доказана. \square

Пример 2.122. Пусть $X = [0, 2\pi]$ — отрезок, Y — окружность, заданная на плоскости \mathbb{R}^2 с координатами (x, y) уравнением $x^2 + y^2 = 1$, и сюръективное отображение $f: X \rightarrow Y$ задано так: $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда факторпространство X/f — это результат склейки отрезка $[0, 2\pi]$ по его концам (см. пример 2.71), и из теоремы 2.121 сразу следует, что это факторпространство гомеоморфно окружности.

Упражнение 2.10. Доказать, что факторпространство D^n/S^{n-1} , где D^n — замкнутый n -мерный шар в \mathbb{R}^n , а S^{n-1} — его граничная сфера, гомеоморфно сфере S^n размерности n . (Указание: рассмотреть сюръективное отображение шара в сферу, при котором граница шара отображается в одну точку, и использовать теорему 2.121).

Упражнение 2.11. Доказать, что сфера S^n размерности n может быть получена как результат склейки двух шаров $D^n \subset \mathbb{R}^n$ по общей границе S^{n-1} . (Указание: рассмотреть отображение объединения шаров в сферу, при котором каждый из шаров отображается на полусферу, а границы шаров — на один и тот-же $(n-1)$ -мерный «экватор» S^{n-1} , и использовать теорему 2.121).

2.5 Пределы

Пусть X — произвольное множество. *Последовательностью в множестве X* называется произвольное отображение $x: \mathbb{N} \rightarrow X$. Образ $x(n)$ натурального числа n в этом случае принято обозначать через x_n , а саму последовательность записывать в виде $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$. Пусть теперь X — топологическое пространство и $\{x_n\}$ — последовательность точек в нем. Точка $a \in X$ называется *пределом последовательности $\{x_n\}$* , если для

любой окрестности V точки a существует натуральное число N такое, что $x_n \in V$ для всех $n > N$. Последовательность, у которой существует предел, называется *сходящейся*.

Упражнение 2.12. Пусть X — топологическое пространство с тривиальной топологией. Покажите, что любая точка $a \in X$ является пределом любой последовательности $\{x_n\}$ в X .

Упражнение 2.13. Опишите сходящиеся последовательности в топологическом пространстве с дискретной топологией.

Упражнение 2.14. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство. Покажите, что если у некоторой последовательности $\{x_n\}$ в X существует предел, то этот предел единственен.

Рассмотрим теперь общую ситуацию, а именно, пусть задано отображение $f: A \rightarrow X$ некоторого множества A в топологическое пространство X . Чтобы определить предел такого отображения нужна дополнительная структура на A , а именно, некоторая семейство подмножеств множества A со специальными свойствами, называемое *базой* или *базисом фильтра*.

Семейство $\mathcal{F} \subset 2^A$ называется *базисом фильтра* в A , если каждое множество $U \in \mathcal{F}$ не пусто, и для любых двух элементов U_1 и U_2 из \mathcal{F} существует $U \in \mathcal{F}$ такой, что $U \subset U_1 \cap U_2$. В частности, пересечение любых двух элементов базы фильтра непусто. База фильтра \mathcal{F} в A называется *фильтром*, если каждое подмножество $V \subset A$, содержащее некоторый элемент $U \in \mathcal{F}$, само принадлежит \mathcal{F} .

Пример 2.123. Пусть $A = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Тогда семейство всех его подмножеств вида $U_k = \{n : n \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$, является базисом фильтра в \mathbb{N} (но не является фильтром).

Пример 2.124. Пусть A — топологическое пространство, и x — некоторая его точка. Тогда семейство всех окрестностей точки x — это фильтр в A . Если топология на A задана некоторой базой β , то семейство всех базовых окрестностей точки x , то есть $\{V \in \beta : x \in V\}$, является базисом фильтра (но, вообще говоря, не является фильтром). Обозначим этот базис фильтра через $\mathcal{F}(x)$.

Пусть на множестве A фиксирован базис фильтра \mathcal{F} , и пусть $f: A \rightarrow X$ — отображение в топологическое пространство X . Точка a называется *пределом отображения f по \mathcal{F}* , если для любой окрестности V точки a в пространстве X найдется элемент $U \in \mathcal{F}$ такой, что $f(U) \subset V$.

Упражнение 2.15. Рассмотрим на множестве натуральных чисел базис фильтра из примера 2.123, и пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность точек топологического пространства X . Покажите, что $a \in X$ является пределом последовательности $\{x_n\}$ в смысле приведенного выше определения тогда и только тогда, когда a является пределом отображения $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ по этому базису фильтра.

Упражнение 2.16. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X$ — произвольная точка, и $\mathcal{F}(x)$ базис фильтра окрестностей точки x (см. пример 2.124). Покажите, что отображение f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда $f(x)$ является пределом отображения f по $\mathcal{F}(x)$.

Замечание 2.125. Для случая метрических пространств понятие компактности оказывается связанным с понятием сходимости последовательностей. А именно, метрического пространства компактно тогда и только тогда, когда каждая последовательность в нем содержит сходящуюся подпоследовательность. В общем случае это не верно. Топологическое пространство, в котором каждая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность называется *секвенциально компактным*. Оказывается, понятия компактности и секвенциальной компактности не связаны между собой: существуют примеры пространств, обладающих одним из этих свойств, но не обладающих другим.

Литература к главе 2

- [1] Александрия Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология*. Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1979.
- [2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Факториал Пресс, 2000.